This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

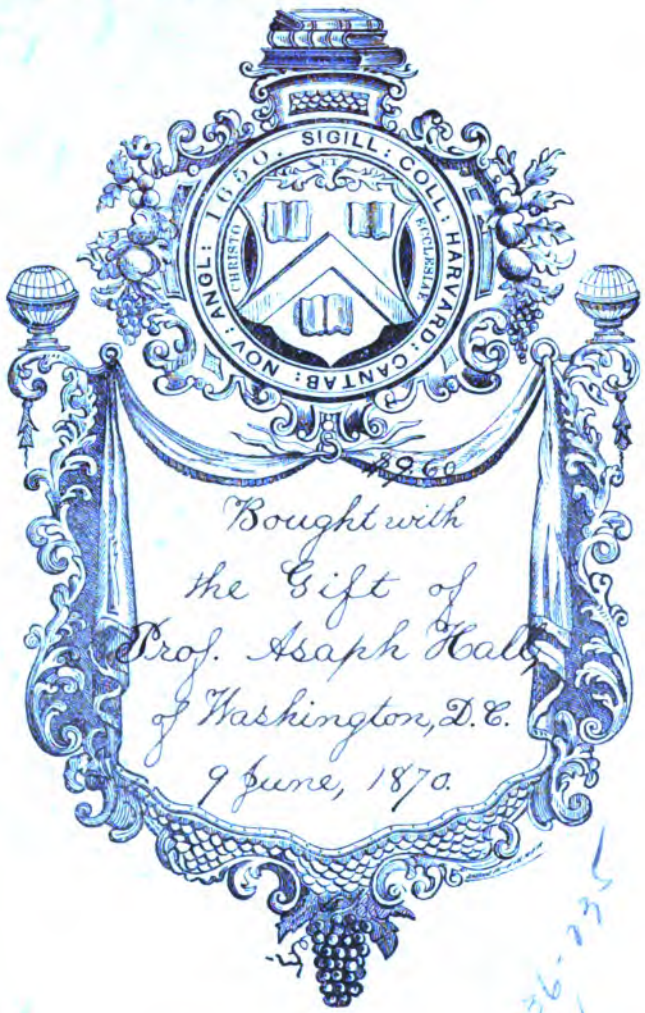
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3008.64.3



SCIENCE CENTER LIBRARY

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL,

Joseph Louis François

PAR J. BERTRAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÉGE DE FRANCE.

II

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1870

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Math 3008.64.3

HARVARD COLLEGE LIBRARY
1870, June 9.
Bought with the
Gift of
Prof. Asaph Hall,
of Washington, D.C.

$ 9.60.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

Pages.

AVERTISSEMENT XI

LIVRE PREMIER.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

CHAPITRE PREMIER. — DIVERSES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES 1
— Définitions 1
— Intégrales que l'on obtient immédiatement 5
— Différentes méthodes d'intégration 7
— Quelques sommations réduites à des intégrales 11
— Sur les fonctions hyperboliques 13

CHAPITRE II. — INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES 16
— Simplification de la méthode dans des cas particuliers 23

CHAPITRE III. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES IRRATIONNELLES 37
— Différentielles qui contiennent $(ax+b)^{\frac{1}{q}}$ 37
— Cas où la différentielle contient $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 38
— Simplification de la méthode précédente 43
— Différentielles binômes 45
— Quelques intégrales auxquelles ne s'appliquent pas les méthodes précédentes 53
— Réduction des intégrales elliptiques 54
— Quelques intégrales qui se ramènent aux fonctions elliptiques 64

CHAPITRE IV. — INTÉGRATION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET EXPONENTIELLES 68

CHAPITRE V. — SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE CERTAINES INTÉGRATIONS 89
— Théorème d'Abel 89
— Intégrales exprimables par les fonctions algébriques et logarithmiques 97

CHAPITRE VI. — CALCUL DIRECT DES INTÉGRALES DÉFINIES 111
— Passage de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie 111
— Valeur principale d'une intégrale 117
— Calcul direct de quelques intégrales définies 118
— Simplification de quelques formules de réduction 126

Pages.

CHAPITRE VII. — EMPLOI DES SÉRIES DANS LE CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES 142
— Quelques développements en séries connues 142
— Formule générale de Poisson 168
— Formule d'Abel 171
— Formule de Jacobi 173
— Formule de M. Kummer 175

CHAPITRE VIII. — DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$ 180
— Différentiation sous le signe $\int$ 180
— Variation finie d'un paramètre 182
— Intégration sous le signe $\int$ 185
— Cas remarquable d'exception 187
— Intégrales déduites de la différentiation sous le signe $\int$ 189
— Intégrales définies déduites de l'intégration sous le signe $\int$ 194
— Exemple remarquable de discontinuité 205

CHAPITRE IX. — QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES OBTENUES PAR DES MÉTHODES DIVERSES 208
— Formule de Frullani 221
— Théorème de Cauchy 227
— Formule de Fourier 228

CHAPITRE X. — THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES 240
— Définition de la fonction $\Gamma(n)$ 240
— Quelques propriétés de la fonction Γ 240
— Valeur approchée de $\Gamma(n)$ lorsque n est très-grand 243
— Expression de $\Gamma(n)$ sous forme de produit infini 246
— Développement de $l\Gamma(n+1)$ en série convergente 249
— Calcul numérique de la fonction Γ 251
— Sur la fonction $\psi(x) = \frac{d}{dx} l\Gamma(x)$ 252
— Développement en série de la fonction $\psi(x)$ 256
— Théorème de Bernoulli 268
— Intégrales Eulériennes de première espèce 272
— Calcul numérique des intégrales Eulériennes 283
— Table des logarithmes de $\Gamma(n)$ 285
— Application de la Table 287

CHAPITRE XI. — INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES 291
— Définitions 291
— Variation brusque d'une intégrale imaginaire 305
— Détermination de quelques intégrales définies 307
— Nombre des racines d'une équation dans l'intérieur d'un contour donné 312
— Intégrales des fonctions susceptibles de plusieurs valeurs 314
— Système de représentation de Riemann 321

CHAPITRE XII. — CALCUL NUMÉRIQUE DE LA VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE 331
— Méthode des trapèzes 331
— Méthode d'interpolation de Cotes 331

Pages.
— Formule de Simpson 337
— Méthode de Gauss 339
— Formule d'Euler 344

LIVRE SECOND.

APPLICATIONS ET DÉVELOPPEMENTS.

CHAPITRE PREMIER. — ÉVALUATION DES AIRES PLANES ET DES ARCS DE COURBE 353
— Expression d'une aire plane 353
— Quelques applications 357
— Théorème de Steiner 361
— Théorème de M. Holditch 365
— Longueur d'un arc de courbe 366
— Théorème de Steiner 371
— Longueur totale d'une courbe fermée 372
— Théorème de Pascal 373
— Théorème de Jacques Bernoulli 374
— Théorèmes de Fagnano 375
— Théorème de M. Chasles 381
— Méthode de M. Talbot 382

CHAPITRE II. — ÉVALUATION DES SURFACES COURBES 389
— Surfaces de révolution 389
— Évaluation d'une surface quelconque 391
— Emploi des coordonnées curvilignes 396
— Emploi des coordonnées sphériques pour une surface quelconque 402
— Introduction des rayons de courbure dans l'expression de la surface 403
— Théorème de Gauss 406

CHAPITRE III. — DÉTERMINATION DES VOLUMES 409
— Décomposition en cylindres infiniment petits 409
— Emploi d'une double intégration 412
— Emploi des coordonnées polaires 417
— Emploi d'un système quelconque de coordonnées 419
— Introduction de l'élément de surface dans l'évaluation des volumes 422

CHAPITRE IV. — CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS SOLIDES 427
— Loi générale de l'attraction 427
— Expression des composantes de l'attraction 427
— Solide de plus grande attraction 430
— Attraction d'une sphère 432
— Attraction d'un ellipsoïde homogène 436
— Définition du potentiel 438
— Propriétés du potentiel 441
— Surfaces de niveau 444
— Théorie des images de M. Thomson 448
— Démonstration directe du théorème précédent 450

Pages.

CHAPITRE V. — THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES 454
— Définition d'une intégrale multiple 454
— Formule de Poisson 461
— Réduction par l'augmentation du nombre des intégrations 462
— Méthode de Dirichlet 463
— Changement de variables dans les intégrales multiples 468
— Différentiation et intégration sous le signe $\int$ 475
— Théorème de Georges Green 477
— Théorème de M. Crofton 483

CHAPITRE VI. — CALCUL INVERSE DES INTÉGRALES DÉFINIES 492
— Indétermination du problème 492
— Transformation d'une série numérique en intégrale définie 492
— Transformation de la fonction X_n en intégrale définie 502
— Solution d'un problème plus général 505
— Expression des racines d'une équation 507
— Fonctions génératrices d'Abel 509
— Solution de quelques problèmes 511

CHAPITRE VII. — QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE 516
— Théorème de Taylor 516
— Théorème de Laurent 518
— Quelques propriétés des fonctions bien définies 520
— Série de Lagrange 524
— Séries trigonométriques 528
— Digression sur les fonctions nommées Y_n 540
— Développement d'une fonction de deux variables 544
— Développement d'une fonction d'une seule variable 546

CHAPITRE VIII. — INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES 550
— Intégration des différentielles qui contiennent plusieurs variables indépendantes 550

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER. — THÉORÈMES RELATIFS A L'ADDITION DES INTÉGRALES 567
— Remarque relative à la théorie des sinus 567
— Étude de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$ 568
— Méthode de Lagrange 569
— Méthode de M. Darboux 571
— Représentation géométrique de l'intégrale 572
— Autre interprétation géométrique 575
— Théorème d'Abel 578
— Théorème de M. Clebsch 583

Pages.

CHAPITRE II. — DOUBLE PÉRIODICITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES 585
— Notation de Jacobi 585
— Addition des arguments 585
— Généralité des formules 587
— Périodicité des fonctions 591
— Démonstration directe de la double périodicité 594
— Étude des infinis et des zéros de $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta\, am\, u$ 595
— Résolution des équations $\sin am\, u = \sin am\, \alpha$, $\cos am\, u = \cos am\, \alpha$ 597
— Expression de $\sin am\, (u + \omega' \sqrt{-1})$ 598
— Sur les fonctions doublement périodiques 599
— Représentation géométrique de la double périodicité 600
— Impossibilité d'une troisième période 601
— Propriétés des fonctions doublement périodiques bien définies 602
— Théorème de M. Liouville 605

CHAPITRE III. — MULTIPLICATION ET DIVISION DE L'ARGUMENT 608
— Calcul direct de $\sin am\, nu$, $\cos am\, nu$, $\Delta\, am\, nu$ 608
— Division des fonctions elliptiques 611
— Applications géométriques 612
— Division en un nombre quelconque de parties égales 615
— Points d'inflexion des courbes du troisième degré 622

CHAPITRE IV. — EXPRESSION DES FONCTIONS SOUS FORME DE PRODUITS 623
— Première recherche des formules 623
— Transformation des produits doubles en produits simples 633

CHAPITRE V. — FONCTIONS $H(x)$ ET $\Theta(x)$ DE JACOBI 640
— Développement en série des fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ 643
— Quelques propriétés des deux fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ 648
— Introduction de $\Theta(x)$ dans l'expression de deux intégrales importantes 650

CHAPITRE VI. — TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES 654
— Transformations du premier degré 654
— Échelle de modules de Lagrange 656
— Théorie générale de Jacobi 666
— Théorie d'Abel 669
— Nombre de transformations de degré premier $(2n+1)$ 679
— Influence de la transformation sur le rapport des périodes 680

CHAPITRE VII. — CALCULS NUMÉRIQUES 682
— Calcul de la quantité q 682
— Calcul de la période ω 684
— Quelques applications 685
— Calcul de l'intégrale $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ 688
— Évaluation de l'intégrale $\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ 693
— Rectification de l'ellipse 698
— Rectification de l'hyperbole 699

Pages.

— Calcul de la surface de l'ellipsoïde 700
— Emploi de l'échelle des modules 702

TABLES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES 711
— Table des logarithmes de q 712
— Table des logarithmes des fonctions elliptiques 714
— Table donnant la valeur numérique de $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ 716
— Table donnant la valeur numérique de $\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ 717

TABLE ANALYTIQUE 719

AVERTISSEMENT.

Ce volume, qui fait suite au *Traité de Calcul différentiel* publié il y a six ans déjà, en 1864, contient la première Section du Calcul intégral. Les intégrales définies et indéfinies y sont étudiées avec le développement que m'a paru comporter, sur ce sujet presque illimité, un Livre qui, pour les Géomètres, doit rester l'exposition élémentaire des principes. Mon intention, en effet, je tiens à le répéter, n'est pas de remplacer, par la lecture d'un seul Ouvrage, l'étude laborieuse des œuvres originales qui ont créé la science : une telle tâche heureusement serait impossible. Si je puis enseigner à ceux qui me prendront pour guide ce que j'appellerais volontiers la *grammaire* et la *langue des hautes mathématiques,* et accroître, loin de diminuer, le nombre des lecteurs des Lagrange, des Gauss, des Abel, des Jacobi et des Cauchy, j'aurai rendu à la science un service très-modeste mais de réelle importance.

J'avais espéré, en commençant ce long travail, y joindre l'histoire sommaire des théories qui y sont exposées. J'ai reculé, je l'avoue, devant des difficultés de plus d'une sorte. L'histoire d'une science est trop complexe et trop délicate souvent à aborder, pour qu'on puisse d'une manière incidente trancher les questions en quelques lignes. Une indication incomplète est souvent une injustice, et le silence est presque toujours préférable. Il y a de graves inconvénients, d'ailleurs, à introduire les noms réellement illustres dans l'ordre et dans la mesure seulement où les appellerait l'exposition didactique des théories systématiquement enchaînées. J'ai été frappé depuis longtemps de la singulière impression qui en résulte et qui parfois subsiste chez les lecteurs souvent intelligents qui n'ont pas occasion de la rectifier ailleurs. Combien ai-je vu d'anciens candidats à l'École Polytechnique qui, connaissant fort bien un Traité d'Algèbre classique et n'ayant

rien lu au delà, ignoraient les noms d'Euler et de Bernoulli, et mettaient sur un même plan dans leur souvenir Newton et Bezout, Descartes et Budan, Moivre et Rolle, Cauchy et Sarrus, dont les noms leur rappelaient chacun l'énoncé d'un théorème et une démonstration de quelques pages. J'ai été vivement frappé, il y a un grand nombre d'années déjà, en entendant un savant estimable, connu par de bons travaux de Physique expérimentale, parler très-légèrement du mérite de Newton comme Géomètre. Mon étonnement l'ayant forcé de s'expliquer, je m'aperçus, qu'à ses yeux, Newton était surtout l'inventeur de la formule du binôme, qui pour lui, bien entendu, n'avait de sens que dans le cas d'un exposant entier et positif. Ce souvenir, peut-être, a exercé quelque influence sur la rédaction d'un Traité d'Algèbre dans lequel le savant et spirituel Terquem s'étonnait de voir subsister deux noms, celui de Descartes et celui de l'Auteur.

Je n'ai donc nullement cherché à introduire dans le texte l'histoire abrégée des progrès du Calcul intégral. Cette histoire, si je tente de l'écrire, formera une œuvre à part qui pourra être réunie à l'Ouvrage dont je donne ici le second volume, mais qui doit en rester distincte.

Je ne puis terminer cet Avertissement, si rapide qu'il soit, sans adresser mes sincères et vifs remercîments à M. Darboux et à M. Thoman dont l'affectueux concours gracieusement offert m'a été extrêmement utile. M. Darboux, dont je n'ai pas à rappeler la pénétration et le savoir, a bien voulu revoir toutes les épreuves et substituer, aux corrections typographiques que j'attendais seulement de lui, des observations judicieuses sur le texte même, et plus d'une fois la rédaction nouvelle d'une démonstration difficile remplaçant avec grand profit celle que j'avais essayée moi-même.

Les calculs et les Tables numériques sont dus à M. Fédor Thoman, qui joint à l'habileté d'un calculateur sans égal le savoir profond d'un Géomètre judicieux et inventif.

J. BERTRAND.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

LIVRE PREMIER.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

DIVERSES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

Définitions.

1. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel : le but que l'on s'y propose est de déterminer une fonction d'après une relation connue où figurent ses différentielles. Dans le cas le plus simple, auquel nous nous bornerons d'abord, la différentielle est connue et l'on cherche la fonction correspondante.

A toute différentielle donnée d'une fonction d'une seule variable, correspond une fonction primitive; l'aire comprise entre la courbe qui a pour équation $y = \varphi(x)$ et deux ordonnées, dont l'une est fixe et l'autre a pour abscisse la variable x, a en

effet pour différentielle [I, 114 (*)] $\varphi(x)\,dx$, et la fonction primitive de cette différentielle, dont rien ne limite la généralité, représentée par une surface bien déterminée, existe par conséquent dans tous les cas. L'ordonnée fixe qui limite la surface étant indéterminée, on peut, en la déplaçant, ajouter au résultat une constante arbitraire. Il est évident d'ailleurs, *à priori*, que si $F(x)$ a pour différentielle $\varphi(x)\,dx$, $F(x) + C$ a la même différentielle quelle que soit la constante C. Aucune autre fonction d'ailleurs ne partage cette propriété, car deux fonctions dont la différentielle est la même diffèrent par une constante.

2. La fonction dont la différentielle est $\varphi(x)\,dx$ se nomme l'*intégrale de* $\varphi(x)\,dx$; on l'indique en plaçant le signe $\int$ à la gauche de la différentielle;

$$\int \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

désigne ainsi, d'une manière générale, toute fonction de x dont $\varphi(x)\,dx$ est la différentielle. Ce signe $\int$ n'est autre que la lettre S, initiale du mot somme, et l'expression (1) se lit : somme de $\varphi(x)\,dx$. Ce nom et cette notation rappellent un point de vue important sous lequel l'expression peut être considérée. L'intégrale étant considérée comme on vient de l'indiquer, par l'aire d'une courbe, elle est évidemment la limite de la somme des rectangles infiniment petits inscrits dans cette courbe, dont l'expression analytique est, en désignant par a la première abscisse,

$$\varphi(a)\,dx + \varphi(a+dx)\,dx + \varphi(a+2dx)\,dx + \ldots + \varphi[a+(n-1)\,dx]\,dx, \tag{2}$$

n étant un nombre entier tel, que

$$a + ndx = x.$$

On peut d'ailleurs être conduit à cette expression sans aucune considération géométrique. Soit $F(x)$ la fonction dont $\varphi(x)\,dx$ est la différentielle; lorsque x varie d'une valeur quelconque x à la valeur voisine $x + dx$, l'accroissement de $F(x)$ est (I, 46), en négligeant les infiniment petits du second ordre, $\varphi(x)dx$; or en faisant passer la variable de la valeur a à la valeur $a + ndx = x$ par des accroissements successifs égaux à dx, la somme des accroissements successifs de la fonction sera l'accroissement total, c'est-à-dire la différence $F(x) - F(a)$. Cette expression se nomme l'intégrale *définie* de $\varphi(x)\,dx$ prise entre les limites a et x,

(*) Nous indiquons ainsi, dans tout le cours de ce volume, par I, le renvoi au tome Ier, le chiffre placé à la suite indiquant le paragraphe invoqué.

et l'on écrit

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Il importe de remarquer que dans l'équation (3), la lettre x qui sert de limite supérieure à l'intégrale et celle qui figure sous le signe $\int$ sont entièrement distinctes et indépendantes l'une de l'autre. On peut leur donner des noms différents et écrire

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$F(x)$ désignant toujours la fonction primitive de $\varphi(x)$. On a évidemment d'après cela, quelles que soient les lettres x et z,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(z)\,dz,$$

et une intégrale définie n'est pas une fonction de la variable par rapport à laquelle on intègre.

3. $F(x)$ désignant toujours l'intégrale de $\varphi(x)\,dx$, la formule

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ne suppose nullement la limite supérieure b plus grande que la limite inférieure a; le premier membre est la somme des accroissements infiniment petits de $F(x)$ lorsque x varie de la valeur a à la valeur b : peu importe que les accroissements désignés par dx soient positifs ou négatifs. On a d'après cela, quels que soient a et b,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\,dx,$$

et, en renversant les limites d'une intégrale définie, on change le signe du résultat.

4. Il faut, dès à présent, signaler un cas important dans lequel les définitions précédentes sont en défaut, c'est celui où entre les limites de l'intégration la fonction primitive $F(x)$ devient discontinue, ce qui a lieu en général lorsqu'elle passe par l'infini. Il n'est plus permis, dans ce cas, de regarder l'accroissement total comme la somme des accroissements infiniment petits correspondants aux accroissements successifs de la variable. La formule générale que nous avons donnée pour exprimer l'intégrale ne représente dans ce cas ni l'aire de la courbe,

ni la somme des accroissements de la fonction. Pour bien faire comprendre cette remarque importante, supposons que la fonction $F(x)$ soit égale à $-\frac{1}{x}$; elle a pour différentielle $\frac{dx}{x^2}$, et la formule générale donne, en adoptant pour limites -1 et $+1$, entre lesquelles est comprise la valeur zéro,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1 - \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1},$$

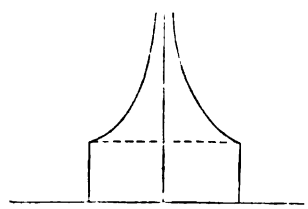
$\left(-\frac{1}{x}\right)_1$ et $\left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}$ désignant ce que devient $-\frac{1}{x}$ lorsqu'on y suppose x égal à 1 ou à -1; on aurait donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2.$$

L'élément $\frac{dx}{x^2}$ est cependant toujours positif, et la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{1}{x^2}$$

a la forme suivante



dont l'aire totale comprise entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses -1 et $+1$ ne peut évidemment pas être égale à -2. La formule employée n'est donc pas applicable et nous en avons dit la raison.

Si l'on demande quelle est l'expression de l'aire totale qui d'après la règle générale serait représentée par

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2},$$

il est aisé de voir qu'elle est infinie. Si l'on considère en effet les deux intégrales

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2},$$

ε étant un nombre positif très-petit, l'application de la formule générale ne pré-

sente plus de difficulté et l'on a

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

et ces deux intégrales augmentent toutes deux sans limites lorsque ε tend vers zéro.

En général, si l'on désigne par α un nombre compris entre les limites a et b, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^\alpha \varphi(x)\,dx + \int_\alpha^b \varphi(x)\,dx,$$

et on le vérifie aisément, car en nommant $F(x)$ la fonction primitive de $\varphi(x)\,dx$, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^\alpha \varphi(x)\,dx = F(\alpha) - F(a),$$

$$\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(\alpha).$$

Mais la formule devient fausse lorsque, $F(\alpha)$ étant infini, les deux intégrales partielles deviennent infinies, et les expressions considérées ne présentent plus alors aucun sens déterminé.

On a par exemple, comme on le vérifie aisément par la différentiation,

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x}.$$

On en conclurait, d'après la formule générale,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l(-1) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1},$$

résultat évidemment absurde et qui s'explique parce que la différentielle $\frac{dx}{1-x^2}$ étant infinie pour $x = 1$, la formule d'intégration n'est pas ici applicable.

Intégrales que l'on obtient immédiatement.

5. La moindre habitude du calcul suggère immédiatement les intégrales de certaines différentielles. Citons par exemple les formules suivantes, qui sont toutes

évidentes et dans lesquelles nous nous dispenserons d'ajouter au second membre la constante qui doit le compléter :

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx,$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m},$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m},$$

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -l\cos x,$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l\sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x.$$

On pourrait à ces exemples en joindre beaucoup d'autres, mais nous nous bornons ici aux cas les plus simples.

6. Nous ferons une seule remarque sur l'une des formules qui précèdent : on a, quel que soit m,

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \tag{1}$$

Le cas où $m = -1$ fait exception ; on a alors

$$\int \frac{dx}{x} = lx,$$

et la formule (1) donnerait

$$\int \frac{dx}{x} = \infty.$$

Il est aisé cependant de déduire de la formule (1) la valeur de $\int \frac{dx}{x}$. On sait qu'il est permis d'ajouter au second membre une constante arbitraire ; choisissons-la de

telle sorte que celui-ci s'annule pour une valeur déterminée de x, $x = a$: on est assuré alors qu'il ne peut plus devenir infini. On a

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

et si l'on fait tendre m vers -1, l'intégrale prend la forme $\frac{0}{0}$, mais la véritable valeur (I, 451) est lx.

Différentes méthodes d'intégration.

7. Lorsque la seule inspection d'une différentielle n'en fait pas connaître l'intégrale, on doit pour la trouver recourir à des artifices dont le choix est suggéré par l'habitude du calcul, mais qui, dans le plus grand nombre des cas, se rattachent à un petit nombre de principes simples qu'il importe de connaître.

8. Une première méthode, celle d'intégration par décomposition, consiste à partager la différentielle considérée en plusieurs autres plus simples dont on réunit ensuite les intégrales.

Cette méthode se justifie d'elle-même : nous aurons à en faire de nombreuses applications; bornons-nous à donner ici quelques exemples simples.

On a

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sin} x,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x - \cot x.$$

9. Une autre méthode, dite *d'intégration par substitution*, consiste à exprimer la différentielle proposée à l'aide d'une variable nouvelle choisie de manière à en simplifier l'expression.

Soit $\varphi(x)\,dx$ la différentielle donnée. Posons $x = f(z)$, z étant la variable que l'on veut substituer à x; on aura

$$dx = f'(z)\,dz,$$
$$\varphi(x)\,dx = \varphi[f(z)]f'(z)\,dz,$$

et si l'on peut intégrer $\varphi[f(z)]f'(z)\,dz$, en remplaçant dans le résultat z par sa valeur en x, on obtiendra l'intégrale de $\varphi(x)\,dx$. La différentielle d'une fonc-

tion reste la même en effet, quelle que soit la variable à l'aide de laquelle on l'exprime.

Nous nous bornerons ici, pour cette méthode comme pour la précédente, à en indiquer quelques applications choisies parmi les plus simples.

En posant $1 + lx = z$, on a

$$\int \frac{dx}{x}\sqrt{1+lx} = \int dz\sqrt{z} = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+lx)^{\frac{3}{2}}.$$

En posant $x = \cos z$, on a

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^2 z\, dz,$$

et par conséquent (8)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\cos^2 z\, dz = -\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin 2z = -\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Si l'on pose $e^x = y$, on a

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arc\,tang} y = \operatorname{arc\,tang} e^x.$$

10. Les deux méthodes précédentes peuvent souvent être réunies et successivement appliquées à la recherche d'une même intégrale.

Considérons par exemple la différentielle

$$\frac{dx}{\cos 2x};$$

on a

$$\frac{dx}{\cos 2x} = \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1 - \operatorname{tang}^2 x},$$

et en posant $\operatorname{tang} x = z$,

$$\frac{dx}{\cos 2x} = \frac{dz}{1-z^2} = \frac{dz}{2}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right);$$

donc

$$\int \frac{dx}{\cos 2x} = \int \frac{dz}{2(1+z)} + \int \frac{dz}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

par conséquent

$$\int \frac{dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\operatorname{tang} x}{1-\operatorname{tang} x} = \frac{1}{2}\, l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

11. La méthode dite d'*intégration par partie* est fondée sur la formule

$$d\,uv = u\,dv + v\,du,$$

dont on déduit évidemment

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

et par conséquent

$$(1) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Si donc on sait intégrer la différentielle $v\,du$, on pourra, par cela même, intégrer $u\,dv$. Une différentielle étant donnée, on pourra par conséquent, pour la transformer, la décomposer en deux facteurs dont l'un soit intégrable immédiatement, et, après l'avoir mise ainsi sous la forme $u\,dv$, on appliquera la formule (1) qui ramènera la détermination à celle de l'intégrale de $v\,du$. L'habileté du calculateur consiste à choisir de la manière la plus avantageuse les deux facteurs dans lesquels il décompose la différentielle donnée.

Nous nous bornerons, comme nous l'avons fait pour les méthodes précédentes, à donner ici quelques exemples.

Soit à chercher

$$\int x^3 lx\,dx.$$

Posons

$$x^3\,dx = d\,\frac{x^4}{4} = dv,$$

$$lx = u,$$

la formule (1) donne

$$\int x^3 lx\,dx = \frac{x^4}{4}\,lx - \int \frac{x^4}{4}\,\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\,lx - \frac{x^4}{16}.$$

Soit encore à chercher

$$\int x \arcsin x\,dx.$$

Posons

$$x\,dx = d\,\frac{x^2}{2} = dv,$$

$$\arcsin x = u,$$

la formule (1) donne

$$\int x\,dx \arcsin x = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2\,dx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire (9)

$$\int x\,dx \arcsin x = \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\arccos x - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}.$$

Considérons enfin l'intégrale

$$\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}.$$

Posons

$$\frac{dx}{(1+x)^2} = d\left(\frac{-1}{1+x}\right) = dv,$$

$$xe^x = u,$$

la formule (1) donne

$$\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = -\frac{xe^x}{1+x} + \int dx\,e^x = \frac{-xe^x}{1+x} + e^x. \quad \frac{e^x}{1+x}$$

12. On peut généraliser de la manière suivante le procédé d'intégration par partie. Supposons que dans une fonction $\varphi(x)$ de la variable x on remplace d'une manière arbitraire cette lettre x par l'une ou l'autre des lettres x' et x'', de manière à transformer $\varphi(x)$ en une fonction $f(x', x'')$ qui reprendra la forme primitive $\varphi(x)$ lorsqu'on supposera $x' = x'' = x, \ldots$; l'introduction des lettres x' et x'' peut être faite d'ailleurs d'une manière entièrement arbitraire. On aura

$$(2) \qquad \int \varphi(x)\,dx = \int f(x', x'')\,dx' - \int dx \left[\frac{d}{dx''}\int f(x', x'')\,dx'\right]_{x'=x''=x}.$$

La première intégration indiquée dans le second membre est relative à x' seulement, et l'on y traite x'' comme une constante; quant à la seconde, il faut d'abord, pour l'effectuer, former $\int f(x', x'')\,dx'$ en considérant x'' comme une constante, prendre la dérivée du résultat par rapport à x'' et remplacer ensuite x' et x'' tous deux par x avant d'intégrer par rapport à cette lettre.

Il est bien entendu d'ailleurs que dans la première intégrale x' et x'', après l'opération, sont tous deux remplacés par x.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que les deux membres de l'équation (2) ont même dérivée par rapport à x; la dérivée du premier est $\varphi(x)$. Pour calculer celle du second, remarquons d'abord que l'intégrale

$$\int f(x', x'')\,dx',$$

dans laquelle on fait après l'intégration $x' = x'' = x$, peut être regardée comme une fonction de x' et de x'', qui l'une et l'autre ont leur dérivée par rapport à x

égale à l'unité; on a donc

$$\frac{d}{dx}\int f(x', x'')\,dx' = \frac{d}{dx'}\int f(x', x'')\,dx' + \frac{d}{dx''}\int f(x', x'')\,dx'$$
$$= f(x', x'') + \frac{d}{dx''}\int f(x', x'')\,dx',$$

x' et x'' devant toujours être remplacés par x; mais la dérivée du second terme du second membre de (2) est précisément

$$-\frac{d}{dx''}\int f(x', x'')\,dx',$$

et par conséquent la dérivée du second membre de (2) se réduit à $f(x', x'')$, c'est-à-dire à $\varphi(x)$.

13. On peut simplifier l'expression écrite du théorème en convenant de ne distinguer les lettres x' et x'' de la lettre x qu'elles remplacent que dans les opérations relatives à x' seul ou à x'' seul, et se dispenser alors d'indiquer qu'on doit dans le résultat remplacer x' et x'' par x.

La formule (2) s'écrira ainsi

$$(3)\qquad \int f(x', x'')\,dx = \int f(x', x'')\,dx' - \int dx\,\frac{d}{dx''}\left[\int f(x', x'')\,dx'\right],$$

si l'on suppose

$$f(x', x'') = F'(x')\,\psi(x'').$$

F' étant la dérivée d'une fonction désignée par F, la formule ne diffère pas de celle qui indique l'intégration par partie.

Quelques sommations réduites à des intégrales.

14. L'intégrale définie

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

est, comme on l'a vu (2), la limite d'une somme d'expressions infiniment petites

$$\varphi(a)\,dx + \varphi(a + dx)\,dx + \varphi(a + 2dx)\,dx + \ldots + \varphi(a + n\,dx)\,dx,$$

le nombre n augmentant lorsque dx diminue, de telle sorte que l'on ait toujours $n\,dx = b - a$.

Cette formule permet de représenter par des intégrales définies certaines sommes qui semblent à première vue se rattacher à des problèmes tout différents.

Soit par exemple à calculer la limite de la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment. Posons $n=\frac{a}{dx}$, et la somme deviendra

$$\frac{dx}{a}+\frac{dx}{a+dx}+\frac{dx}{a+2dx}+\ldots+\frac{dx}{2a},$$

dont la limite est évidemment

$$\int_a^{2a}\frac{dx}{x}=l2a-la=l2.$$

Soit encore la somme

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2},$$

dans laquelle on suppose que le nombre n augmente indéfiniment. Posons

$$n=\frac{1}{dx},$$

la somme devient

$$\left[\frac{dx}{1+(dx)^2}+\frac{dx}{1+(2dx)^2}+\ldots+\frac{dx}{1+[(n-1)dx]^2}+\frac{dx}{1+(ndx)^2}\right].$$

ndx étant par hypothèse égal à l'unité, la limite de cette somme représente l'intégrale

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tang}\,1-\text{arc tang}\,0=\frac{\pi}{4}.$$

Cherchons enfin la limite de la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

Posons

$$n=\frac{1}{dx},$$

cette somme devient

$$dx+\frac{dx}{\sqrt{1-dx^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-(2dx)^2}}+\ldots+\frac{dx}{\sqrt{1-[(n-1)dx]^2}},$$

et puisque $(n-1)dx$ est comme ndx, égal à l'unité à la limite, cette somme

représente l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Sur les fonctions hyperboliques.

15. Il sera utile d'indiquer, en terminant ce premier Chapitre, la définition de quelques fonctions dont l'usage, sans apporter aucune ressource essentiellement nouvelle, fera ressortir dans diverses occasions des analogies qu'une autre notation laisserait inaperçues.

On a trouvé (1, 367)

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

on en conclut

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos x\sqrt{-1} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}, \\ \sin x\sqrt{-1} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

$\cos x\sqrt{-1}$, qui est réel, est appelé souvent le *cosinus hyperbolique* de x et l'on écrit

$$(3)\qquad \cos \text{hyp.}\, x = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cos x\sqrt{-1}.$$

Le produit $\frac{1}{\sqrt{-1}} \sin x\sqrt{-1}$ se nomme de même le *sinus hyperbolique* de x, et l'on a

$$(4)\qquad \sin \text{hyp.}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin x\sqrt{-1}.$$

Le quotient $\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ se nomme, par une convention analogue, la *tangente hyperbolique* de x, et l'on a

$$(5)\qquad \text{tang hyp.}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \tang x\sqrt{-1}.$$

Ces définitions, en montrant l'analogie des fonctions nouvelles avec les lignes trigonométriques, donnent l'explication de leurs principales propriétés. On a par

exemple évidemment, comme on peut d'ailleurs le vérifier directement,

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos^2 \text{hyp.}\, x - \sin^2 \text{hyp.}\, x = 1, \\ \cos \text{hyp.}\,(x+y) = \cos \text{hyp.}\, x \cos \text{hyp.}\, y + \sin \text{hyp.}\, x \sin \text{hyp.}\, y, \\ \sin \text{hyp.}\,(x+y) = \sin \text{hyp.}\, x \cos \text{hyp.}\, y + \sin \text{hyp.}\, y \cos \text{hyp.}\, x. \end{cases}$$

16. La dénomination de fonctions *hyperboliques* a son origine dans l'analogie du cercle avec l'hyperbole équilatère. Si l'on considère, en effet, l'hyperbole équilatère dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$y^2 - x^2 = 1,$$

et en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\omega},$$

le secteur S, compris entre la courbe et les rayons issus du centre faisant de part et d'autre avec l'axe l'angle ω, a pour différentielle (I, **116**)

$$dS = \rho^2 d\omega = \frac{d\omega}{\cos 2\omega},$$

et par conséquent (**10**)

$$S = \int_{-\omega}^{\omega} \frac{d\omega}{2\cos 2\omega} = \frac{1}{2}\, l \tang\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right);$$

par conséquent

$$\tang\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = \frac{1 + \tang\omega}{1 - \tang\omega} = e^{2S},$$

et

$$\tang\omega = \frac{e^S - e^{-S}}{e^S + e^{-S}} = \tang \text{hyp.}\, S.$$

17. Les fonctions inverses des fonctions hyperboliques analogues aux fonctions inverses des fonctions circulaires se transforment dans celles-ci lorsque la variable devient imaginaire.

Si l'on pose

$$u = \cos \text{hyp.}\, x,$$
$$v = \sin \text{hyp.}\, x,$$
$$w = \tang \text{hyp.}\, x,$$

on en conclut

$$x = \text{sect.}\,(\cos \text{hyp.}\, u),$$
$$x = \text{sect.}\,(\sin \text{hyp.}\, v),$$
$$x = \text{sect.}\,(\tang \text{hyp.}\, w).$$

On peut d'ailleurs aisément exprimer ces fonctions sans recourir à aucune notation

nouvelle. Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire, en effet,

$$u = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$v = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$w = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

En les résolvant par rapport à x, on a

$$x = \text{sect. cos hyp. } u = l\left(u \pm \sqrt{u^2 - 1}\right),$$

$$x = \text{sect. sin hyp. } v = l\left(v + \sqrt{1 + v^2}\right),$$

$$x = \text{sect. tang hyp. } w = \frac{1}{2} l \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Mais l'emploi des notations nouvelles a, comme nous l'avons dit, l'avantage de mettre en évidence certaines analogies. On a, par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin } x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \text{sect. sin hyp. } x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \text{sect. cos hyp. } x,$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tang } x,$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \text{sect. tang hyp. } x,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arc séc } x,$$

$$-\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = l\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = \text{sect. séc hyp. } x,$$

$$-\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arc coséc } x,$$

$$-\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = l\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) = \text{sect. coséc hyp. } x.$$

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

18. Pour intégrer les différentielles de la forme $\frac{F(x)}{\varphi(x)}dx$, où $F(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions entières de x, il faut en général décomposer la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ en une somme de fractions plus simples dont la détermination exige le calcul préalable des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Lorsque l'on a, en effet, obtenu par la division la partie entière d'une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, la fraction restante, dans laquelle le degré du numérateur est moindre que celui du dénominateur, peut se décomposer en une somme de fractions simples de quatre formes différentes :

Celles qui correspondent à une racine réelle simple et qui sont de la forme $\frac{A}{x-a}$;

Celles qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées simples et qui sont de la forme $\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]}$;

Celles qui correspondent à une racine réelle multiple et qui sont de la forme $\frac{B}{(x-a)^p}$;

Celles enfin qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées multiples et qui sont de la forme $\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}$.

Quoique la manière de faire cette décomposition soit exposée dans les Traités d'Algèbre, il n'est pas inutile de la rappeler ici.

19. Supposons d'abord les n racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ inégales, et soit

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-h)(x-l).$$

Posons

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

En multipliant les deux membres par $\varphi(x)$, on a

$$(2) \qquad F(x) = A\frac{\varphi(x)}{x-a} + B\frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots + L\frac{\varphi(x)}{x-l}.$$

Si dans les deux membres de cette équation, qui doit être identique, on suppose $x = a$, tous les termes du second membre disparaissent à l'exception du premier qui se réduit à $A\varphi'(a)$, et l'on a

$$F(a) = A\varphi'(a); \tag{3}$$

donc

$$A = \frac{F(a)}{\varphi'(a)}.$$

On aura de même

$$B = \frac{F(b)}{\varphi'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{\varphi'(c)}, \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{\varphi'(l)}, \tag{4}$$

et ces valeurs rendent l'équation (2) identique, car les deux membres qui sont des polynômes entiers en x, de degré $n-1$ au plus, sont égaux pour n valeurs de la variable.

Si a et b sont deux racines imaginaires conjuguées $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, les formules (4) donnent pour A et B des expressions imaginaires conjuguées $P + Q\sqrt{-1}$ et $P - Q\sqrt{-1}$, et la somme des deux fractions correspondantes est

$$\frac{P + Q\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{P - Q\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{2P(x-\alpha) - 2Q\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

20. La méthode est évidemment en défaut lorsque l'équation $\varphi(x) = 0$ admet des racines multiples, et la forme (1) devient impossible; car en supposant, par exemple, la racine a multiple, le second membre de (2) deviendrait nul pour $x = a$, tandis que le premier se réduit à $F(a)$ qui est différent de zéro. Soit p le degré de multiplicité de la racine a, et

$$\varphi(x) = (x-a)^p \psi(x),$$

on posera

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{F_1(x)}{\psi(x)}. \tag{5}$$

Pour déterminer $A_1, A_2, \ldots, A_p$, en multipliant les deux membres par $\varphi(x)$, nous aurons

$$F(x) = A_1\psi(x)(x-a)^{p-1} + A_2\psi(x)(x-a)^{p-2} + \ldots + A_p\psi(x) + F_1(x)(x-a)^p. \tag{6}$$

En faisant $x = a$ dans l'équation (6) et dans les $(p-1)$ premières dérivées, on formera p équations du premier degré dont la première fera connaître A_p, la seconde $A_{p-1}, \ldots$, et la dernière enfin A_1. La méthode s'applique au cas où la racine est imaginaire, mais il est plus simple, dans ce cas, de chercher directement les

fractions simples qui correspondent aux deux racines conjuguées. Si l'on suppose

$$\varphi(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p \psi(x),$$

on posera

$$(7) \qquad \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \ldots + \frac{A_p x + B_p}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} + \frac{F_1(x)}{\psi(x)}.$$

En multipliant par $\varphi(x)$ les deux membres de cette équation, on a

$$(8) \quad F(x) = (A_1 x + B_1)\psi(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1} + (A_2 x + B_2)\psi(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-2} + \ldots$$
$$+ (A_p x + B_p)\psi(x) + F_1(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p,$$

et les coefficients A_p, B_p, A_{p-1}, $B_{p-1}, \ldots$, A_1, B_1 se détermineront successivement en faisant $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ dans l'équation (8) et dans les $p-1$ premières dérivées et égalant les parties réelles des deux membres et leurs parties imaginaires.

On peut d'ailleurs, pour effectuer la décomposition d'une fraction rationnelle en fraction simple, employer plusieurs méthodes qu'il est inutile d'exposer ici; bornons-nous à rappeler celle qui est fondée sur le calcul des résidus qui a été indiquée (I, 441).

21. L'intégration des fractions rationnelles se trouve réduite, par ce qui précède, à celle de quatre différentielles plus simples. On a

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,l(x-a),$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}.$$

Ces deux formules sont évidentes, et les différentielles qui y figurent sont du nombre de celles qui s'intègrent directement.

Pour intégrer la troisième fraction type

$$\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx,$$

posons

$$x - \alpha = z,$$
$$dx = dz,$$

on aura

$$\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{Az + A\alpha + B}{z^2+\beta^2}\,dz = \frac{Az\,dz}{z^2+\beta^2} + \frac{(A\alpha+B)\,dz}{z^2+\beta^2}.$$

On a évidemment

$$\int \frac{\mathrm{A}\,z\,dz}{z^2+\beta^2} = \frac{\mathrm{A}}{2}\, l(z^2+\beta^2),$$

$$\int \frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\,dz}{z^2+\beta^2} = \frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{\beta},$$

et par conséquent

$$\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{\mathrm{A}}{2}\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Considérons enfin la quatrième différentielle élémentaire

$$\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx.$$

Si l'on pose $x-\alpha=z$, elle devient

$$\frac{\mathrm{A}z+\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{(z^2+\beta^2)^n}\,dz.$$

On peut la partager en deux autres

$$\frac{\mathrm{A}z\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} + (\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

On a évidemment

$$\int \frac{\mathrm{A}z\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = -\frac{\mathrm{A}}{2(n-1)}\,\frac{1}{(z^2+\beta^2)^{n-1}},$$

et

$$(9)\qquad \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz\,(\beta^2+z^2-z^2)}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Mais l'intégration par partie donne

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \int z\cdot\frac{z\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = -\int z\,.\,d\left[\frac{1}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{z}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}},$$

et l'équation (9) devient, si l'on réunit les deux termes semblables,

$$(10)\qquad \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{(2n-3)}{2\beta^2(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{z}{2(n-1)\beta^2}\,\frac{1}{(z^2+\beta^2)^{n-1}};$$

cette formule ramène l'intégrale cherchée à une autre de même forme dans laquelle l'exposant n est remplacé par $n-1$. La même formule de réduction per-

mettra de substituer à n les exposants successifs $n-2$, $n-3, \ldots$, et enfin l'unité; le Problème sera alors résolu, car on a

$$\int \frac{dz}{z^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \text{arc tang} \frac{z}{\beta}.$$

La même méthode de réduction s'applique évidemment à $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$.

22. L'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^n}$ peut aussi s'obtenir par une méthode indirecte qu'il sera utile de mentionner.

On a évidemment

$$\int \frac{dx}{\beta+x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc tang} \frac{x}{\sqrt{\beta}},$$

et cette formule équivaut à

$$\frac{1}{\beta+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc tang} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right).$$

On en déduit, en prenant n fois la dérivée de chaque membre par rapport à β,

$$\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots(n-1)}{(\beta+x^2)^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc tang} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right),$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{(\beta+x^2)^n} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{arc tang} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right).$$

23. Appliquons la méthode à quelques exemples.

Soit à calculer

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^p x},$$

p désignant un nombre entier quelconque.

On trouve aisément

$$\frac{1}{x(a+bx)^p} = \frac{1}{a^p x} - \frac{b}{a^{p+1}}\left[\frac{a^p}{(a+bx)^p} + \frac{a^{p-1}}{(a+bx)^{p-1}} + \ldots + \frac{a}{a+bx}\right],$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^p} = -\frac{1}{a^p} l \frac{a+bx}{x} + \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{1}{(p-k)a^k(a+bx)^{p-k}}.$$

Soit encore

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2},$$

on a

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)} = \frac{dx}{c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c}},$$

et (21)

$$(11) \qquad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \text{arc tang} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Cette formule, il faut le remarquer, est applicable à tous les cas, et, lors même qu'elle est compliquée d'imaginaires, elle peut donner, par les transformations connues, l'expression réelle de l'intégrale.

Il est plus simple pourtant, lorsque $4ac - b^2$ est négatif, de décomposer le trinôme $a + bx + cx^2$ en ses deux facteurs réels et la fraction à intégrer en fractions simples correspondantes. On trouve ainsi

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

L'identité de ces formules avec la formule (11) est aisée à établir. On trouve aussi, en adoptant les notations indiquées (16),

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{-2}{\sqrt{b^2-4ac}} \text{sect. cot hyp.} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}},$$

et sous cette forme l'analogie des deux cas devient plus évidente.

Si dans les formules précédentes on suppose $a = 1$, $c = 1$, $b = 2\cos\varphi$, on trouve

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi} \text{arc tang} \frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

24. Soit à intégrer

$$\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n}},$$

m et n étant deux nombres entiers tels, que $2n$ soit plus grand que m. Les racines toutes inégales de l'équation

$$x^{2n}+1=0$$

sont données par la formule

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k-1)}{2n}\pi,$$

où il faut attribuer à k toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n. On a, par conséquent,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}} + \frac{B_k}{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}},$$

où l'on a (19)

$$A_k = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right],$$

$$B_k = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} - \sqrt{-1}\sin(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} - \sqrt{-1}\sin\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} - \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right],$$

et, en réunissant les deux fractions écrites sous le signe $\sum$,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\left[x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] - \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n}}{\left[x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]^2 + \sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}},$$

et par conséquent (21)

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} \cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\, l\left[1 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + x^2\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\,\text{arc tang}\,\frac{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

On trouvera de même, et en supposant toujours $m < 2n$,

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}[(-1)^{m+1} l(1+x) - l(1-x)]$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{2n} \sum_{k=1}^{k=n-1} \cos\frac{km\pi}{n}\, l\left(1 + 2x\cos\frac{k\pi}{n} + x^2\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin\frac{km\pi}{n} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + \cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1} l(1+x) - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} \cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\, l\left[1 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} + x^2\right]$$
$$+ \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} \sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1} l(1-x) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} \cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\, l\left[1 + 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} + x^2\right]$$
$$+ \frac{2(-1)^{m+1}}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} \sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}}.$$

Simplification de la méthode dans des cas particuliers.

25. La méthode générale suffit dans tous les cas pour intégrer une différentielle rationnelle, mais il est souvent plus simple d'éviter la décomposition en fractions simples et d'opérer directement sur la différentielle proposée.

Soit par exemple l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}.$$

En posant $x^2 = z$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} z,$$

et par conséquent

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \operatorname{arc\,tang} x^2$$

26. On peut, dans un grand nombre de cas, appliquer des formules de réductions successives analogues à celles qui nous ont permis de calculer

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^n}.$$

Considérons la différentielle

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p,$$

qui, lorsque m, n, p sont des nombres entiers positifs ou négatifs, appartient à la classe des différentielles rationnelles qui nous occupe actuellement. Il existe pour la réduire dans tous les cas des formules qui, lors même où elle est rationnelle, permettent de l'intégrer plus simplement que par l'application des méthodes générales. On a

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \int x^{m-n}\,x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p,$$

et en remarquant que $x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ est la différentielle de $\frac{1}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}$, on a, en intégrant par partie,

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

Remplaçant dans le second membre $(a+bx^n)^{p+1}$ par $(a+bx^n)^p\,a + (a+bx^n)^p\,bx^n$ et faisant passer dans le premier membre l'intégrale semblable à celle qui s'y trouve déjà, on trouve

$$(1)\qquad \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+np)\,b} - \frac{m-n}{m+np}\,\frac{a}{b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,dx.$$

On a aussi évidemment

$$(2)\qquad \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = a\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1},$$

et en appliquant à la seconde intégrale du second membre la formule de réduction (1), on trouve

$$(3)\qquad \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np} + \frac{anp}{m+np}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Les deux formules (1) et (3) résolues par rapport à l'intégrale qui figure dans

le second membre donnent, par un simple changement de lettres,

$$(4)\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{ma} - (m+n+np)\frac{b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\,dx,$$

$$(5)\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+n(p+1)}{an(p+1)}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

Si l'on applique les formules de réduction (1) et (3) à l'intégrale qui figure dans les seconds membres des formules (4) et (5), on trouve

$$(6)\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p - \frac{bnp}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

$$(7)\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{m-n}{bn(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}.$$

Les applications de ces formules sont extrêmement nombreuses.

27. Supposons d'abord $n=1$, en posant $a+bx=z$, on aura

$$(8)\qquad \int \frac{z^p\,dx}{x^{m+1}} = -\frac{z^{p+1}}{amx^m} + (p-m+1)\frac{b}{am}\int \frac{z^p\,dx}{x^m},$$

et cette formule, dans laquelle la seule valeur zéro est interdite à m, permettra de simplifier le calcul d'un grand nombre d'intégrales.

On a, par exemple,

$$(9)\qquad \int \frac{dx}{x^{m+1}z} = -\frac{1}{amx^m} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^m z},$$

et, en remarquant que

$$\int \frac{dx}{xz} = -\frac{1}{a}\,l\,\frac{z}{x},$$

on en déduit

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = \frac{b}{a^2}\,l\,\frac{z}{x} - \frac{1}{ax},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z} = -\frac{b^2}{a^3}\,l\,\frac{z}{x} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{2ax^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z} = \frac{b^3}{a^4}\,l\,\frac{z}{x} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{1}{3ax^3},$$

$$\int \frac{dx}{x^5 z} = -\frac{b^4}{a^5}\,l\,\frac{z}{x} + \frac{b^3}{a^4 x} - \frac{b^2}{2a^3x^2} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{1}{4ax^4},$$

$$\int \frac{dx}{x^6 z} = \frac{b^5}{a^6}\,l\,\frac{z}{x} - \frac{b^4}{a^5 x} + \frac{b^3}{2a^4x^2} - \frac{b^2}{3a^3x^3} + \frac{b}{4a^2x^4} - \frac{1}{5ax^5},$$

et ainsi de suite.

Lorsque l'exposant $m+1$ du dénominateur se réduit à l'unité, la formule (8), dans laquelle figurent des termes infinis, devient illusoire. Pour réduire l'intégrale

$$\int \frac{z^p\,dx}{x},$$

on l'écrira de la manière suivante

$$(10)\qquad \int \frac{z^p\,dx}{x} = \int \frac{z^{p-1}(a+bx)}{x}\,dx = \frac{z^p}{p} + a\int \frac{z^{p-1}\,dx}{x},$$

et par l'application répétée de cette formule l'exposant p sera réduit à l'unité.

Si l'on y change p en $-p$, on en déduit, en résolvant par rapport à l'intégrale qui figure au second membre,

$$(11)\qquad \int \frac{dx}{xz^{p+1}} = -\frac{1}{apz^p} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz^p}.$$

28. L'équation (8) donne d'ailleurs, en y supposant $n=1$, en changeant p en $-p$ et m en $-m$, la formule de réduction plus générale

$$(12)\qquad \int \frac{dx}{x^{m+1}z^p} = \frac{-1}{(m+p)x^m z^p} + \frac{a^p}{m+p}\int \frac{dx}{x^{m+1}z^{p+1}};$$

d'où l'on déduit

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}z^{p+1}} = \frac{1}{apx^m z^p} + \frac{m+p}{ap}\int \frac{dx}{x^{m+1}z^p}.$$

29. Si nous supposons $n=2$, en faisant $a+bx^2=z$, nous aurons

$$(13)\qquad \int \frac{dx}{z^{p+1}} = \frac{x}{2apz^p} + \frac{2p-1}{2ap}\int \frac{dx}{z^p}.$$

Cette formule, dans le cas de $a=b$, ne diffère pas de celle qui a été donnée (**21**); on en déduit

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{2az} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{x}{4az^2} + \frac{3x}{8a^2 z} + \frac{3}{8a^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{x}{6az^3} + \frac{5x}{24a^2 z^2} + \frac{5x}{16a^2 z} + \frac{5}{16a^3}\int \frac{dx}{z}.$$

30. On a aussi

$$(14)\qquad \int \frac{x^{n+1}\,dx}{z^{p+1}} = -\frac{x^n}{2bpz^p} + \frac{n}{2bp}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{z^p}$$

et

$$(15)\qquad \int \frac{x^{n+1}\,dx}{z} = \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-1}(a+bx^2)\,dx}{a+bx^2} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{z} = \frac{x^n}{bn} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{z},$$

On en déduira

$$\int \frac{x^2\,dx}{z} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{z} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{z} = \frac{x^7}{7b} - \frac{ax^5}{5b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^4}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{z^2} = -\frac{x}{2bz} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z^2} = \frac{ax}{2b^2z} + \frac{x}{b^2} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite. On a d'ailleurs

$$\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\text{arc tang}\,x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et, dans le cas où le coefficient de x^2 est négatif,

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\text{sect. tang hyp.}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

31. On a évidemment

$$\int \frac{x^{n-2}\,dx}{z^{p-1}} = \int \frac{x^{n-2}(a+bx^2)}{z^p}\,dx = a\int \frac{x^{n-2}\,dx}{z^p} + b\int \frac{x^n\,dx}{z^p};$$

par conséquent,

$$\int \frac{x^n\,dx}{z^p} = \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{z^{p-1}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{z^p}. \tag{16}$$

On en déduit, en ayant égard à (13),

$$\int \frac{x^2\,dx}{z^3} = -\frac{x}{4bz^2} + \frac{x}{8abz} + \frac{1}{8ab}\int \frac{dx}{z};$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z^3} = \frac{ax}{4b^2z^2} - \frac{5x}{8b^2z} + \frac{3}{8b^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{z^4} = -\frac{x}{6bz^3} + \frac{x}{24abz^2} + \frac{x}{16a^2bz} + \frac{1}{16a^2b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z^4} = \frac{ax}{6b^2z^3} - \frac{7x}{24b^2z^2} + \frac{x}{16ab^2z} + \frac{1}{16ab^2}\int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

32. On a enfin, z désignant toujours le binôme $a + bx^2$,

$$(17)\qquad \int \frac{dx}{x^{n+1} z^{p+1}} = \frac{-1}{anx^n z^p} - \frac{b(n+2p)}{an} \int \frac{dx}{x^{n-1} z^{p+1}};$$

on en déduit

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^4 z} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2 x} + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^6 z} = -\frac{1}{5ax^5} + \frac{b}{3a^2 x^3} - \frac{b^2}{a^4 x} - \frac{b^3}{a^3} \int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

Et en ayant égard à (13),

$$\int \frac{dx}{x^2 z^2} = -\frac{bx}{2a^2 z} - \frac{1}{a^2 x} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^4 z^2} = \frac{b^2 x}{2a^3 z} - \frac{1}{3a^2 x^3} + \frac{2b}{a^3 x} + \frac{5b^2}{2a^3} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^6 z^2} = -\frac{b^3 x}{2a^4 z} - \frac{1}{5a^2 x^5} + \frac{2b}{3a^3 x^3} - \frac{3b^2}{a^4 x} - \frac{7b^3}{2a^4} \int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite;

$$\int \frac{dx}{x^2 z^3} = -\frac{bx}{4a^2 z^2} - \frac{7bx}{8a^3 z} - \frac{1}{a^3 z} - \frac{15b}{8a^3} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^4 z^3} = \frac{b^2 x}{4a^3 z^2} + \frac{11b^2 x}{8a^4 z} + \frac{3b}{a^4 x} - \frac{1}{3a^3 x^3} + \frac{35b^2}{8a^4} \int \frac{dx}{z},$$
$$\int \frac{dx}{x^6 z^3} = -\frac{b^3 x}{4a^4 z^2} - \frac{15b^3 x}{8a^5 z} - \frac{6b^2}{a^5 x} + \frac{b}{a^4 x^3} - \frac{1}{5a^3 x^5} - \frac{63b^3}{8a^5} \int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

33. Si dans les formules (7) on suppose $n = 3$, on a, en posant $a + bx^3 = z$,

$$(18)\qquad \int \frac{x^n\, dx}{z^{p+1}} = \frac{x^{n+1}}{3apz^p} - \frac{n - 3p + 1}{3ap} \int \frac{x^n\, dx}{z^p},$$

$$(19)\qquad \int \frac{dx}{x^n z^{p+1}} = \frac{1}{3apx^{n-1} z^p} + \frac{n + 3p - 1}{3ap} \int \frac{dx}{x^n z^p}.$$

On trouve d'ailleurs directement, par la décomposition en fractions simples, en posant $k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,

$$\int \frac{dx}{z} = \frac{k}{3a} \left(\frac{1}{2} l \frac{(x+k)^2}{x^2 - kx + k^2} + \sqrt{3} \text{ arc tang } \frac{x\sqrt{3}}{2k - x} \right),$$
$$\int \frac{x\, dx}{z} = -\frac{1}{3bk} \left(\frac{1}{2} l \frac{(x+k)^2}{x^2 - kx + k^2} - \sqrt{3} \text{ arc tang } \frac{x\sqrt{3}}{2k - x} \right),$$
$$\int \frac{x^2\, dx}{z^{p+1}} = -\frac{1}{3bpz^p},$$

et l'on déduit des formules de réduction

$$\int \frac{x^3\,dx}{z} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int \frac{x\,dx}{z},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{z} = \frac{1}{3b^2}(z - al z),$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{z} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{z} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{x\,dx}{z},$$

et ainsi de suite;

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{3az} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x\,dx}{z^2} = \frac{x^2}{3az} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\,dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{z^2} = -\frac{1}{3bz},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{z^2} = -\frac{x}{3bz} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

On a aussi

$$\int \frac{dx}{xz} = \frac{1}{3a}\, l\,\frac{x^3}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x\,dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{3a^2}\, l\,\frac{z}{x^3},$$

$$\int \frac{dx}{x^5 z} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{a^2 x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{x\,dx}{z},$$

et ainsi de suite.

34. Si l'on suppose enfin $n = 4$, en posant $a + bx^4 = z$, on aura les formules

de réduction

$$(20)\qquad \int x^n z^p\,dx = \frac{x^{n+1} z^p}{n+1} - \frac{4bp}{n+1}\int x^{n+1} z^{p-1}\,dx,$$

$$(21)\qquad \int \frac{x^n\,dx}{z^{p+1}} = \frac{x^{n+1}}{4apz^p} + \frac{4p-n-1}{4ap}\int \frac{x^n\,dz}{z^p},$$

$$(22)\qquad \int \frac{x^n\,dx}{z^{p+1}} = -\frac{x^{n-3}}{4bpz^p} + \frac{n-3}{4bp}\int \frac{x^{n-4}\,dx}{z^p},$$

$$(23)\qquad \int \frac{x^n\,dx}{z} = \frac{x^{n-3}}{b(n-3)} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{n-4}\,dx}{z},$$

$$(24)\qquad \int \frac{dx}{z^{p+1}} = \frac{x}{4apz^p} + \frac{4p-1}{4ap}\int \frac{dx}{z^p},$$

$$(25)\qquad \int \frac{dx}{x^n z^{p+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^n z^p} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{n-4} z^{p+1}},$$

$$(26)\qquad \int \frac{dx}{xz^{p+1}} = \frac{1}{4apz^p} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz^p}.$$

On trouve d'ailleurs, en supposant $\frac{a}{b}$ positif et posant $\sqrt{\frac{a}{b}} = k$,

$$\int \frac{dx}{z} = \frac{k}{4a\sqrt{2}}\left(l\,\frac{x^2+kx\sqrt{2}+k^2}{x^2-kx\sqrt{2}+k^2} + 2\operatorname{arc\,tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2-x^2}\right),$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{z} = \frac{k^3}{4a\sqrt{2}}\left(l\,\frac{x^2-kx\sqrt{2}+k^2}{x^2+kx\sqrt{2}+k^2} + 2\operatorname{arc\,tang}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2-x^2}\right),$$

et lorsque $\frac{a}{b}$ est négatif, en posant $\sqrt{-\frac{a}{b}} = k'$,

$$\int \frac{dx}{z} = \frac{k'}{4a}\left(l\,\frac{x+k'}{x-k'} + 2\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k'}\right),$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{z} = \frac{k'^3}{4a}\left(l\,\frac{x+k'}{x-k'} - 2\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k'}\right).$$

La formule (24) donnera

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{4az} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{x}{a}\left(\frac{1}{8z^2} + \frac{7}{32az}\right) + \frac{21}{32a^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{x}{a}\left(\frac{1}{12z^3} + \frac{11}{96az^2} + \frac{77}{384a^2z}\right) + \frac{77}{128a^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^5} = \frac{x}{a}\left(\frac{1}{16z^4} + \frac{5}{64az^3} + \frac{55}{512a^2z^2} + \frac{385}{2048a^3z}\right) + \frac{1155}{2048a^4}\int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite;

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2\,dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 z^2} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{bx^3}{4a^2 z} - \frac{5b}{4a^2}\int \frac{x^2\,dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 z^3} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{bx^3}{a^2}\left(\frac{1}{8z^2} + \frac{13}{32az}\right) - \frac{45b}{32a^4}\int \frac{x^2\,dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 z^4} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{bx^3}{a^2}\left(\frac{1}{12z^3} + \frac{7}{32az^2} + \frac{67}{128a^2 z}\right) - \frac{195b}{128a^4}\int \frac{x^2\,dx}{z},$$

et ainsi de suite.

35. Il existe des formules de réduction analogues pour les différentielles dans lesquelles figurent les puissances d'un trinôme.

L'intégrale

$$\int x^{m+1}\,dx\,(a + bx + cx^2)^p$$

peut être réduite à d'autres de même forme dans lesquelles l'exposant de x est moindre.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,x^m(a + bx + cx^2)^p &= mx^{m-1}(a + bx + cx^2)^p + px^m(b + 2cx)(a + bx + cx^2)^{p-1}\\ &= max^{m-1}(a + bx + cx^2)^{p-1} + (m + p)\,bx^m(a + bx + cx^2)^{p-1}\\ &\quad + (m + 2p)\,cx^{m+1}(a + bx + cx^2)^{p-1},\end{aligned}$$

et par conséquent, en posant, pour abréger, $a + bx + cx^2 = z$,

$$x^m z^p = ma\int x^{m-1} z^{p-1}\,dx + (m + p)\,b\int x^m z^{p-1}\,dx + (m + 2p)\,c\int x^{m+1} z^{p-1}\,dx,$$

ou, en résolvant par rapport à l'intégrale qui figure dans le dernier terme du second membre et changeant p en $p + 1$,

$$(27)\qquad \int x^{m+1} z^p\,dx = \frac{x^m z^{p+1}}{c(m + 2p + 2)} - \frac{am}{c(m + 2p + 2)}\int x^{m-1} z^p\,dx - \frac{b(m + p + 1)}{c(m + 2p + 2)}\int x^m z^p\,dx.$$

Si l'on remplace p par $-p - 1$, cette formule devient

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{z^{p+1}} = \frac{x^m}{c(m - 2p)\,z^p} - \frac{a^m}{c(m - 2p)}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{z^{p+1}} - \frac{b(m - p)}{c(m - 2p)}\int \frac{x^m\,dx}{z^{p+1}}.$$

Mais on a

$$a\int \frac{x^{m-1}\,dx}{z^{p+1}} = \int \frac{x^{m-1}(a + bx + cx^2)}{z^{p+1}}\,dx - b\int \frac{x^m}{z^{p+1}}\,dx - c\int \frac{x^{m+1}\,dx}{z^{p+}}.$$

En ayant égard à cette équation et faisant passer dans le premier membre l'intégrale semblable à celle qui s'y trouve déjà, on trouve

$$(28)\qquad \int \frac{x^{m+1}\,dx}{z^{p+1}} = -\frac{x^m}{2cpz^p} + \frac{m}{2cp}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{z^p} - \frac{b}{2c}\int \frac{x^m\,dx}{z^{p+1}}.$$

36. L'intégrale

$$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p}$$

peut elle-même se réduire à une autre de même forme dans laquelle l'exposant p est moindre d'une unité. On a, en effet,

$$(a+bx+cx^2) = c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c},$$

et en posant $x + \frac{b}{2c} = y$, la différentielle prend la forme de celle qui a été traitée (21); la même formule de réduction y est donc applicable et l'on trouve, en remplaçant y par la valeur en fonction de la variable primitive x, et désignant le trinôme $a + bx + cx^2$ par z,

$$\int \frac{dx}{z^{p+1}} = \frac{b+2cx}{pz^p(4ac-b^2)} + \frac{2c(2p-1)}{p(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{z^p}.$$

37. En remplaçant dans la formule (27) m par $-n$, on trouve

$$\int \frac{z^p\,dx}{x^{n-1}} = \frac{z^{p+1}}{c(2p-n+2)x^n} + \frac{an}{c(2p-n+2)}\int \frac{z^p\,dx}{x^{n+1}} - \frac{b(p-n+1)}{c(2p-n+2)}\int \frac{z^p\,dx}{x^n},$$

et en résolvant par rapport à la première des intégrales du second membre,

$$(29)\qquad \int \frac{z^p\,dx}{x^{n+1}} = -\frac{z^{p+1}}{anx^n} + \frac{b(p-n+1)}{an}\int \frac{z^p\,dx}{x^n} + \frac{c(2p-n+2)}{an}\int \frac{z^p\,dx}{x^{n-1}}.$$

L'hypothèse $n = 0$ rendrait les termes du second membre infinis et ne doit pas être faite immédiatement. Mais si l'on multiplie les deux membres par n, on peut supposer ensuite $n = 0$, et l'on a

$$(30)\qquad 0 = -\frac{z^{p+1}}{ax^n} + \frac{b(p+1)}{a}\int z^p\,dx + \frac{2c(p+1)}{a}\int xz^p\,dx.$$

38. L'intégrale

$$\int \frac{z^p\,dx}{x},$$

qui ne peut être réduite par la formule (29), peut l'être de la manière suivante :

$$\int \frac{z^p\,dx}{x} = \int \frac{z^{p-1}(a+bx+cx^2)}{x}\,dx = a\int \frac{z^{p-1}\,dx}{x} + b\int z^{p-1}\,dx + c\int xz^{p-1}\,dx,$$

et en remplaçant la troisième intégrale du second membre par la valeur déduite de (27), où l'on changera d'abord p en $p-1$, il vient

$$\int \frac{dx\,z^p}{x} = \frac{z^p}{2p} + \frac{b}{2}\int z^{p-1}\,dx + a\int \frac{z^{p-1}\,dx}{x}.$$

39. On déduit des formules précédentes, en posant toujours $a+bx+cx^2=z$ et $4ac-b^2=k$,

$$\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2cx+b}{kz} + \frac{2c}{k}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{2cx+b}{k}\left(\frac{1}{2z^2} + \frac{3c}{kz}\right) + \frac{6c^2}{k^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{2cx+b}{k}\left(\frac{1}{3z^3} + \frac{5c}{3kz^2} + \frac{10c^2}{k^2 z}\right) + \frac{20c^3}{k^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^5} = \frac{2cx+b}{k}\left(\frac{1}{4z^4} + \frac{7c}{6kz^3} + \frac{35c^2}{6k^2z^2} + \frac{35c^3}{k^3 z}\right) + \frac{70c^4}{k^4}\int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

On trouve aisément

$$\int \frac{x\,dx}{z} = \frac{1}{2c}\,lz - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{z};$$

on en déduit

$$\int \frac{x^2\,dx}{z} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\,lz + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{z} = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2-ac}{2c^3}\,lz + \frac{3ac-b^2}{2c^3}\,b\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{z} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx^2}{2c^2} + \frac{b^2-ac}{c^3}\,x - \frac{b^2-2ac}{2c^4}\,b\,lz + \frac{2a^2c^2-4abc^2+b^4}{2c^4}\int \frac{dx}{z}.$$

La décomposition en fractions simples donne enfin

$$\int \frac{dx}{xz} = \frac{1}{2a}\,l\,\frac{x^2}{z} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{z};$$

on en déduit

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = -\frac{b}{2a^2} l \frac{x^2}{z} - \frac{1}{ax} + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z} = \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{2ax^2} + \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right) l \frac{x^2}{z} + \left(\frac{3bc}{2a^2} - \frac{b^3}{2a^3}\right) \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z} = -\frac{b^2 - 2ac}{2a^4} bl \frac{x^2}{z} - \frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2 x^2} - \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right) \frac{1}{x} + \frac{2a^2 c^2 - 4ab^2 c + b^4}{2a^4} \int \frac{dx}{z},$$

et ainsi de suite.

L'intégrale $\int \frac{dx}{z}$, à laquelle toutes les autres se trouvent ainsi réduites, a été donnée (**23**). On a

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} &= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{arc tang} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \text{sect. hyp. cot} \frac{2cx + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.\end{aligned}$$

40. On peut former des formules de réduction analogues pour les différentielles dans lesquelles figurent les puissances du trinôme $(a + bx^n + cx^{2n})$.

On a identiquement

$$\begin{aligned}(1)\quad \frac{d}{dx} x^m (a + bx^n + cx^{2n})^p &= mx^{m-1}(a + bx^n + cx^{2n})^p + px^m (nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1})(a + bx^n + cx^{2n})^{p-1} \\ &= max^{m-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{p-1} + (m + np) bx^{m+n-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{p-1} \\ &\quad + (m + 2np) cx^{m+2n-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{p-1}.\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres et posant, pour abréger, $a + bx^n + cx^{2n} = z$,

$$x^m z^p = ma \int x^{m-1} z^{p-1} dx + (m + np) b \int x^{m+n-1} z^{p-1} dx + (m + 2np) c \int x^{m+2n-1} z^{p-1} dx.$$

On en déduit, en remplaçant p par $p + 1$,

$$\begin{aligned}(2)\qquad \int x^{m-1} z^p dx &= \frac{x^m}{am} z^{p+1} - \frac{b[m + n(1 + p)]}{am} \int x^{m+n-1} z^p dx \\ &\quad - \frac{c[m + 2n(1 + p)]}{am} \int x^{m+2n-1} z^p dx,\end{aligned}$$

et en posant $m + 2n = m'$ et $p - 1 = p'$, résolvant par rapport à la seconde

intégrale du second membre et supprimant les accents,

$$(3)\qquad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^{m-2n}}{c(m+2np)} z^{p+1} - \frac{a(m-2np)}{c(m+2np)} \int x^{m-2n-1} z^p\,dx - \frac{b[m+n(p-1)]}{c(m+2np)} \int x^{m-n-1} z^p\,dx.$$

On peut d'ailleurs vérifier directement, par la différentiation des deux membres, les deux formules analogues et plus simples

$$(4)\quad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^m}{m} z^p - \frac{bnp}{m} \int x^{m+n-1} z^{p-1}\,dx - \frac{2cnp}{m} \int x^{m+2n-1} z^{p-1}\,dx,$$

$$(5)\quad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^{m-2n}}{2cn(p+1)} z^{p+1} - \frac{m-2n}{2cn(p+1)} \int x^{m-2n-1} z^{p+1}\,dx - \frac{b}{2c} \int x^{m-n-1} z^p\,dx.$$

L'équation (3), résolue par rapport à la première des intégrales qui figurent dans le second membre, donne

$$\int x^{m-2n-1} z^{p+1}\,dx = \frac{x^{m-2n} z^{p+1}}{m-2np} - \frac{2cn(p+1)}{m-2np} \int x^{m-1} z^p\,dx - \frac{b(p+1)}{m-2np} \int x^{m-n-1} z^p\,dx.$$

Mais on a

$$x^{m-1} z^p = \frac{x^{m-2n-1}}{c}(a + bx^n + cx^{2n}) z^p - \frac{bz^p}{c} x^{m-n-1} - \frac{az^p}{c} x^{m-2n-1}.$$

Remplaçant $x^{m-1} z^p$ par cette valeur dans la première intégrale, posant $m + 2n - 1 = m'$ et $p + 1 = p'$ et supprimant les accents,

$$(6)\qquad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^m}{m-2np+1} z^p + \frac{2anp}{m-2np+1} \int x^{m-1} z^{p-1}\,dx + \frac{bnp}{m-2np+1} \int x^{m+n-1} z^{p-1}\,dx.$$

Si l'on résout par rapport à la seconde intégrale du second membre, en posant $m' + n = m''$ et $p' - 1 = p''$ et supprimant les accents,

$$(7)\quad \int x^{m-1} z^p\,dx = -\frac{x^{m-n}}{bn(p+1)} z^{p+1} + \frac{m+n(2p+1)}{bn(p+1)} \int x^{m-n-1} z^{p+1}\,dx - \frac{2a}{b} \int x^{m-n-1} z^p\,dx.$$

41. Si l'on suppose $n = 2$ et par conséquent $a + bx^2 + cx^4 = z$, on trouvera, à l'aide des formules précédentes, des formules qui permettront de ramener les intégrales $\int \frac{dx}{z^2}$, $\int \frac{dx}{z^3}, \ldots$, à $\int \frac{x^2\,dx}{z}$ et à $\int \frac{dx}{z}$.

Les intégrales $\int \frac{dx}{z}$, $\int \frac{x^2\,dx}{z}$, auxquelles les autres se ramènent, devront être calculées directement par la décomposition en fractions simples.

On a, en posant $m = \frac{b+\sqrt{q}}{2c}$, $n = \frac{b-\sqrt{q}}{2c}$,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{n} - \frac{1}{m}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{m}\right),$$

et si $b^2 - 4ac$ est négatif, en posant $k = \sqrt[4]{\frac{a}{c}}$, $\cos 2\varphi = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{8ck^3\cos\varphi}\left(l\,\frac{x^2+2kx\cos\varphi+k^2}{x^2-2kx\cos\varphi+k^2} + 2\cot\varphi\operatorname{arc\,tang}\frac{2kx\sin\varphi}{k^2-x^2}\right).$$

On a enfin

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,l\,\frac{b+2cx^2-\sqrt{q}}{b+2cx^2+\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{-q}}\operatorname{arc\,tang}\frac{b+2cx^2}{\sqrt{-q}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(m\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{m} - n\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{8kc\cos\varphi}\left(\log\frac{x^2-2kx\cos\varphi+k^2}{x^2+2kx\cos\varphi+k^2} + 2\cot\varphi\operatorname{arc\,tang}\frac{2kx\sin\varphi}{k^2-x^2}\right).$$

Le cas où $b^2 - 4ac = 0$ fait exception, et l'on a

$$\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{x}{2a+bx^2} + \frac{1}{\sqrt{2ab}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2+cx^4} = -\frac{2a}{b(2a+bx^2)},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{2a}{b}\left(\frac{1}{\sqrt{2ab}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{b}{2a}} - \frac{x}{2a+bx^2}\right).$$

Toutes ces formules s'obtiennent par la décomposition en fractions simples, qui n'offre aucune difficulté.

42. Donnons enfin un dernier exemple de transformation simple et élégante. Soit à calculer

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n}.$$

Posons

$$x = \frac{1+z}{1-z},$$

on aura

$$dx = \frac{2\,dz}{(1-z)^2},$$

$$\frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{(-1)^n\,2\,dz\,(1-z)^{2n-2}}{(2)^{2n}\,z^n},$$

et, après avoir développé le numérateur, on intégrera immédiatement la différentielle composée d'une somme de monômes.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES IRRATIONNELLES.

43. Lorsque l'expression d'une différentielle contient des radicaux, il est le plus souvent impossible d'en obtenir l'intégrale. Nous énumérons dans ce chapitre le petit nombre des méthodes qui peuvent y conduire et des cas dans lesquels on peut les appliquer.

Différentielles qui contiennent $(ax+b)^{\frac{1}{q}}$.

44. Lorsque le radical dont la présence rend l'expression irrationnelle porte sur un binôme de la forme $ax+b$, on peut toujours faire disparaître l'irrationnalité par un changement de variable et intégrer ensuite par la méthode exposée dans le chapitre précédent.

Soit, en effet, la différentielle

$$F\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{q}}\right] dx,$$

dans laquelle le signe F désigne une fonction rationnelle de x et de $(ax+b)^{\frac{1}{q}}$; en posant

$$(ax+b)^{\frac{1}{q}} = z,$$

on aura

$$x = \frac{z^q - b}{a},$$

$$dx = q\,\frac{z^{q-1}\,dz}{a};$$

la substitution de z à x rend par conséquent la différentielle rationnelle et permet de l'intégrer.

Il est évident que si l'expression contient plusieurs radicaux portant sur le même binôme $ax+b$, on pourra les réduire au même indice et rentrer ainsi dans le cas précédent.

45. Lorsque la différentielle à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{a+\sqrt{mx+n}}$, on peut la rendre rationnelle et par conséquent intégrable en posant

$$a+\sqrt{mx+n}=z^2,$$
$$mx+n=(z^2-a)^2,$$
$$x=\frac{(z^2-a)^2-n}{m},$$
$$dx=\frac{2z\,dz\,(z^2-a)}{m},$$

et la substitution de ces valeurs rendra la différentielle rationnelle.

On peut évidemment traiter de la même manière toute expression algébrique rendue irrationnelle par la seule présence d'un radical de la forme

$$\sqrt[n]{a+\sqrt[m]{px+q}};$$

on posera

$$a+\sqrt[m]{px+q}=z^n,$$
$$x=\frac{(z^n-a)^m-q}{p},$$
$$dx=\frac{mn}{p}(z^n-a)^{m-1}z^{n-1}\,dz,$$

et la différentielle exprimée en fonction de z deviendra ainsi rationnelle.

Cas où la différentielle contient $\sqrt{a+bx+cx^2}$.

46. Lorsqu'un radical ne porte pas sur un binôme du premier degré, le seul cas étendu dans lequel on sache intégrer l'expression dans laquelle il figure est celui où il se réduit à la racine carrée d'un trinôme du second degré.

On peut toujours intégrer une différentielle de la forme

$$(1)\qquad F(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

le signe F désignant une fonction rationnelle quelconque de x et du radical $\sqrt{a+bx+cx^2}$.

Plusieurs transformations permettent, en effet, de rendre l'expression (1) rationnelle et de l'intégrer par conséquent au moyen des méthodes exposées au chapitre précédent.

Supposons d'abord que sous le radical le coefficient a de x^2 soit positif : on peut le réduire à l'unité en faisant sortir du radical le facteur $\sqrt{a}$. Occupons-nous donc

d'abord de la différentielle

$$F(x, \sqrt{A + Bx + x^2})\, dx.$$

Pour la rendre rationnelle, posons

$$\sqrt{A + Bx + x^2} = x + z;$$

on en déduit

$$A + Bx = 2xz + z^2,$$

$$x = \frac{z^2 - A}{B - 2z},$$

$$dx = -\frac{2(z^2 - Bz + A)\, dz}{(B - 2z)^2},$$

et la substitution de ces valeurs rendra la différentielle rationnelle.

On atteint le même but en posant

$$\sqrt{A + Bx + x^2} = xz + \sqrt{A}.$$

On en déduit, en effet,

$$B + x = 2z\sqrt{A} + xz^2,$$

$$x = \frac{2z\sqrt{A} - B}{1 - z^2},$$

$$dx = 2\,\frac{z^2\sqrt{A} - Bz + \sqrt{A}}{(1 - z^2)^2}\, dz,$$

$$\sqrt{A + Bx + x^2} = \frac{z^2\sqrt{A} - Bz + \sqrt{A}}{1 - z^2}.$$

On doit remarquer toutefois que dans le cas où A est négatif cette transformation a l'inconvénient d'introduire des imaginaires dans le calcul.

Une troisième méthode consiste à décomposer le trinôme $A + Bx + x^2$ en facteurs du premier degré, $(x - \alpha)(x - \beta)$, et à poser

$$\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)z;$$

on en déduit

$$x - \beta = z^2(x - \alpha),$$

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2},$$

$$dx = \frac{2z(\beta - \alpha)}{(1 - z^2)^2}\, dz,$$

$$\sqrt{A + Bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha)z}{1 - z^2}.$$

La différentielle devient donc encore rationnelle. Cette transformation, comme la précédente, introduirait des imaginaires dans le calcul si les racines α et β n'étaient pas réelles.

47. Lorsque le coefficient de x^2 sous le radical est négatif, la différentielle peut être mise sous la forme

$$F(x, \sqrt{A + Bx - x^2})\, dx.$$

On peut la rendre rationnelle en posant

$$\sqrt{A + Bx - x^2} = \sqrt{A} + xz.$$

Lorsque A est négatif, cette transformation introduit des imaginaires; on devra alors remplacer le trinôme par le produit $(\alpha - x)(x - \beta)$ et poser

$$\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)} = (x - \alpha)\, z.$$

Cette transformation le rendra rationnel.

S'il arrivait que A étant négatif les racines α et β fussent imaginaires, les deux méthodes indiquées introduiraient l'une et l'autre des imaginaires qui sont alors inévitables, car le radical $\sqrt{A + Bx - x^2}$ est imaginaire pour toute valeur réelle de x.

48. Nous donnerons quelques exemples des transformations précédentes. Cherchons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} x + x^2}}.$$

Posons, conformément à la première des méthodes indiquées,

$$\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} x + x^2} = x + z;$$

on en déduira

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = \frac{2dz}{\sqrt{C}\left(\frac{B}{C} - 2z\right)},$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{C}}\, l\left(\frac{B}{C} - 2z\right) = -\frac{1}{\sqrt{C}}\, l\left(\frac{B}{C} + 2x - 2\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} x + x^2}\right).$$

En remarquant que $la = -l\frac{1}{a}$ et supprimant une partie constante, cette intégrale

prend la forme

$$(2)\qquad \frac{1}{\sqrt{C}}\, l\left(\frac{B}{2\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{A + Bx + Cx^2}\right).$$

Lorsque C est négatif, la formule est encore applicable, mais elle est compliquée d'imaginaires; on peut la transformer à l'aide des formules (I, 370) ou chercher directement un résultat réel de la manière suivante. On a

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C}}\,\frac{dx}{\sqrt{-\frac{A}{C} - \frac{B}{C}x - x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{-C}\sqrt{-\frac{A}{C} + \frac{B^2}{4C^2} - \left(x + \frac{B}{2C}\right)^2}},$$

et, en posant $x + \frac{B}{2C} = z$, $\frac{B^2 - 4AC}{4C^2} = m^2$,

$$\frac{dz}{\sqrt{-C}\sqrt{m^2 - z^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{arc\,sin} \frac{z}{m}.$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{2Cx + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right).$$

On peut remarquer que la formule (2) équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \text{ sect. hyp. } \sin \frac{2Cx + B}{\sqrt{4AC - B^2}}.$$

Si l'on suppose $A = a^2$, $B = 2a\cos\varphi$ et $C = 1$, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + 2ax\cos\varphi + x^2}} = \log\left(x + a\cos\varphi + \sqrt{a^2 + 2a\cos\varphi + x^2}\right).$$

49. La différentielle

$$\frac{dx}{x\sqrt{A + Bx + Cx^2}}$$

se ramène à la précédente. Si l'on pose $\frac{1}{x} = z$, on a

$$dx = -\frac{dz}{z^2},$$

$$\frac{dx}{x\sqrt{A + Bx + Cx^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}};$$

on en conclut

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{A}}\, l\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{x} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-A}} \operatorname{arc\,sin} \frac{Bx+2A}{x\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Lorsque A est nul, on a

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{Bx+Cx^2}} = -\frac{2\sqrt{Bx+Cx^2}}{Bx}.$$

50. La différentielle

$$\frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$

peut évidemment se ramener à la précédente, il suffit de poser

$$x+\theta = y.$$

Si l'on fait

$$A' = A - B\theta + C\theta^2,$$
$$B' = B - 2C\theta,$$

on aura

$$\int \frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{A'}} \log\left(\frac{\sqrt{A'}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{x+\theta} + \frac{B'}{2\sqrt{A'}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-A'}} \operatorname{arc\,sin} \frac{B'(x+\theta)+2A'}{(x+\theta)\sqrt{B^2-4AC}},$$

et lorsque A′ est égal à zéro

$$\int \frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = -\frac{2\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{B'(x+\theta)}.$$

On a par exemple

$$\int \frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1+\theta x}{x+\theta} = \frac{1}{\sqrt{\theta^2-1}} \text{ sect. hyp. } \cos \frac{1+\theta x}{x+\theta},$$

$$\int \frac{dx}{(x+\theta)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\theta^2-1}} \operatorname{arc\,sin} \frac{1+\theta x}{x+\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \text{ sect. hyp. } \cos \frac{1+\theta x}{x+\theta},$$

et lorsque θ est égal à l'unité, les formules deviennent

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

On trouvera aussi en faisant $\theta = -1$,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

51. Les différentielles rendues irrationnelles par la présence d'une expression de la forme $\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$ rentrent dans la classe précédente. On a, en effet,

$$\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} = \frac{1}{a'x+b'}\sqrt{(ax+b)(a'x+b')}.$$

On peut d'ailleurs les rendre directement rationnelles en posant

$$\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} = z,$$

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^2,$$

$$x = \frac{b'z^2-b}{a-a'z^2},$$

$$dx = \frac{2(ab'-ba')\,z\,dz}{(a-a'z^2)^2},$$

ce qui rend évidemment la différentielle rationnelle.

La même méthode s'applique à toute différentielle rendue irrationnelle par la présence d'une expression de la forme $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$, en posant

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}} = z;$$

on en déduit

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^n,$$

$$x = \frac{b'z^n-b}{a-a'z^n},$$

$$dx = \frac{n(ab'-ba')\,z^{n-1}\,dz}{(a-a'z^n)^2}.$$

Simplification de la méthode précédente.

52. Les transformations que l'on peut faire subir à une même différentielle pour la rendre intégrable sont extrêmement variées, et la réduction à une formule rationnelle n'est pas toujours la méthode la plus simple.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons

$$x = \sin\varphi,$$
$$dx = \cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi;$$

on aura

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\dfrac{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\tang\frac{1}{2}\varphi}} = \log\tang\frac{1}{2}\varphi.$$

53. Soit encore la différentielle

$$\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}}.$$

Posons

$$x = \frac{1-y^2}{2y},$$
$$dx = -dy\,\frac{y^2+1}{2y^2},$$
$$\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} = -2\,\frac{dy}{b+2ay-by^2},$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} = -2\int \frac{dy}{b+2ay-by^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\,\frac{a-by+\sqrt{a^2+b^2}}{a-by-\sqrt{a^2+b^2}}.$$

La différentielle

$$\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}}$$

devient rationnelle par une transformation analogue; en posant

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

on a

$$\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}} = -2\,\frac{dy}{(a+b)+(a-b)y^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\,\frac{\sqrt{a+b}+y\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}-y\sqrt{b-a}}.$$

Si $a=b$, on a

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

54. Considérons enfin la différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{(1+r^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons pour l'intégrer

$$x^2 = y,$$

elle deviendra

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{(1+r^2y)\sqrt{y-y^2}}.$$

En posant

$$\sqrt{y-y^2} = yu,$$

l'intégrale deviendra

$$-\int\frac{du}{1+r^2+u^2} = \frac{-1}{\sqrt{1+r^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{u}{\sqrt{1+r^2}},$$

et l'on a par conséquent

$$\int\frac{dx}{(1+r^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Différentielles binômes.

55. On donne le nom de différentielles binômes aux différentielles de la forme

$$x^m\,dx\,(a+bx^n)^p,$$

m, n, p désignant des nombres quelconques positifs ou négatifs dont nous supposerons que l'un au moins ne soit pas entier, car sans cela l'expression serait rationnelle.

La différentielle binôme peut s'intégrer dans deux cas que nous allons faire connaître.

Posons d'abord

$$a+bx^n = z;$$

on en déduit

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

et par conséquent

$$x^m\,dx\,(a+bx^n)^p = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m-n+1}{n}}\frac{dz}{nb}\,z^p$$

Si donc $\frac{m-n+1}{n}$, ou, ce qui revient au même, si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif, l'expression ne contiendra plus d'autre irrationnelle que z^p et pourra être rendue rationnelle comme il a été dit (43). Si l'on a $p = \frac{\alpha}{\beta}$, il suffira de poser $z = y^\beta$.

56. Le second cas d'intégrabilité se déduit du premier; on a, en effet,

$$x^m\,dx\,(a + bx^n)^p = x^{m+np}\,(ax^{-n} + b)^p\,dx.$$

En appliquant à cette seconde forme ce qui a été dit de la première, on voit qu'elle sera intégrable si $\frac{m+np+1}{-n}$ est entier, c'est-à-dire si la somme

$$\frac{m+1}{n} + p$$

est un nombre entier; on devra poser dans ce cas

$$ax^{-n} + b = z.$$

57. Lorsque l'une des conditions d'intégrabilité est satisfaite, il est presque toujours plus élégant d'intégrer la différentielle binôme sans changer de variable, et à l'aide des formules de réduction démontrées (26), qui s'appliquent quels que soient les exposants m, n, p, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

En posant $a + bx^n = z$, on a trouvé

$$(1)\qquad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^{m-n} z^{p+1}}{(m+np)\,b} - \frac{m-n}{m+np}\,\frac{a}{b}\int x^{m-n-1} z^p\,dx.$$

Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier et que n soit positif, l'application répétée de cette formule ramènera l'exposant $m-1$ à la valeur $n-1$, et l'intégration sera alors immédiate, car on a

$$\int x^{n-1}\,dx\,(a + bx^n)^p = \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)}.$$

Lorsque m est de signe contraire à n, on fera usage de la formule

$$(2)\qquad \int x^{m-1} z^p\,dx = \frac{x^m z^{p+1}}{ma} - (m + n + np)\,\frac{b}{ma}\int x^{m+n-1} z^p\,dx,$$

dont l'application répétée ramènera l'exposant $m-1$ à $n-1$, en supposant toujours, bien entendu, que $\frac{m}{n}$ soit un nombre entier.

Il faut observer toutefois que les formules (1) et (2) deviennent illusoires, la

première lorsque $m + np = 0$, et la seconde lorsque $m = 0$, et il faut par conséquent que ces conditions ne soient remplies pour aucune des intégrales successives auxquelles conduit l'application de la formule.

Si par exemple on avait l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x^{10}} \sqrt[4]{a + bx^3},$$

l'application répétée de la formule (2) ramènera successivement l'exposant de x qui est -10 aux valeurs -7, -4 et -1; mais arrivé là il sera impossible de passer à l'exposant $+2$, car la formule (2) ne s'applique pas au cas où $m = 0$; et pour intégrer la différentielle

$$\frac{dx \sqrt[4]{a + bx^3}}{x},$$

il faudra la rendre rationnelle.

58. Considérons la différentielle

$$\frac{x^n\, dx\, (a + bx)^p}{\sqrt{a + bx}},$$

où n désigne un nombre entier. On peut (43) la rendre aisément rationnelle, mais il est plus élégant de l'intégrer par des réductions successives. On a, en posant $a + bx = z$,

$$(3) \qquad \int x^n z^{p-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{b} \frac{x^n z^{p+\frac{1}{2}}}{2n + 2p + 1} - \frac{1}{b} \frac{2an}{2n + 2p + 1} \int x^{n-1} z^{p-\frac{1}{2}}\, dx,$$

et comme on a évidemment

$$\int \frac{z^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{b} \frac{\sqrt{z}}{2p + 1},$$

on en déduira

$$\int \frac{xz^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{b^2} \sqrt{z} \left(\frac{z}{2p + 3} - \frac{a}{2p + 1} \right),$$

$$\int \frac{x^2 z^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{b^3} \sqrt{z} \left(\frac{z^2}{2p + 5} - \frac{2az}{2p + 3} + \frac{a^2}{2p + 1} \right),$$

$$\int \frac{x^3 z^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{b^4} \sqrt{z} \left(\frac{z^3}{2p + 7} - \frac{3az^2}{2p + 5} + \frac{3a^2 z}{2p + 3} - \frac{a^3}{2p + 1} \right),$$

$$\int \frac{x^4 z^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{b^5} \sqrt{z} \left(\frac{z^4}{2p + 9} - \frac{4az^3}{2p + 7} + \frac{6a^2 z^2}{2p + 5} - \frac{4a^3 z}{2p + 3} + \frac{a^4}{2p + 1} \right),$$

et ainsi de suite.

Lorsque n est négatif, la formule (3) résolue par rapport à l'intégrale qui est dans le second membre permettra de substituer à l'exposant $n-1$ l'exposant n qui est plus simple. On trouve ainsi, par un changement de lettres,

$$(4)\qquad \int \frac{z^p\,dx}{x^{n+1}\sqrt{z}} = -\frac{z^p\sqrt{z}}{anx^n} + \frac{2p-2n+1}{2n}\,\frac{b}{a}\int \frac{z^p\,dx}{x^n\sqrt{z}},$$

et l'application répétée de cette formule ramènera l'intégrale à

$$\int \frac{z^p\,dx}{x\sqrt{z}},$$

sans qu'on puisse l'appliquer plus loin; car la formule (4) est en défaut dans le cas où $n=0$. Pour réduire l'intégrale

$$\int \frac{z^p\,dx}{x\sqrt{z}}.$$

remarquons que l'on a

$$\frac{z^p\,dx}{x\sqrt{z}} = \frac{z^{p-1}(ax+b)}{x\sqrt{z}}\,dx = a\,dx\,z^{p-\frac{1}{2}} + b\,\frac{z^{p-1}\,dx}{x\sqrt{z}},$$

et l'on en déduit, en intégrant,

$$(5)\qquad \int \frac{z^p\,dx}{x\sqrt{z}} = \frac{2z^p}{(2p-1)\sqrt{z}} + a\int \frac{z^{p-1}\,dx}{x\sqrt{z}};$$

par l'application répétée de cette formule, lorsque p est entier, l'intégrale sera ramenée à

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{\sqrt{z}-\sqrt{a}}{\sqrt{z}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\,\text{arc tang}\sqrt{-\frac{z}{a}}.$$

On trouve ainsi

$$\int \frac{\sqrt{z}\,dx}{x} = a\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} + 2\sqrt{z},$$

$$\int \frac{z\sqrt{z}\,dx}{x} = a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} + 2\sqrt{z}\left(\frac{z}{3}+a\right),$$

$$\int \frac{z^2\sqrt{z}\,dx}{x} = a^3\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} + 2\sqrt{z}\left(\frac{z^2}{5}+\frac{az}{3}+a^2\right),$$

$$\int \frac{z^3\sqrt{z}}{x}\,dx = a^4\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} + 2\sqrt{z}\left(\frac{z^3}{7}+\frac{az^2}{5}+\frac{a^2z}{3}+a^3\right),$$

$$\int \frac{z^4\sqrt{z}}{x}\,dx = a^5\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} + 2\sqrt{z}\left(\frac{z^4}{9}+\frac{az^3}{7}+\frac{a^2z^2}{5}+\frac{a^3z}{3}+a^4\right).$$

et ainsi de suite.

La formule (4) donnera

$$\int \frac{z^p\,dx}{x^2\sqrt{z}} = -\frac{z^p\sqrt{z}}{ax} + \frac{2p-1}{2}\,\frac{b}{a}\int \frac{z^p\,dx}{x\sqrt{z}},$$

$$\int \frac{z^p\,dx}{x^3\sqrt{z}} = -\frac{z^p\sqrt{z}}{2ax}\left(\frac{1}{x} + \frac{2p-3}{2}\,\frac{b}{a}\right) + \frac{\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)}{1.2}\,\frac{b^2}{a^2}\int \frac{z^p}{x\sqrt{z}}\,dx,$$

$$\int \frac{z^p\,dx}{x^4\sqrt{z}} = -\frac{z^p\sqrt{z}}{3ax}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2p-5}{2}\,\frac{b}{2ax} - \frac{\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)}{1.2}\,\frac{b^2}{a^2}\right]$$
$$+ \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)}{1.2.3}\,\frac{b^3}{a^3}\int \frac{z^p}{x\sqrt{z}}\,dx,$$

et ainsi de suite.

59. Lorsque l'exposant p est négatif, la formule (4) doit être résolue par rapport à l'intégrale qui figure au second membre, et l'on aura la formule de réduction

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{x^{n+1}z^p\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{nax^n z^p} - \frac{(2n+2p-1)b}{2an}\int \frac{dx}{x^n z^p\sqrt{z}},$$

qui est en défaut seulement dans le cas où $n=0$. On devra alors, pour réduire l'intégrale, faire usage de la formule suivante, qui se déduit de (5) en changeant p en $-p$,

$$\int \frac{dx}{xz^{p+1}\sqrt{z}} = \frac{2}{(2p+1)az^p\sqrt{z}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz^p\sqrt{z}},$$

par laquelle on sera ramené à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{z}},$$

dont l'expression a été donnée (58).

On trouve ainsi

$$\int \frac{dx}{xz\sqrt{z}} = \frac{2}{a\sqrt{z}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}},$$

$$\int \frac{dx}{xz^2\sqrt{z}} = \frac{2}{a\sqrt{z}}\left(\frac{1}{3z} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}},$$

et ainsi de suite.

On déduira d'ailleurs de l'équation (6)

$$\int \frac{dx}{x^2 z^p \sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{axz^p} - \frac{2p+1}{2}\frac{b}{a}\int \frac{dx}{xz^p\sqrt{z}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z^p \sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{2axz^p}\left(\frac{1}{x} - \frac{2p+3}{2}\frac{b}{a}\right) + \frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)}{2}\frac{b^2}{a^2}\int \frac{dx}{xz^p\sqrt{z}},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z^p \sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{3axz^p}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2p+5}{2}\frac{b}{2ax} + \frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{5}{2}\right)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}\right]$$
$$- \frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{5}{2}\right)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}\int \frac{dx}{xz^p\sqrt{z}},$$

et ainsi de suite.

60. Considérons encore l'intégrale

$$(7) \qquad \int x^n\, dx\, (a+bx)^{p\pm\frac{1}{3}},$$

où p et n désignent des nombres entiers.

On a

$$\int x^n z^p \sqrt[3]{z}\, dx = \frac{3x^n z^{p+\frac{4}{3}}}{3n+3p+4}\frac{1}{b} - \frac{3an}{3n+3p+4}\frac{1}{b}\int x^{n-1} z^p \sqrt[3]{z}\, dx,$$

et l'application répétée de cette formule ramènera l'intégrale (7), lorsque n est entier et positif, à

$$\int z^p \sqrt[3]{z}\, dx = \frac{3z^{p+1}\sqrt[3]{z}}{b}\frac{1}{3p+4}.$$

Dans le cas où n est négatif, on emploiera la formule

$$\int \frac{z^p\, dx\, \sqrt[3]{z}}{x^{n+1}} = \frac{z^{p+1}}{ax^n}\sqrt[3]{z} + \left(p-n+\frac{4}{3}\right)\frac{b}{an}\int \frac{z^p\sqrt[3]{z}}{x^n}\, dx,$$

dont l'application successive ramènera l'intégrale à la forme

$$\int \frac{z^p\sqrt[3]{z}\, dx}{x},$$

que l'on réduira elle-même par la formule

$$\int \frac{z^p\sqrt[3]{z}\, dx}{x} = \frac{3z^p\sqrt[3]{z}}{3p+1} + a\int \frac{z^{p-1}\sqrt[3]{z}\, dx}{x},$$

et l'on sera conduit enfin à

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}},$$

que l'on intégrera (43) en posant $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{a + bx} = y$.

61. L'intégrale

$$\int \frac{x^n z^p\, dx}{\sqrt[3]{z}}$$

se réduira par la formule

$$\int \frac{x^n z^p\, dx}{\sqrt[3]{z}} = \frac{3x^n z^{p+\frac{2}{3}}}{(3n+3p+2)b} - \frac{3an}{(3n+3p+2)b} \int \frac{x^{n-1} z^p\, dx}{\sqrt[3]{z}},$$

qui la ramènera à

$$\int \frac{z^p\, dx}{\sqrt[3]{z}} = \frac{3z^{p+\frac{2}{3}}}{(3p+2)b}.$$

On a par exemple

$$\int \frac{x^2 z^p\, dx}{\sqrt{z}} = \frac{3z^{p+\frac{3}{3}}}{b^3}\left(\frac{z^3}{3p+8} - \frac{2az}{3p+5} + \frac{a^2}{3p+2}\right).$$

62. On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x.$$

Par l'application des formules du n° 57 on en conclut, en posant $\sqrt{1-x^2} = z$,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,\text{arc}\sin x - \frac{xz}{2},$$

$$\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3}{2.4}\,\text{arc}\sin x - \frac{1.3}{2.4}\,xz - \frac{1}{4}\,x^3 z,$$

$$\int \frac{x^6\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{arc}\sin x - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,xz - \frac{1.5}{4.6}\,x^3 z - \frac{1}{6}\,x^5 z,$$

$$\int \frac{x^8\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{arc}\sin x - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,xz - \frac{1.5.7}{4.6.8}\,x^3 z - \frac{1.7}{6.8}\,x^5 z - \frac{1}{8}\,x^7 z,$$

et ainsi de suite.

63. La formule

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

donnera de même, en posant $\sqrt{1-x^2}=z$,

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}x^2z,$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2.4}{3.5}z-\frac{1.4}{3.5}x^2z-\frac{1}{5}x^4z,$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2.4.6}{3.5.7}z-\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2z-\frac{1.6}{5.7}x^4z-\frac{1}{7}x^6z,$$

et ainsi de suite.

64. La formule

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

où $\sin\varphi=x$, donne de même, en posant toujours $\sqrt{1-x^2}=z$,

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}-\frac{z}{2x^2},$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3}{2.4}\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z}{x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{x^4},$$

$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z}{x^2}-\frac{1.5}{4.6}\frac{z}{x^4}-\frac{1}{6}\frac{z}{x^6}.$$

On trouve enfin directement, en posant par exemple $x=\cos\varphi$,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{z}{x},$$

et l'on en déduit

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{x^3},$$

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x}-\frac{1.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{z}{x^5},$$

$$\int\frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{z}{x}-\frac{1.4.6}{3.5.7}\frac{z}{x^3}-\frac{1.6}{5.7}\frac{z}{x^5}-\frac{1}{7}\frac{z}{x^7},$$

et ainsi de suite.

Quelques intégrales auxquelles ne s'appliquent pas les méthodes précédentes.

65. Non-seulement la différentielle d'une expression algébrique est toujours algébrique, mais les fonctions qui contiennent des logarithmes et des lignes trigonométriques inverses peuvent, dans un grand nombre de cas, avoir une différentielle algébrique. Le nombre des différentielles algébriques intégrables est par conséquent infini, et la différentiation est un moyen d'en former autant qu'on le voudra. Une telle méthode, on le comprend, n'aurait rien d'instructif, et nous nous bornerons à indiquer quelques cas simples dans lesquels des transformations élégantes, mais toutes spéciales, permettent l'intégration dans des cas auxquels ne s'appliquent pas les règles précédemment indiquées. Soit la différentielle

$$\frac{dx(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Posons avec Euler

$$\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=p;$$

on en déduit

$$1+p^2=\frac{1+x^4}{(1-x^2)^2},$$

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^2},$$

$$dp=\frac{dx\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx(1+x^2)\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

et par conséquent

$$\int\frac{dx(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,l(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}}{1-x^2}\right).$$

66. Soit encore la différentielle

$$\frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Posons

$$\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}=p,$$

on en déduit

$$\sqrt{1-p^2} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2},$$

$$dp = \frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)^2},$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

et enfin

$$\int \frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin} p - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

Réduction des intégrales elliptiques.

67. Quoique l'on puisse former de nombreux exemples analogues à celui qui précède, l'intégration des différentielles qui contiennent sous un radical un polynôme de degré supérieur au second est en général impossible. Les intégrales de cette forme ont donné lieu cependant à des travaux considérables, et les géomètres les ont réduites à un petit nombre de types dont l'étude approfondie a créé de nouvelles fonctions simples acceptées de plus en plus dans le calcul, et avec grande raison, au même titre que les sinus et les logarithmes, et réduites de même en tables numériques très-étendues et très-exactes.

Si l'on désigne, pour abréger, par R le polynôme du quatrième degré

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$

les puissances paires de $\sqrt{R}$ étant rationnelles et les puissances impaires contenant $\sqrt{R}$ en facteur, toute fonction rationnelle de x et de $\sqrt{R}$ peut être mise évidemment sous la forme

$$\frac{P + Q\sqrt{R}}{P' + Q'\sqrt{R}},$$

où P, Q, P′, Q′ sont des fonctions rationnelles de x. On peut d'ailleurs, en multipliant les deux termes par $P' - Q'\sqrt{R}$, rendre le dénominateur rationnel et mettre l'expression sous la forme

$$M + N\sqrt{R}.$$

L'intégrale $\int M dx$ peut toujours se calculer sous forme finie, et l'intégrale à étu-

dier est par conséquent

$$\int N\,dx\,\sqrt{R} = \int \frac{NR\,dx}{\sqrt{R}},$$

le produit NR désignant une fonction rationnelle de x.

68. Nous montrerons d'abord comment une substitution rationnelle peut transformer la différentielle précédente en une autre dans laquelle ne figurent plus sous le radical que les puissances paires de la variable. Le polynôme R peut toujours, on le sait, se décomposer en deux facteurs réels du second degré. Soit

$$R = [(x-m)^2 + N][(x-\mu)^2 + \nu].$$

Posons

$$(1) \qquad \frac{x-m}{x-\mu} = \frac{r-sy}{\rho-\sigma y},$$

on en déduit

$$(2) \qquad \begin{cases} x-m = \dfrac{(\mu-m)(r-sy)}{(r-\rho)+(\sigma-s)y}, \\ x-\mu = \dfrac{(\mu-m)(\rho-\sigma y)}{(r-\rho)+(\sigma-s)y}. \end{cases}$$

Pour que dans chaque facteur de l'expression de R le terme du premier degré en y disparaisse, il faut et il suffit que

$$(3) \qquad \begin{cases} rs\,(m-\mu)^2 + (\rho-r)(\sigma-s)N = 0, \\ \rho\sigma(m-\mu)^2 + (\rho-r)(\sigma-s)\,\nu = 0; \end{cases}$$

on en déduit immédiatement

$$(4) \qquad \frac{r}{\rho}\cdot\frac{s}{\sigma} = \frac{N}{\nu}.$$

En divisant la première des équations (3) par $\rho\sigma$ et la seconde par rs, puis remplaçant le produit $\frac{r}{\rho}\cdot\frac{s}{\sigma}$ par sa valeur (4), on trouve

$$\frac{r}{\rho} + \frac{s}{\sigma} = \frac{N+\nu+(m-\mu)^2}{\nu},$$

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\sigma}{s} = \frac{N+\nu+(m-\mu)^2}{N}.$$

Connaissant la somme et le produit des deux rapports $\frac{r}{\rho}$ et $\frac{s}{\sigma}$, on en déduit leur différence, et en posant

$$[N+\nu+(m-\mu)^2]^2 - 4N\nu = \Delta,$$

on a

$$\left(\frac{r}{\rho}-\frac{s}{\sigma}\right)^2=\frac{\Delta}{\nu^2},$$

$$\left(\frac{\rho}{r}-\frac{\sigma}{s}\right)^2=\frac{\Delta}{N^2}.$$

Pour que $\frac{r}{\rho}$ et $\frac{s}{\sigma}$ soient réels, il faut et il suffit que Δ soit positif; or on a identiquement

$$\begin{aligned}\Delta&=[(m-\mu)^2+\nu-N]^2+4(m-\mu)^2N\\&=[(m-\mu)^2+N-\nu]^2+4(m-\mu)^2\nu.\end{aligned}$$

Si N et ν sont tous deux positifs ou que l'un seulement le soit, l'une de ces formes montre que cette expression est positive et que par conséquent $\frac{r}{\rho}$ et $\frac{s}{\sigma}$ sont tous deux réels. Ces deux cas sont ceux où deux racines au moins de l'équation $R=0$ sont imaginaires.

Considérons enfin le cas où N et ν sont tous deux négatifs; on a identiquement

$$\Delta=[(m-\mu)^2+N+\nu+2\sqrt{N\nu}]\,[(m-\mu)^2+N+\nu-2\sqrt{N\nu}],$$

ou

$$\Delta=[(m-\mu)^2-(\sqrt{-N}+\sqrt{-\nu})^2]\,[(m-\mu)^2-(\sqrt{-N}-\sqrt{-\nu})^2].$$

Mais en nommant α, β, γ, δ les racines de l'équation $R=0$, on a

$$(m-\mu)^2=\frac{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}{4},$$

$$\sqrt{-N}=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sqrt{-\nu}=\frac{\gamma-\delta}{2},$$

et par conséquent

$$\Delta=\frac{[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2]\,[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\delta-\gamma-\beta)^2]}{16},$$

c'est-à-dire

$$\Delta=(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta), \tag{5}$$

α et β étant les racines du premier facteur de R et γ et δ celles du second. Comme ces quatre racines sont réelles, on peut les grouper comme on veut pour former les deux facteurs du second degré et faire en sorte, par un choix convenable, que Δ soit positif.

Si par exemple α, β, γ, δ sont rangés par ordre de grandeur croissante ou décroissante, les quatre facteurs de (5) seront de même signe et Δ sera positif; il y a d'ailleurs d'autres solutions, et l'on peut voir que Δ sera positif toutes les fois que, les racines étant rangées par ordre de grandeur, α et β se trouveront placées immédiatement à la suite l'une de l'autre.

De l'équation (1) on déduit

$$(6)\quad \begin{cases} x - m = \dfrac{(\mu - m)(r - sy)}{r - \rho + (\sigma - s)y}, \\ dx = \dfrac{(m - \mu)(r\sigma - s\rho)\,dy}{[r - \rho + (\sigma + s)y]^2}. \end{cases}$$

Les équations (3) donnent d'ailleurs

$$\frac{N}{(m-\mu)^2} = \frac{-rs}{(\rho - r)(\sigma - s)},$$

$$\frac{\nu}{(m-\mu)^2} = \frac{-\sigma\rho}{(\rho - r)(\sigma - s)},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{r^2(m-\mu)^2 + N(\rho - r)^2}{r} = (m-\mu)^2\,\frac{r\sigma - s\rho}{\sigma - s},$$

$$\frac{\rho^2(m-\mu)^2 + (\rho - r)^2\nu}{\rho} = (m-\mu)^2\,\frac{r\sigma - s\rho}{\sigma - s},$$

$$\frac{s^2(m-\mu)^2 + (\sigma - s)^2 N}{s} = (m-\mu)^2\,\frac{s\rho - r\sigma}{\rho - r},$$

$$\frac{\sigma^2(m-\mu)^2 + (\sigma - s)^2\nu}{\sigma} = (m-\mu)^2\,\frac{s\rho - r\sigma}{\rho - r},$$

par le moyen desquelles la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{[(x-m)^2 + N]\,[(x-\mu)^2 + \nu]}}$$

devient

$$\frac{dy}{(m-\mu)\sqrt{\left(\dfrac{r}{\sigma - s} - \dfrac{s}{\rho - r}y^2\right)\left(\dfrac{\rho}{\sigma - s} - \dfrac{\sigma}{\rho - r}y^2\right)}},$$

et suivant le signe des coefficients le radical pourra par conséquent être ramené à l'une des formes

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},\quad \sqrt{(1-y^2)(1+k^2y^2)},\quad \sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}.$$

69. Quoique la transformation précédente ne soit qu'un cas très-particulier

d'une théorie plus générale sur laquelle nous aurons à revenir, elle a néanmoins une assez grande importance pour que nous nous arrêtions au détail des calculs dans les différents cas.

Supposons que les quatre racines de l'équation $R = 0$ soient réelles et soit

$$R = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta); \tag{7}$$

la transformation (1) établit entre x et y une relation de la forme

$$x = \frac{p+qy}{r+sy}. \tag{8}$$

Pour que le polynôme R soit remplacé par $(1-y^2)(1-k^2y^2)$, il faut que les quatre facteurs aient respectivement pour numérateur $1+y$, $1-y$, $1+ky$ et $1-ky$. Posons donc

$$\left\{\begin{array}{ll} x-\alpha = A\dfrac{1+y}{r+sy}, & x-\beta = B\dfrac{1-y}{r+sy}, \\ x-\gamma = C\dfrac{1+ky}{r+sy}, & x-\delta = D\dfrac{1-ky}{r+sy}; \end{array}\right. \tag{9}$$

on en conclut

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-\beta}{x-\alpha} = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{1-y}{1+y}, \\ \dfrac{x-\delta}{x-\gamma} = \dfrac{D}{C}\,\dfrac{1-ky}{1+ky}. \end{array}\right. \tag{10}$$

En faisant dans la première de ces identités $x=\delta$ et $x=\gamma$, et dans la seconde $x=\beta$, $x=\alpha$, on en déduit, en ayant égard aux valeurs correspondantes de y qui sont évidemment $y=+\frac{1}{k}$, $y=-\frac{1}{k}$, $y=+1$ et $y=-1$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\delta-\beta}{\delta-\alpha} = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{k-1}{k+1}, & \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{k+1}{k-1}, \\ \dfrac{\beta-\delta}{\beta-\gamma} = \dfrac{D}{C}\,\dfrac{1-k}{1+k}, & \dfrac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma} = \dfrac{D}{C}\,\dfrac{1+k}{1-k}, \end{array}\right. \tag{11}$$

et par la combinaison de ces équations deux à deux,

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{B}{A}\right)^2 = \dfrac{(\delta-\beta)(\gamma-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)}, \\ \left(\dfrac{D}{C}\right)^2 = \dfrac{(\beta-\delta)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}, \\ \left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^2 = \dfrac{(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}, \end{array}\right. \tag{12}$$

et l'on pourra toujours choisir l'ordre de grandeur de α, β, γ, δ, qui évidemment est arbitraire, de manière à rendre les seconds membres positifs et par conséquent les rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{1-k}{1+k}$ réels. En adoptant pour $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$ et k les valeurs déduites de (12), les deux équations (10) fournissent la même valeur de x pour les quatre hypothèses $y=\pm 1$, $y=\pm\frac{1}{k}$, et l'on en conclut aisément qu'elles sont identiques. La troisième des équations (12) donne

$$\frac{1-k}{1+k}=\pm\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}}.$$

On pourra, en adoptant le signe + ou le signe —, avoir à volonté $k<1$ ou $k>1$.

Les équations (10) donnent, par la différentiation,

$$(13)\qquad \begin{cases}(\beta-\alpha)\dfrac{dx}{(x-\alpha)^2}=-2\dfrac{B}{A}\dfrac{dy}{(1+y)^2},\\[2ex] (\delta-\gamma)\dfrac{dx}{(x-\gamma)^2}=-2k\dfrac{D}{C}\dfrac{dy}{(1+ky)^2}.\end{cases}$$

En multipliant les équations (13) membre à membre et divisant leur produit par celui des équations (10), il vient

$$(14)\qquad \frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{4k}\,\frac{dx^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}=\frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

et la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

se trouvera ainsi ramenée à la forme

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

M est une constante, et le signe + du facteur sous le radical convient au cas où $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$ est positif et le signe — au cas contraire. On pourra d'ailleurs disposer comme on voudra du signe de ce produit en choisissant l'ordre de grandeur des racines désignées par α, β, γ, δ. Si, par exemple, α et β sont les deux plus petits et γ, δ les deux plus grands, les formules (12) montrent que les seconds membres de (13) sont réels et les signes des différences $\beta-\alpha$, $\delta-\gamma$ restent arbitraires.

70. Il résulte des paragraphes précédents que la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

où R désigne un polynôme du quatrième degré, peut dans tous les cas être remplacée, à l'aide des substitutions réelles, par une autre de la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{(L - My^2)(L' - M'y^2)}}.$$

On doit, suivant les signes de L, M, L′, M′, distinguer plusieurs cas :

Lorsque L et M sont de mêmes signes ainsi que L′ et M′, on peut poser

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2,$$

$$\frac{LM'}{ML'} = K^2,$$

et la différentielle devient

$$(15) \qquad \frac{1}{\sqrt{ML'}}\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - K^2z^2)}},$$

K étant à volonté plus grand ou plus petit que l'unité puisque l'ordre de grandeur des produits ML′, LM′ est évidemment arbitraire.

Lorsque M et L étant de mêmes signes M′ et L′ sont de signes contraires, on peut poser

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2,$$

$$\frac{LM'}{ML'} = -K^2,$$

et la différentielle devient

$$(16) \qquad \frac{1}{\sqrt{-ML'}}\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 + K^2z^2)}}.$$

Si enfin les rapports $\frac{L}{M}$ et $\frac{L'}{M'}$ sont négatifs, on posera

$$-\frac{M}{L}y^2 = z^2,$$

$$\frac{LM'}{ML'} = K^2,$$

et la différentielle deviendra

$$(17) \qquad \frac{1}{\sqrt{-ML'}}\frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 + K^2z^2)}}.$$

71. Les trois différentielles (15), (16), (17) peuvent d'ailleurs être ramenées à

une forme unique; il suffit de poser dans le premier cas

$$z = \sin\varphi,$$

dans le second

$$z = \cos\varphi,$$

et dans le troisième

$$z = \operatorname{tang}\varphi.$$

On a alors

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+K^2x^2)}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{1+K^2\cos^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1+K^2}\sqrt{1-\frac{K^2}{1+K^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+K^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1+K^2\operatorname{tang}^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+K^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-K^2)\sin^2\varphi}},$$

de sorte que la différentielle est ramenée dans tous les cas à la forme unique

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Lorsque le multiplicateur du radical dans les formules précédentes est imaginaire, on doit considérer les différentielles

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+h^2x^2)}},\quad \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(h^2x^2-1)}},\quad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-h^2x^2)}}.$$

On posera dans le premier cas

$$x = \frac{1}{\cos\varphi},$$

dans le second

$$x = \frac{1}{k\cos\varphi},$$

et dans le troisième

$$x^2 = \frac{1-c^2\sin^2\varphi}{1-c^2},\quad c = \sqrt{1-k^2}.$$

On aura ainsi

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+h^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{1+h^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(k^2x^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

72. Le cas où le polynôme R se réduit au troisième degré doit être particulièrement signalé : l'une des racines, δ par exemple, doit être alors considérée comme infinie; la seconde des formules (12) montre qu'il en sera de même de D et les deux autres deviennent

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha},$$

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma},$$

et enfin (14) devient

$$\frac{(\beta-\alpha)\,dx^2}{4k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

et la formule de transformation est

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \frac{B}{A}\,\frac{1-y}{1+y}.$$

73. On peut d'ailleurs, dans tous les cas, ramener une différentielle dans l'expression de laquelle figure la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré à une autre où le radical porte seulement sur un polynôme du troisième.

Considérons la différentielle

$$F\left[x\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\right]dx.$$

On a

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = (x-\alpha)^2\sqrt{\frac{(x-\beta)}{(x-\alpha)}\,\frac{(x-\gamma)}{(x-\alpha)}\,\frac{(x-\delta)}{(x-\alpha)}}.$$

Posons

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = z,$$

$$x = \frac{\beta-\alpha z}{1-z}, \quad dx = \frac{(\beta-\alpha)\,dz}{(1-z)^2}, \quad x-\alpha = \frac{\beta-\alpha}{1-z},$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{(1-z)^2}\sqrt{z\,\frac{[\beta-\gamma+(\gamma-\alpha)z]}{\beta-\alpha}\,\frac{[\beta-\delta+(\delta-\alpha)z]}{\beta-\alpha}},$$

et l'on voit que la différentielle exprimée par rapport à z ne contient plus sous le radical qu'un polynôme du troisième degré.

74. L'intégrale générale considérée au § 67 ayant été mise sous la forme

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R}},$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction rationnelle, les transformations indiquées (68) et (73)

pourront s'y appliquer sans que le multiplicateur du radical dans l'expression nouvelle obtenue cesse d'être en fonction rationnelle de la variable.

Examinons donc l'intégrale

$$\int \frac{\psi(z)\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

Si la fonction $\psi(z)$ est entière, on peut décomposer cette intégrale en une somme de termes de la forme

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

Lorsque z est impair, on intégrera en posant $z^2=u$; s'il est pair, en posant

$$\varphi(n)=\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

On a la formule de réduction, facile à vérifier par la différentiation des deux membres

$$z^{n+1}\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}=A(n+1)\varphi(n)+B(n+2)\varphi(n+2)+C(n+3)\varphi(n+4),$$

par laquelle toutes les intégrales de la forme $\varphi(n)$ se ramèneront à

$$(A)\qquad \begin{cases} \varphi(0)=\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}, \\ \varphi(2)=\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}. \end{cases}$$

La formule de réduction est applicable lorsque n est négatif, et comme on a

$$\frac{1}{z}\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}=-A\int \frac{dz}{z^2\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}+C\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}},$$

les intégrales de la forme

$$\int \frac{dz}{z^n\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}$$

peuvent, quel que soit le nombre entier pair n, être ramenées à la forme (A).

75. Lorsque la fonction $\varphi(z)$ n'est pas entière, on peut se borner à examiner le cas où elle est paire et ne contient que z^2. On a en effet identiquement

$$\varphi(z)=\frac{\varphi(z)+\varphi(-z)}{2}+\frac{\varphi(z)-\varphi(-z)}{2},$$

et l'on voit que toute fonction est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire; si on les désigne par $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$, $\psi_2(z)$ sera égal évidemment à $z\psi_3(z)$, $\psi_3(z)$ désignant une fonction de z^2, et l'intégrale

$$\int \frac{z\psi_3(z)\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}$$

s'obtiendra sous forme finie en posant $z^2 = u$.

La décomposition de la fonction $\psi_1(z)$ en fractions simples permettra de remplacer

$$\int \frac{\psi_1(z)\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

par une somme de termes de la forme

$$F(n) = \int \frac{dz}{(\alpha+z^2)^n\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}},$$

et l'on aura la formule de réduction aisée à vérifier par la différentiation des deux membres

$$\begin{aligned}\frac{z\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}{(\alpha+z^2)^n} &= C(3-2n)F(n-2)+2(n-1)(3C-B)F(n-1)\\ &\quad+(2n-1)(2Bz-A-3Cz^2)F(n)+2nz(A-Bz+Cz^2)F(n+1);\end{aligned}$$

l'emploi de cette formule permettra de ramener toutes les intégrales de la forme $F(n)$ à

$$F(0) = \int \frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}},$$

$$F(1) = \int \frac{dz}{(\alpha+z^2)\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

$$F(-1) = \alpha\int \frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}} + \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

En sorte que toutes les intégrales considérées sont ramenées aux trois formes

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}},\quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}},\quad \int \frac{dz}{(\alpha+z^2)\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}.$$

Quelques intégrales qui se ramènent aux fonctions elliptiques.

76. Soit la différentielle

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+bx^5+ax^6}},$$

où $F(x)$ désigne une fonction rationnelle de x. Le radical qui se trouve au dénominateur peut être mis sous la forme

$$x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+b\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+c\left(x+\frac{1}{x}\right)+d},$$

et si l'on pose

$$x+\frac{1}{x}=z,$$

$$x=\frac{1}{2}(z\pm\sqrt{z^2-4}),$$

la différentielle proposée prend la forme

$$x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a(z^3-3z)+b(z^2-2)+cz+d}=x^{\frac{3}{2}}\sqrt{U}.$$

On a d'ailleurs, comme on le voit aisément,

$$\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{z+2},$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{z-2},$$

par conséquent

$$\frac{2}{\sqrt{x}}=\sqrt{z+2}-\sqrt{z-2},$$

et en différentiant,

$$\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{dz}{2\sqrt{z-2}}-\frac{dz}{2\sqrt{z+2}}.$$

La substitution de la variable z à la variable x met d'ailleurs la fonction $F(x)$ sous la forme

$$P+Q\sqrt{z^2-4},$$

où P et Q désignent des fonctions rationnelles de z, et la différentielle proposée est par suite ramenée aux deux suivantes :

$$\frac{P\,dz}{\sqrt{z\pm 2}\,\sqrt{U}}$$

et

$$\frac{Q\,dz\sqrt{z\pm 2}}{\sqrt{U}}=\frac{Q(z\pm 2)\,dz}{\sqrt{U(z\pm 2)}},$$

et comme U est un polynôme du troisième degré en z, $U(z\pm 2)$ est du quatrième, et la différentielle rentre dans la classe précédemment étudiée.

77. Soit encore la différentielle

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+bx^6+ax^8}},$$

où $F(x)$ désigne encore une fonction rationnelle de x, on a

$$F(x)=\frac{F(x)+F(-x)}{2}+\frac{F(x)-F(-x)}{2};$$

le premier terme du second membre est pair et par conséquent de la forme $\varphi(x^2)$, le second est impair et de la forme $x\psi(x^2)$. On en déduit, en désignant le dénominateur par $\sqrt{R}$,

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R}}=\frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{R}}+\frac{x\psi(x^2)\,dx}{\sqrt{R}}.$$

La substitution $x^2=z$ fait rentrer le second terme du second membre dans la classe des différentielles elliptiques, et ramène le premier à la forme étudiée (**76**), dans laquelle il suffit de supposer $a=0$.

78. Citons enfin quelques différentielles dans lesquelles figure un radical d'ordre plus élevé que le second, et qui peuvent pourtant se ramener aux différentielles elliptiques.

La différentielle

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt[3]{a+bx+cx^2+dx^3}}$$

est dans ce cas, $F(x)$ désignant, comme précédemment, une fonction rationnelle de x.

Posons, en effet,

$$x=\lambda+y,$$

λ étant une racine de l'équation

$$a+b\lambda+c\lambda^2+d\lambda^3=0;$$

la différentielle prendra la forme

$$\frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt[3]{\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3}}.$$

Posons

$$\sqrt[3]{\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3}=zy,$$

on en déduit

$$y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha z^3}}{2\gamma - 2z^3}.$$

La différentielle ne contient plus d'autre radical que $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha z^3}$.

79. Soit enfin la différentielle

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}},$$

où $F(x)$ désigne toujours une fonction rationnelle de x que l'on peut, comme on l'a vu (77), mettre sous la forme $x\varphi(x^2) + \psi(x^2)$.

La différentielle devient alors

$$\frac{x\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}} + \frac{\psi(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}.$$

Pour transformer le premier terme, posons

$$\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4} = z,$$

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4cz^4}}{2c},$$

et $x\,dx$ étant la différentielle de x^2, l'expression

$$\frac{\varphi(x^2)\,x\,dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}$$

ne contient plus évidemment d'autre irrationnelle que $\sqrt{b^2 - 4ac + 4cz^4}$.

Pour transformer le second terme, on posera

$$(1) \qquad \sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4} = xz,$$

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4az^4}}{2(c - z^4)}.$$

En différentiant la formule (1), après l'avoir élevée à la quatrième puissance, on trouve

$$\frac{dx}{xz} = \frac{2x^2 z^2\,dz}{b + 2x^2(c - z^4)} = \frac{2x^2 z^2\,dz}{\sqrt{b^2 - 4ac + 4az^4}},$$

et la différentielle est ramenée à la forme annoncée.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET EXPONENTIELLES.

80. Les méthodes employées pour intégrer, lorsque cela est possible, les différentielles qui contiennent des fonctions trigonométriques et exponentielles sont extrêmement variées.

L'intégration par parties peut servir à faire disparaître la fonction transcendante et doit être essayée toutes les fois que celle-ci figure comme facteur et que sa différentielle est algébrique.

Les applications les plus remarquables de cette méthode sont contenues dans une formule générale que nous allons faire connaître.

Soit à intégrer la différentielle $PQ^n\,dx$, P et Q désignant des fonctions connues de x. Posons

$$\int P\,dx = P_1, \quad \int P_1 \frac{dQ}{dx}\,dx = P_2, \quad \int P_2 \frac{dQ}{dx}\,dx = P_3, \ldots,$$

on aura, en intégrant par parties,

$$\int PQ^n\,dx = P_1 Q^n - n\int P_1 Q^{n-1}\frac{dQ}{dx}\,dx,$$

$$\int P_1 Q^{n-1}\frac{dQ}{dx}\,dx = P_2 Q^{n-1} - (n-1)\int P_2 \frac{dQ}{dx} Q^{n-2}\,dx,$$

$$\int P_2 Q^{n-2}\frac{dQ}{dx}\,dx = P_3 Q^{n-2} - (n-2)\int P_3 \frac{dQ}{dx} Q^{n-3}\,dx,$$

et ainsi de suite : on en conclut

$$(1) \qquad \int PQ^n\,dx = P_1 Q^n - nP_2 Q^{n-1} + n(n-1)P_2 Q^{n-2} - \ldots \pm 1.2.3\ldots nP_{n+1}.$$

Appliquons cette formule à quelques exemples.

Soit $P = x^{m-1}$, $Q = lx$, on a

$$P_1 = \int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m}, \quad P_2 = \int \frac{x^m}{m}\frac{dx}{x} = \frac{x^m}{m^2}, \quad P_3 = \int \frac{x^m}{m^2}\frac{dx}{x} = \frac{x^m}{m^3}, \ldots,$$

et

$$\int x^{m-1}(lx)^n\,dx = \frac{x^m}{m}\left[(lx)^n - n\frac{(lx)^{n-1}}{m} + n(n-1)\frac{(lx)^{n-2}}{m^2} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots n}{m^n}\right],$$

et en faisant $m = 1$,

$$\int (lx)^n\,dx = x\,[(lx)^n - n(lx)^{n-1} + n(n-1)(lx)^{n-2} - \ldots \pm 1.2.3\ldots n].$$

Soit encore $P = 1$, $Q = \text{arc}\sin x$, on a

$$P_1 = \int dx = x,$$

$$P_2 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$P_3 = -\int \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$P_4 = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on voit que P_1, P_2, P_3,... forment une suite périodique. La formule (1) devient donc

$$\int dx\,(\text{arc}\sin x)^n = \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc}\sin x} - n(n-1)\frac{x}{(\text{arc}\sin x)^2}\right.$$
$$\left. - n(n-1)(n-2)\frac{\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc}\sin x)^3} + \cdots\right](\text{arc}\sin x)^n.$$

81. L'intégration par parties donne aisément les deux intégrales

$$(2) \qquad \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

On a en effet, en remarquant que e^{ax} est la différentielle de $\frac{e^{ax}}{a}$,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

et de ces deux équations on déduit

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{ax},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}.$$

Ces formules peuvent d'ailleurs s'obtenir plus directement de la manière suivante :

On a évidemment

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}} = e^{(a+b\sqrt{-1})x}\,\frac{(a-b\sqrt{-1})}{a^2+b^2},$$

mais

$$e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx),$$

et en égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on retrouve les formules précédentes.

82. L'intégration par parties permet de réduire les expressions plus générales

$$(3)\qquad \int e^{ax}\cos^n bx\,dx,\quad \int e^{ax}\sin^n bx\,dx;$$

elle donne en effet

$$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \cos^n bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{nb}{a}\int e^{ax}\cos^{n-1}bx\sin bx\,dx.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int e^{ax}\cos^{n-1}bx\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos^{n-1}bx\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}[\cos^n bx - (n-1)\cos^{n-2}bx\sin^2 bx]\,dx,$$

et, en remplaçant $\sin^2 bx$ par $1-\cos^2 bx$,

$$\int e^{ax}\cos^{n-1}bx\sin bx\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos^{n-1}bx\sin bx - \frac{nb}{a}\int e^{ax}\cos^n bx\,dx + (n-1)\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx,$$

et, en substituant dans la première équation,

$$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{a\cos bx + nb\sin bx}{a^2+n^2b^2}\,e^{ax}\cos^{n-1}bx + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2b^2}\,b^2\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx.$$

Un calcul tout semblable donnera

$$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{a\sin bx - nb\cos bx}{a^2+n^2b^2}\,e^{ax}\sin^{n-1}bx + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2b^2}\,b^2\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx.$$

L'application répétée de ces formules permettra de réduire l'exposant n à zéro ou à l'unité, et d'effectuer par conséquent l'intégration.

Les deux intégrales (3) pourront d'ailleurs être immédiatement ramenées aux précédentes, en remplaçant $\cos^n bx$ et $\sin^n bx$ par leur expression en fonction des sinus et cosinus des multiples de bx.

On a par exemple

$$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x - \cos x),$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}\sin x}{4+a^2}(a\sin x - 2\cos x) + \frac{2e^{ax}}{a(4+a^2)},$$

$$\int e^{ax}\sin^3 x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^2 x}{9+a^2}(a\sin x - 3\cos x) + \frac{6e^{ax}}{(1+a^2)(9+a^2)}(a\sin x - \cos x),$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\cos x + \sin x),$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}\cos x}{4+a^2}(a\cos x + 2\sin x) + \frac{2e^{ax}}{a(4+a^2)},$$

$$\int e^{ax}\cos^3 x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^2 x}{9+a^2}(a\cos x + 3\sin x) + \frac{6e^{ax}}{(1+a^2)(9+a^2)}(a\cos x + \sin x).$$

83. Toutes les fois qu'une différentielle contient en facteur l'exponentielle e^x, on peut faire porter au choix sur l'autre facteur la différentiation ou l'intégration, de manière à obtenir la réduction la plus avantageuse.

Il est aisé d'intégrer ou de réduire de cette manière les différentielles de la forme

$$(4) \qquad e^x F(x)\,dx,$$

où $F(x)$ désigne une fonction rationnelle.

Si d'abord $F(x)$ est une fonction entière, la différentielle se compose d'une somme de termes de la forme

$$x^m e^x\,dx,$$

et l'on a

$$\int x^m e^x\,dx = e^x x^m - m\int x^{m-1} e^x\,dx;$$

l'application répétée de cette formule réduira l'intégrale à

$$\int e^x\,dx = e^x.$$

Si la fonction $F(x)$ est fractionnaire, on la décomposera en fractions simples, et l'intégrale se réduira à une somme de termes de la forme

$$A\int\frac{e^z\,dx}{(x-\alpha)^n}.$$

L'intégration par parties donne

$$\int\frac{e^z\,dx}{(x-\alpha)^n}=-\frac{e^z}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{e^z\,dx}{(x-\alpha)^{n-1}},$$

et l'application de cette formule nous ramènera à la transcendante

$$\int\frac{e^z\,dx}{x-\alpha},$$

dont l'expression explicite n'est pas connue, mais qui elle-même, si l'on pose $x-\alpha=z$, se réduit à

$$\int\frac{dz\,e^z}{z},$$

ou encore, en posant $e^z=y$, à

$$\int\frac{dy}{ly}.$$

84. Les différentielles de la forme

$$\sin^m x\cos^n x\,dx \tag{5}$$

peuvent aussi s'intégrer, lorsque les exposants m et n sont entiers, à l'aide de réductions successives. On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int\sin^m x\cos^n x\,dx&=\int\cos^{n-1}x\cos x\sin^m x\,dx\\&=\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx;\end{aligned}$$

mais

$$\sin^{m+2}x=\sin^m x(1-\cos^2 x),$$

et la formule devient

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^n x\,dx;$$

en faisant passer le dernier terme du second membre dans le premier, et supprimant le facteur $\frac{1}{m+1}$, il vient enfin

$$(m+n)\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx. \tag{A}$$

Cette formule permet de diminuer l'exposant n de deux unités. Il est bien entendu que si n est négatif, $n-2$ étant plus grand que n en valeur absolue, on devra résoudre la formule par rapport à l'intégrale qui figure au second membre.

En dirigeant autrement l'intégration et mettant la différentielle sous la forme

$$\sin^{m-1}x \sin x \cos^n x\,dx,$$

on obtiendrait, par un calcul tout semblable,

$$\text{(B)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\,dx.$$

Les formules (A) et (B) permettent de réduire à volonté l'un des deux exposants de deux unités; en les appliquant successivement, on trouve

$$\text{(C)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x}{m+n}\left(\sin^2 x - \frac{m-1}{m+n-2}\right) + \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n)(m+n-2)}\int \sin^{m-2}x \cos^{n-2}x\,dx.$$

Toutes ces formules, ainsi qu'il a été dit, augmenteraient les exposants négatifs, et l'on doit, quand ce cas se présente, considérer comme inconnues les intégrales qui figurent au second membre; on obtient ainsi, avec un léger changement de notation, plusieurs formules dont la vérification directe est facile, et que nous nous bornerons à écrire :

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{\sin^{m-1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{n-2}x}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = \frac{-\cos^{n-1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin^{m-2}x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x \cos^n x},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2}x}.$$

Les formules précédentes deviennent illusoires dans le cas où les dénominateurs $m-1$ et $n-1$ sont nuls. On devra dans ce cas avoir recours aux formules (A) et (B) qui donnent

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos x}\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x}{m-1} + \int \frac{\sin^{m-2}x\,dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx = \frac{\cos^{n-1}x}{n-1} + \int \frac{\cos^{n-2}x\,dx}{\sin x}.$$

L'application successive des formules précédentes permettra de réduire dans tous les cas les exposants de $\sin x$ et de $\cos x$, en ramenant l'intégrale $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ à l'une des suivantes

$$\int dx = x,$$

$$\int dx \sin x = -\cos x,$$

$$\int dx \cos x = \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\tang\frac{1}{2}x}} = l\tang\frac{1}{2}x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = l\tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = 2\int \frac{dx}{\sin 2x} = l\tang x,$$

$$\int \frac{dx\sin x}{\cos x} = -l\cos x,$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = l\sin x.$$

85. En appliquant la formule (B) au cas où l'exposant n se réduit à zéro, on obtiendra l'intégrale $\int \sin^m x\,dx$ dont l'expression générale est, en supposant bien entendu l'exposant m entier, lorsque m est pair et égal à $2k$,

$$\int \sin^{2k} x\,dx = -\frac{\cos x}{2k}\left[\sin^{2k-1}x + \frac{2k-1}{2k-2}\sin^{2k-3}x + \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k-2)(2k-4)}\sin^{2k-5}x + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}x,$$

et, lorsque m est impair et égal à $2k+1$,

$$\int \sin^{2k+1} x\,dx = -\frac{\cos x}{2k+1}\left[\sin^{2k}x + \frac{2k}{2k-1}\sin^{2k-2}x \right.$$
$$\left. + \frac{2k(2k-2)}{(2k-1)(2k-3)}\sin^{2k-4}x + \ldots + \frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots(2k-1)}\right].$$

On trouvera de même

$$\int \cos^{2k} x\,dx = \frac{\sin x}{2k}\left[\cos^{2k-1}x + \frac{2k-1}{2k-2}\cos^{2k-3}x + \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k-2)(2k-4)}\cos^{2k-5}x + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k-2}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}x,$$

$$\int \cos^{2k+1} x\,dx = \frac{\sin x}{2k+1}\left[\cos^{2k}x + \frac{2k}{2k-1}\cos^{2k-2}x + \ldots + \frac{2.4\ldots 2k}{1.3\ldots(2k-1)}\right].$$

86. L'application répétée de la formule (C) donnera, en y supposant $m = n$, dans le cas où m est pair et égal à $2k$,

$$\int \operatorname{tang}^{2k} x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{2k-1}x}{2k-1} - \frac{\operatorname{tang}^{2k-3}x}{2k-3} + \ldots + (-1)^{k-1}\operatorname{tang} x + (-1)^k x,$$

et, lorsque m est impair et égal à $2k+1$,

$$\int \operatorname{tang}^{2k+1} x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{2k}x}{2k} - \frac{\operatorname{tang}^{2k-2}x}{2k-2} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} + (-1)^{k+1} l\cos x.$$

On trouvera aussi

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \log\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$
$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\cot x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 2\right),$$
$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\cot x\left(\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{3}{2\sin x}\right) + \frac{3}{8}\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

et ainsi de suite;

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tang} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\right),$$
$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\operatorname{tang} x\left(\frac{1}{\cos^3 x} + \frac{3}{2\cos x}\right) + \frac{3}{8}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

et ainsi de suite.

87. L'intégration des différentielles de la forme $\sin^m x \cos^n x\, dx$ peut, dans des cas très-étendus, se faire plus simplement que par l'application des formules de réduction. Si, par exemple, l'un des exposants m et n est un nombre entier positif et impair, l'autre étant quelconque, l'intégration directe est très-facile. On a en effet

$$\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = \int \sin^m x\,(1 - \sin^2 x)^n\, dx \cos x,$$

et, en développant la puissance de $(1 - \sin^2 x)$, tous les termes deviennent intégrables à l'aide de la formule

$$\int \sin^p x \cos x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x}{p+1};$$

on intégrerait de même

$$\cos^n x \sin^{2m+1} x\, dx$$

en la mettant sous la forme

$$\cos^n x\,(1 - \cos^2 x)^m \sin x\, dx.$$

88. Supposons en second lieu que dans la différentielle

$$\sin^m x \cos^n x\, dx$$

la somme $m + n$ des deux exposants soit un nombre entier pair et négatif $-2p$.

On écrira

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} \cos^{m+n} x\, dx;$$

mais

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tang^2 x},$$

$$\cos^{m+n} x = (1 + \tang^2 x)^p,$$

et l'intégrale devient

$$\int \tang^m x\,(1 + \tang^2 x)^{p-1}\, d \tang x,$$

et, en posant $\tang x = z$,

$$\int z^m (1 + z^2)^{p-1}\, dz,$$

qui s'intègre immédiatement.

89. Il est commode, dans un grand nombre de cas, d'exprimer les puissances de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction des sinus et cosinus des multiples de x, de manière à n'avoir plus, dans l'expression réduite, que les premières puissances des lignes trigonométriques.

On a (I, 385)

$$(2\cos x)^{2k} = 2\cos 2kx + 2.2k\cos(2k-2)x + \frac{2.2k(2k-1)}{1.2}\cos(2k-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k},$$

$$(2\cos x)^{2k+1} = 2\cos(2k+1)x + 2(2k+1)\cos(2k-1)x + \ldots$$
$$+ 2\frac{(2k+1)2k\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\cos x,$$

et par conséquent

$$\int \cos^{2k} x\,dx = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\frac{\sin 2kx}{2k} + 2k\frac{\sin(2k-2)x}{2k-2} + \frac{2k(2k-1)}{1.2}\frac{\sin(2k-4)x}{2k-4} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}x\right],$$

$$\int \cos^{2k-1} x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + (2k+1)\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right.$$
$$\left. + \frac{(2k+1)(2k-1)}{1.2}\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3} + \ldots + \frac{(2k+1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\sin x\right].$$

On trouverait de même

$$\int \sin^{2k} x\,dx = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left[\frac{\sin 2kx}{2k} - 2k\frac{\sin(2k-2)x}{2k-2} + \frac{2k(2k-1)}{1.2}\frac{\sin(2k-4)x}{2k-4} + \ldots\right.$$
$$+ (-1)^{k-1}\frac{2k(2k-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots k-1}\frac{\sin 2x}{2}$$
$$\left. + (-1)^k\frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\frac{x}{2}\right],$$

$$\int \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}}\left[\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} - (2k+1)\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} + \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^k\frac{(2k+1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\cos x\right].$$

On peut aussi simplifier certaines différentielles en décomposant $\sin mx$ et $\cos mx$ en produits.

On a trouvé (I, 404)

$$\sin(2k+1)x = C'\sin x\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{\pi}{2k+1}\right)\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{2\pi}{2k+1}\right)\cdots\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{2k+1}\right),$$

C' étant une constante aisée à calculer. On a en effet

$$\sin(2k+3)x = 2\sin(2k+1)x\cos 2x - \sin(2k-1)x$$
$$= 2\sin(2k+1)x(1-2\sin^2 x) - \sin(2k-1)x,$$

et par conséquent, si dans le développement de $\sin(2k+1)x$ le coefficient de $\sin^{2k+1}x$ est C', dans celui de $\sin(2k+3)x$ il sera $-4C'$, et comme pour $k=1$, on a

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

il en résulte, quel que soit k,

$$C' = (-1)^k 2^{2k},$$

par conséquent

$$\sin(2k+1)x = (-1)^k 2^{2k} \sin x \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{2k+1}\right)\left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi}{2k+1}\right)\cdots$$
$$\times\left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{k\pi}{2k+1}\right);$$

et comme on a

$$\sin^2 x - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 x,$$

$$\sin(2k+1)x = 2^{2k}\sin x\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{2k+1}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{2\pi}{2k+1}\right)\cdots\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{k\pi}{2k+1}\right),$$

on a aussi

$$\sin 2kx = 2^{2k-1}\sin x \cos x \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{2k}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{2\pi}{2k}\right)\cdots$$
$$\times\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}\right).$$

Il suffit, pour le démontrer, de remarquer qu'en vertu de la formule précédente et de l'identité

$$\sin 2kx = 2\sin(2k-1)x\cos x + \sin(2k-2)x.$$

S'il est démontré que $\sin(2k-2)x$ est exprimable par une fonction de la forme $\sin x\, F(\cos x)$, F étant une fonction entière de degré $2k-3$, $\sin 2kx$ sera exprimable par $\sin x\, F_1(\cos x)$, F_1 étant une fonction entière de degré $2k-1$. On peut donc écrire

$$\sin 2kx = \sin x\, F_1(\cos x),$$

et comme les racines de l'équation

$$\frac{\sin 2kx}{\sin x} = 0$$

sont

$$\cos x = \pm\cos\frac{\pi}{2k},$$
$$\cos x = \pm\cos\frac{2\pi}{2k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cos x = \pm\cos\frac{(k-1)\pi}{2k},$$
$$\cos x = 0,$$

on aura

$$\sin 2kx = C_1 \sin x \cos x \left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{\pi}{2k}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2 \frac{2\pi}{2k}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos^2 x - \cos^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}\right].$$

On trouvera enfin d'une manière toute semblable, et quel que soit l'entier m, pair ou impair,

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\cdots\left[\cos x - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right].$$

90. Les formules précédentes permettent de décomposer les fractions de la forme

$$\frac{\cos^p x}{\cos nx},\quad \frac{\cos^p x}{\sin 2nx},\quad \frac{\cos^p x}{\sin(2n+1)x}$$

en fractions plus simples. En supposant dans la première $n > p$, dans la seconde $2n > p+1$, et dans la troisième $2n > p$, on a

$$\frac{\cos^p x}{\cos nx} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k \frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\cos^p\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\cos x - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}},$$

$$\frac{\cos^p x}{\sin 2nx} = \frac{1}{2n\sin x}\sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^{k+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}\cos^2\frac{k\pi}{2n}\left[\frac{1}{\cos x - \cos\frac{k\pi}{2n}} + \frac{(-1)^p}{\cos x + \cos\frac{k\pi}{2n}}\right],$$

$$\frac{\cos^p x}{\sin(2n+1)x} = \frac{1}{(2n+1)\sin x}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{p+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}$$
$$\times\left[\frac{1}{\cos x - \cos\frac{k\pi}{2n+1}} + \frac{(-1)^{p+1}}{\cos x + \cos\frac{k\pi}{2n+1}}\right].$$

Si les inégalités admises n'étaient pas satisfaites, on pourrait toujours remplacer dans les fractions considérées le dénominateur par le produit qui le représente, et, laissant de côté le facteur $\sin x$, effectuer la division du numérateur par le polynôme en $\cos x$, de manière à décomposer l'expression en un polynôme entier multiplié par $\frac{1}{\sin x}$, plus une somme de fractions simples de la forme $\frac{A}{\sin x(a + b\cos x)}$.

91. L'intégration d'une différentielle de la forme

$$\int \frac{\cos^p x}{\cos nx}\,dx$$

se ramènera, d'après ce qui précède, à une somme de fractions simples, telles que

$$\frac{dx}{\cos\alpha + \cos x},$$

dont l'intégration est facile.

On a en effet

$$\cos\alpha + \cos x = 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha = \sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2} - \sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{\cos\alpha + \cos x} = \frac{-dx}{2\sin\alpha}\,\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2} - \sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$$

et

$$\int\frac{dx}{\cos\alpha + \cos x} = \frac{1}{\sin\alpha}\,l\,\frac{\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\frac{x+\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha}\,l\,\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\,\text{sect. hyp.}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right).$$

92. Les différentielles de la forme $\frac{\cos^p x}{\sin nx}\,dx$ se décomposent en fractions simples, telles que

$$\frac{dx}{\sin x\,(a + b\cos x)},$$

dont l'intégration est facile. On a en effet identiquement

$$\frac{1}{\sin x\,(a+b\cos x)} + \frac{b^2\sin x}{(a^2-b^2)(a+b\cos x)} = \frac{a-b\cos x}{(a^2-b^2)\sin x},$$

et par conséquent

$$\int\frac{dx}{\sin x\,(a+b\cos x)} = \frac{-b}{a^2-b^2}\int\frac{b\sin x\,dx}{a+b\cos x} + \frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{\sin x} - \frac{b}{a^2-b^2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

$$= \frac{b}{a^2-b^2}\,l(a+b\cos x) + \frac{a}{a^2-b^2}\,l\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{b}{a^2-b^2}\,l\sin x.$$

93. L'intégration par parties permet de réduire successivement les différentielles de la forme $x^m \sin x\,dx$, $x^m \cos x\,dx$, $x^m a^x\,dx$, on a

$$\int x^m \sin x\,dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx,$$
$$\int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx,$$
$$\int x^m a^x\,dx = \frac{x^m a^x}{la} - \frac{m}{la}\int x^{m-1} a^x\,dx.$$

Lorsque m est entier, l'application répétée de ces formules ramène les intégrales cherchées à l'une des suivantes :

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \quad \int \cos x\,dx = \sin x, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la}.$$

On trouvera par exemple :

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x,$$
$$\int x^2\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x,$$
$$\int x^3\sin x\,dx = (3x^2-6)\sin x - (x^3-6x)\cos x,$$
$$\int x^4\sin x\,dx = (4x^3-24x)\sin x - (x^4-12x^2+24)\cos x,$$

et ainsi de suite;

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x,$$
$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x,$$
$$\int x^3\cos x\,dx = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x,$$
$$\int x^4\cos x\,dx = (4x^3-24x)\cos x + (x^4-12x^2+24)\sin x,$$

et ainsi de suite.

94. Parmi les formules analogues aux précédentes, nous citerons celle qui permet d'abaisser l'exposant n dans l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^n x}.$$

On a

$$\frac{d}{dx}\,\frac{nx\cos x + \sin x}{\sin^{n+1} x} = \frac{n^2 x\sin^2 x - n(n+1)x}{\sin^{n+2} x};$$

et par conséquent, en intégrant les deux membres et transposant,

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^{n+2}x} = -\frac{nx\cos x + \sin x}{n(n+1)\sin^{n+1}x} + \frac{n}{n+1}\int \frac{x\,dx}{\sin^n x},$$

et par l'application répétée de cette formule l'intégrale $\int \frac{x\,dx}{\sin^{n+2}x}$ se réduira, suivant que n est pair ou impair, à $\int \frac{x\,dx}{\sin x}$, qui n'est pas exprimable explicitement, ou à

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\cot x + \int \cot x\,dx = -x\cot x + l\sin x.$$

On trouverait de même

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^{n+2}x} = \frac{nx\sin x - \cos x}{n(n+1)\cos^{n+1}x} + \frac{n}{n+1}\int \frac{x\,dx}{\cos^n x},$$

par laquelle l'intégrale pourra être réduite, dans le cas où n est pair, à

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\,\mathrm{tang}\,x + l\cos x.$$

On a par exemple :

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\cot x + l\sin x,$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{\sin x + 2x\cos x}{6\sin^3 x} - \frac{2}{3}(x\cot x - l\sin x),$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^6 x} = -\frac{\sin x + 4x\cos x}{20\sin^5 x} - \frac{4}{5}\,\frac{\sin x + 2x\cos x}{6\sin^3 x} - \frac{8}{15}(x\cot x - l\sin x),$$

et ainsi de suite;

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\,\mathrm{tang}\,x + l\cos x,$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{2x\sin x - \cos x}{6\cos^3 x} + \frac{2}{3}(x\,\mathrm{tang}\,x + l\cos x),$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^6 x} = \frac{4x\sin x - \cos x}{20\cos^5 x} + \frac{4}{5}\,\frac{2x\sin x - \cos x}{6\cos^3 x} + \frac{8}{15}(x\,\mathrm{tang}\,x + l\cos x),$$

et ainsi de suite.

95. On peut réduire par décomposition les différentielles de la forme

$$\frac{\cos nx\,dx}{\cos^p x}, \quad \frac{\cos nx\,dx}{\sin^p x}.$$

On a en effet identiquement

$$\frac{\cos nx}{\cos^p x} = \frac{2\cos(n-1)x}{\cos^{p-1}x} - \frac{\cos(n-2)x}{\cos^p x},$$

$$\frac{\cos nx}{\sin^p x} = -\frac{2\sin(n-1)x}{\sin^{p-1}x} + \frac{\cos(n-2)x}{\sin^p x},$$

et par conséquent

$$\int \frac{\cos nx\,dx}{\cos^p x} = 2\int \frac{\cos(n-1)x\,dx}{\cos^{p-1}x} - \int \frac{\cos(n-2)x\,dx}{\cos^p x},$$

$$\int \frac{\cos nx\,dx}{\sin^p x} = -2\int \frac{\sin(n-1)x\,dx}{\sin^{p-1}x} + \int \frac{\cos(n-2)x}{\sin^p x}\,dx.$$

On trouvera de même

$$\int \frac{\sin nx\,dx}{\cos^p x} = 2\int \frac{\sin(n-1)x}{\cos^{p-1}x}\,dx - \int \frac{\sin(n-2)x}{\cos^p x}\,dx,$$

$$\int \frac{\sin nx}{\sin^p x}\,dx = 2\int \frac{\cos(n-1)x}{\sin^{p-1}x}\,dx + \int \frac{\sin(n-2)x}{\sin^p x}\,dx,$$

et l'application répétée de ces formules facilitera l'intégration des différentielles auxquelles elles se rapportent, en les réduisant à d'autres de même forme et de plus en plus simples.

96. La méthode d'intégration par substitution peut aussi s'appliquer avec succès aux fonctions transcendantes.

Toute différentielle de la forme

$$F(\sin x, \cos x)\,dx,$$

dans laquelle F désigne une fonction rationnelle, peut être rendue rationnelle par rapport à x. Si l'on pose en effet

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z,$$

on a

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

et la substitution de ces valeurs rendra la différentielle rationnelle par rapport à z.

97. La méthode précédente est générale, mais on peut souvent recourir à d'autres artifices plus avantageux.

Soit, par exemple, la différentielle

$$\frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}.$$

On peut l'écrire

$$\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a\,\mathrm{tang}^2 x + b};$$

et, en posant

$$\mathrm{tang}\, x = z,$$

elle devient

$$\frac{dz}{az^2 + b},$$

qui s'intègre aisément.

98. La différentielle

$$\frac{dx}{a + b\cos x}$$

s'intègre de deux manières différentes, selon l'ordre de grandeur absolue des paramètres a et b : lorsque $\frac{a}{b}$ est en valeur absolue moindre que l'unité, on peut poser $\frac{a}{b} = \cos\alpha$, et l'on a

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x},$$

et l'intégrale a été donnée (91). Elle s'applique à tous les cas; mais il vaut mieux ne pas l'employer lorsque $\cos\alpha$ est plus grand que l'unité, parce qu'alors α est imaginaire.

Lorsque $\frac{a}{b}$ surpasse l'unité, on peut poser $\frac{b}{a} = \cos\alpha$, et l'on a

$$\frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{a}\,\frac{dx}{1 + \cos\alpha\cos x}.$$

Mais

$$\frac{1}{1 + \cos\alpha\cos x} = \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{(1 + \cos\alpha\cos x)^2} = \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{1 + 2\cos\alpha\cos x + \cos^2\alpha\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{(\cos\alpha + \cos x)^2 + \sin^2\alpha\sin^2 x} = \frac{\frac{1 + \cos\alpha\cos x}{(\cos\alpha + \cos x)^2}}{1 + \frac{\sin^2\alpha\sin^2 x}{(\cos\alpha + \cos x)^2}};$$

mais on a

$$d\,\frac{\sin\alpha\sin x}{\cos\alpha+\cos x}=\sin\alpha\,\frac{1+\cos\alpha\cos x}{(\cos\alpha+\cos x)^2}\,dx,$$

par conséquent

$$\int\frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\alpha\sin x}{\cos\alpha+\cos x}=\frac{2}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right).$$

99. L'expression plus générale

$$\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$$

se ramène aisément à la précédente. En faisant

$$\frac{b}{c}=\cot\alpha,$$

elle devient en effet

$$\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)};$$

et en posant $x-\alpha=z$, on rentre dans le cas précédent.

100. Citons encore les deux formules

$$\int\frac{dx}{\sin\alpha+\sin x}=\frac{1}{\cos\alpha}\,l\,\frac{\sin\dfrac{x+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{x-\alpha}{2}},$$

$$\int\frac{dx}{1+\sin\alpha\sin x}=\frac{2}{\cos\alpha}\operatorname{arc\,tang}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

qui peuvent se déduire des précédentes ou s'obtenir directement par des moyens semblables.

101. La différentielle

$$\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$$

peut s'intégrer par des réductions successives.

Posons en effet

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\int\frac{B+C\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,dx,$$

A, B, C étant trois constantes, que nous déterminerons de manière à rendre les deux membres identiques. En différentiant les deux membres de l'équation, et

identifiant les résultats, on trouve

$$1 = A\cos x(a + b\cos x) + (n-1)Ab\sin^2 x + (B + C\cos x)(a + b\cos x);$$

en remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, et remarquant que l'équation doit avoir lieu quel que soit $\cos x$, on en déduit

$$\begin{aligned}(n-1)Ab + Ba &= 1,\\ Aa + Bb + Ca &= 0,\\ A - (n-1)A + C &= 0,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$A = \frac{1}{n-1}\frac{b}{b^2 - a^2},\quad B = \frac{a}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{n-2}{n-1}\frac{b}{b^2 - a^2},$$

et la formule de réduction est

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{b}{a^2 - b^2}\frac{\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\frac{1}{a^2 - b^2}\int \frac{(n-1)a - (n-2)b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{(n-1)a - (n-2)b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} = \frac{-(n-2)}{(a + b\cos x)^{n-2}} + \frac{(2n-3)a}{(a + b\cos x)^{n-1}},$$

et la formule devient

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = -\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}},$$

et par l'application répétée de cette formule, quel que soit l'exposant entier n, on le ramènera à l'unité.

On trouve ainsi

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} = \frac{b\sin x}{(b^2 - a^2)(a + b\cos x)} - \frac{a}{a^2 - b^2}\int \frac{dx}{a + b\cos x},$$

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^3} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^2}\left[\frac{(b^2 - a^2)b\sin x}{2(a + b\cos x)^2} - \frac{3ab\sin x}{2(a + b\cos x)}\right] + \frac{2a^2 + b^2}{2(b^2 - a^2)^2}\int \frac{dx}{a + b\cos x},$$

et ainsi de suite.

102. L'intégrale

$$\int \frac{dx\cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}$$

peut être ramenée, comme il suit, à celle d'une différentielle rationnelle. Considérons la différentielle

$$\frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\,dx}{\sqrt[n]{\cos nx}},$$

et posons

$$\frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\sqrt[n]{\cos nx}} = u;$$

on en déduira

$$\frac{\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx}{\cos nx} = 1 + \sqrt{-1}\tang nx = u^n,$$

et par conséquent

$$\tang nx = \sqrt{-1}\,(1 - u^n),$$

$$n\,dx\,(1 + \tang^2 nx) = -\,nu^{n-1}\sqrt{-1}\,du,$$

$$dx = \frac{-\sqrt{-1}\,u^{n-1}\,du}{2u^n - u^{2n}},$$

$$dx = \frac{-\sqrt{-1}\,du}{u(2 - u^n)};$$

l'expression

$$u\,dx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\,dx}{\sqrt[n]{\cos nx}}$$

est donc transformée en une différentielle rationnelle

$$\frac{-\sqrt{-1}\,du}{2 - u^n}.$$

On devra, après l'avoir intégrée, remplacer u par sa valeur, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera

$$\int \frac{dx\cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}.$$

103. Soient encore les différentielles

$$\frac{\cos px\,dx}{\cos nx},$$

$$\frac{\sin px\,dx}{\cos nx},$$

où n et p désignent des nombres entiers. La première est la partie réelle et l'autre le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\cos nx}\,dx.$$

On a identiquement, en multipliant les deux termes par $\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$,

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\cos nx} = 2\,\frac{\cos(p+n)x + \sqrt{-1}\sin(p+n)x}{1 + \cos 2nx + \sqrt{-1}\sin 2nx}.$$

Si donc on pose

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = z,$$

$$dx\left(-\sin x + \sqrt{-1}\cos x\right) = z\sqrt{-1}\,dx = dz,$$

on aura

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\cos nx}\,dx = \frac{2\,dz\,z^{p+n}}{z\sqrt{-1}\,(1+z^{2n})},$$

et le calcul est ramené par conséquent à la recherche d'une intégrale rationnelle.

104. Un artifice analogue permet d'intégrer les différentielles

$$\frac{\cos px\,dx}{\sin nx},$$

$$\frac{\sin px\,dx}{\sin nx},$$

qui se déduiront évidemment de

$$\int \frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\sin nx}\,dx.$$

Or on a, en multipliant par $\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx$,

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\sin nx} = 2\,\frac{-\left[\cos(p-n)x + \sqrt{-1}\sin(p-n)x\right]\sqrt{-1}}{1 - \cos 2nx + \sqrt{-1}\sin 2nx}.$$

Si donc on pose

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = z,$$

et par conséquent

$$dx = \frac{dz}{z\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1}\sin px}{\sin nx}\,dx = \frac{-z^{p-n}dz}{z\left(1 - \frac{1}{z^{2n}}\right)} = \frac{z^{p+n-1}\,dz}{1 - z^{2n}},$$

et l'intégration est ramenée par conséquent encore à celle d'une fraction rationnelle.

CHAPITRE V.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE CERTAINES INTÉGRATIONS.

105. Le nombre extrêmement limité des différentielles que l'on sait intégrer ne s'est pas accru d'une manière notable depuis les premières études sur le calcul intégral, et tout porte à croire que la plupart des intégrations sont impossibles à l'aide du petit nombre de signes analytiques choisis pour représenter les fonctions arbitrairement nommées *fonctions simples*. Plusieurs Géomètres, en étudiant cette question, ont obtenu des résultats remarquables dont les plus simples font l'objet de ce chapitre.

Théorème d'Abel.

106. En désignant par y une fonction algébrique de la variable x, c'est-à-dire une fonction définie par une équation rationnelle

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

si l'intégrale

$$\int y\,dx$$

est elle-même une fonction algébrique de x, elle est exprimable par une fonction entière de y dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x.

Admettons en effet, ce qui évidemment est toujours permis, que la fonction $F(x, y) = 0$, qui définit la fonction y, soit irréductible, c'est-à-dire du moindre degré possible par rapport à y, posons

$$\int y\,dx = u,$$

y désignant une fonction qu'il faut considérer comme parfaitement déterminée entre les limites de l'intégration et qui devra être distinguée par des indications suffisantes des autres solutions de l'équation (1).

Admettons qu'il existe entre x, y et u une relation algébrique

$$\varphi(x, y, u) = 0, \tag{2}$$

que l'on peut toujours, comme on sait, supposer rationnelle et irréductible par rapport à u.

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} = 0; \tag{3}$$

l'équation (1) donne d'ailleurs

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

En éliminant entre ces deux équations la dérivée $\frac{dy}{dx}$ et remplaçant $\frac{du}{dx}$ par sa valeur y, on obtiendra une relation de la forme

$$\psi(x, y, u) = 0. \tag{5}$$

L'équation (2) étant irréductible, il résulte d'un théorème bien connu d'algèbre, que les équations (2) et (5) ne peuvent être satisfaites par une même fonction u, sans que toutes les solutions de (2) satisfassent également à l'équation (5). Mais y étant toujours la fonction déterminée de x dont l'intégrale est représentée par u, si u_1 désigne une racine quelconque de l'équation (2), on aura

$$\varphi(x, y, u_1) = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{du_1}\frac{du_1}{dx} = 0.$$

L'équation (5), à laquelle satisfait u_1, équivaut à

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{du_1}y = 0,$$

dont la comparaison avec la précédente donne évidemment

$$\frac{du_1}{dx} = y.$$

Toutes les racines de l'équation (5), et par suite celles de (2), ont donc même dérivée par rapport à x, et par conséquent deux quelconques d'entre elles ont une différence constante. L'une de ces constantes étant considérée comme connue, on peut, en l'introduisant dans le calcul, abaisser le degré de l'équation (2), qui, contrairement à l'hypothèse, ne serait pas alors irréductible, et il faut, pour échapper à la contradiction, qu'elle soit de premier degré en u.

107. La seule forme possible de l'intégrale u est, d'après la démonstration précédente,

$$u = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}, \tag{6}$$

f_1 et f_2 désignant deux fonctions entières de x et de y.

Quelles que soient ces fonctions, l'équation

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

à laquelle satisfait y, permet de transformer l'expression de u en éliminant y de son dénominateur.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les diverses racines de l'équation (1) et y_1 celle à laquelle se rapportent l'intégration et la forme de l'intégrale que nous étudions, on aura

$$u = \frac{f_1(x, y_1)}{f_2(x, y_1)} = \frac{f_1(x, y_1) f_1(x, y_2) \ldots f_1(x, y_n)}{f_2(x, y_1) f_2(x, y_2) \ldots f_2(x, y_n)},$$

et le dénominateur, fonction symétrique de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, est exprimable rationnellement en x; quant au numérateur, on remarquera, pour le transformer, que y_2, $y_3, \ldots, y_n$ sont les racines de l'équation rationnelle

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = 0,$$

dont les coefficients contiennent x et y_1. Le produit

$$f_2(x, y_2) f_2(x, y_3) \ldots f_2(x, y_n)$$

peut donc s'exprimer en fonction entière de x et de y_1, et, par conséquent enfin, u est une fonction rationnelle de x et de y_1 entière par rapport à y_1. Il est clair d'ailleurs que si l'équation (1) est de degré n en y, on pourra s'en servir pour éliminer de u, y^n et les puissances supérieures de y qui se déduiront de l'équation (1) elle-même et de celles que l'on obtient en la multipliant par $y, y^2, y^3, \ldots$, en sorte que la seule expression possible de l'intégrale u est, lorsqu'on la suppose algébrique,

$$u = P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \ldots + P_{n-1} y^{n-1},$$

$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de x que l'on pourra chercher par la méthode des coefficients indéterminés, qui, dans l'immense majorité des cas, montrera l'impossibilité d'une intégrale algébrique.

108. La démonstration précédente suppose essentiellement la présence de la fonction y dans l'intégrale que nous avons désignée par u, et il ne semble pas, par

conséquent, qu'elle puisse rien apprendre sur la forme des intégrales exprimables en fonction de x seulement; mais cette difficulté n'est qu'apparente, et un peu d'attention suffit pour le montrer. Lorsque l'on a, en effet,

$$F(x, y) = 0,$$
$$\varphi(u, x) = 0,$$

on peut, d'une infinité de manières, déduire de ces deux équations une relation entre x, y et u, et comme cette introduction de y peut se faire sans changer le degré par rapport à u, la condition d'avoir une équation irréductible par rapport à cette inconnue, c'est-à-dire de moindre degré possible, peut évidemment être remplie pour une relation de la forme qui a été admise dans la démonstration précédente.

109. Considérons, pour premier exemple, l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{x}, \tag{7}$$

égale, comme on sait, au logarithme Népérien de x, et cherchons, s'il est possible, de l'exprimer algébriquement. Comme on a ici

$$y = \frac{1}{x},$$

l'intégrale u, si elle est exprimable algébriquement, doit être, d'après le théorème précédent, une fonction rationnelle de x, et l'on doit avoir par conséquent, dans cette hypothèse,

$$lx = \frac{\varphi(x)}{F(x)}, \tag{8}$$

$\varphi(x)$ et $F(x)$ désignant des fonctions entières de x : une telle identité est évidemment impossible. Si l'on y suppose en effet x infini, on voit que les deux membres ne peuvent pas être des infinis de même ordre, la fonction $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, devenant infinie avec x, est, en effet, au moins comparable à x, et lx est infiniment plus petit.

110. La démonstration précédente suppose que l'expression de lx soit applicable à toutes les valeurs de x. On peut se demander s'il est possible qu'elle soit exacte entre certaines limites seulement, mais une telle supposition n'est pas admissible. Si l'équation

$$lx = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$$

était exacte en effet pour les valeurs de x comprises entre deux limites données, les

dérivées des deux membres seraient égales, et l'on aurait, entre les mêmes limites,

$$\frac{1}{x} = \frac{\varphi'(x)\,F(x) - F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)^2}. \tag{9}$$

Cette équation algébrique, ayant lieu pour un nombre infini de valeurs de x, est nécessairement identique. Les deux membres de (8) ont donc même dérivée, quelle que soit x, et diffèrent par conséquent par une constante, qui, évidemment, est ici égale à zéro.

111. Soit, en second lieu, l'intégrale

$$\int dx \sqrt[m]{X}, \tag{10}$$

X désignant une fonction rationnelle de x. On a, dans ce cas,

$$y^m = X, \tag{11}$$

et si l'intégrale est algébrique, on aura (**107**)

$$\int dx \sqrt[m]{X} = P_0 + P_1 \sqrt[m]{X} + P_2 (\sqrt[m]{X})^2 + \ldots + P_{m-1} (\sqrt[m]{X})^{m-1}, \tag{12}$$

P_0, P_1,..., P_{m-1} étant des fonctions rationnelles de x.

On peut prouver que toutes ces fonctions sont nécessairement nulles à l'exception de P_1.

L'équation (12) donne en effet, par la différentiation, en y remplaçant $\sqrt[m]{X}$ par y,

$$\begin{aligned} y = \frac{dP_0}{dx} + y\frac{dP_1}{dx} + y^2\frac{dP_2}{dx} + \cdots \\ + y^{m-1}\frac{dP_{m-1}}{dx} + \frac{dy}{dx}\left[P_1 + 2P_2 y + \ldots + (m-1)P_{m-1}y^{m-2}\right], \end{aligned} \tag{13}$$

et comme on déduit de (11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dX}{dx}}{my^{m-1}}, \tag{14}$$

l'équation (13) fournit une relation rationnelle entre x et y, qui, d'après un théorème bien connu d'algèbre, doit admettre, quand on y considère y comme inconnue, toutes les racines de l'équation (11). On a donc le droit d'y remplacer y par $y\alpha$, α étant l'une quelconque des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et l'on aura par conséquent, en intégrant les deux membres après les avoir multipliés par dx,

$$\alpha \int y\,dx = P_0 + P_1 \alpha y + P_2 \alpha^2 y^2 + \ldots + P_{m-1} \alpha^{m-1} y^{m-1};$$

multipliant par α^{m-1} et faisant la somme des équations analogues relatives aux m valeurs de α, en remarquant que, pour toute valeur de p inférieure à m, on a

$$1 + \alpha^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_{m-1}^p = 0,$$

nous aurons

$$m \int y\, dx = m P_1 y, \tag{15}$$

et, par conséquent, tous les termes du second membre de (12) sont nuls, à l'exception du second $P_1 y$.

112. M. Liouville, qui a obtenu le résultat précédent, a prouvé en outre que l'intégrale supposée possible sous la forme trouvée, peut être ramenée à ne contenir pour inconnue qu'un polynôme entier.

Reprenons l'équation

$$\int \sqrt[m]{X}\, dx = P_1 \sqrt[m]{X}, \tag{16}$$

où X et P_1 représentent des fonctions rationnelles de x.

Posons

$$X = \frac{M}{N},$$

M et N étant des polynômes entiers, on a

$$\sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{\frac{M}{N}} = \frac{M}{\sqrt[m]{M^{m-1} N}} = \frac{M}{\sqrt[m]{T}}.$$

On pourra poser de même

$$P_1 \sqrt[m]{X} = \frac{\theta}{\sqrt[m]{T}},$$

θ étant une fonction rationnelle de x. Soit donc

$$\int \frac{M\, dx}{\sqrt[m]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[m]{T}},$$

M et T étant deux polynômes entiers donnés, et θ une fonction rationnelle inconnue.

On trouve par la différentiation, après avoir chassé les dénominateurs,

$$MT = T \frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{m} \theta \frac{dT}{dx}. \tag{17}$$

En considérant dans cette équation θ comme inconnue, on peut prouver que les

seules solutions rationnelles sont entières. Supposons en effet

$$\theta = \frac{U}{V},$$

U et V étant des polynômes entiers. Nous ferons voir que V ne contient pas x, en démontrant qu'il ne peut être divisible par aucun facteur linéaire de la forme $(x + a)$. Posons en effet, s'il est possible,

$$V = W(x + a)^{\alpha},$$

W étant, bien entendu, un polynôme non divisible par $x + a$; nous aurons

$$\theta = \frac{U}{W(x + a)^{\alpha}},$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha U}{W(x + a)^{\alpha+1}} + \frac{WU' - UW'}{W^2(x + a)^{\alpha}},$$

et l'équation (17) devient

$$(18) \qquad W^2MT(x + a)^{\alpha} = -\frac{\alpha TUW}{(x + a)} + (WU' - UW')T - \frac{1}{m}UW\frac{dT}{dx}.$$

Cette équation prouve que le produit TUW doit être divisible par $x + a$, et comme ce binôme ne peut diviser ni U, qui est premier avec V, ni W, il est nécessaire qu'il divise T. Faisons donc

$$T = (x + a)^p R,$$

R étant premier avec $x + a$.

On aura

$$\frac{dT}{dx} = (x + a)^p \frac{dR}{dx} + pR(x + a)^{p-1}.$$

En substituant les valeurs de T et de $\frac{dT}{dx}$ et divisant par $(x + a)^p$, l'équation (18) devient

$$W^2MR(x + a)^{\alpha} = -R(WU' - UW') - \frac{UW}{m}\frac{dR}{dx} - \left(\alpha + \frac{p}{m}\right)\frac{UWR}{x + a},$$

égalité absurde, car elle exige que UWR soit divisible par $x + a$, qui, d'après nos suppositions, ne divise ni U, ni W, ni R.

Il est donc enfin prouvé que l'intégrale

$$\int \frac{M\,dx}{\sqrt[m]{T}},$$

où M et T sont des polynômes entiers, si elle est exprimable algébriquement, est nécessairement de la forme

$$\frac{\theta}{\sqrt[m]{T}},$$

θ étant un polynôme entier.

Le degré du polynôme θ doit être, lorsqu'il existe bien entendu, inférieur d'une unité à celui de M. On doit avoir, en effet,

$$\frac{M}{\sqrt[m]{T}} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\sqrt[m]{T}} - \frac{1}{m}\,\frac{\theta\,\frac{dT}{dx}}{T\sqrt[m]{T}};$$

et si dans cette équation on fait croître x indéfiniment, on voit que les deux membres ne peuvent être de même ordre que si $\frac{d\theta}{dx}$ et $\theta\,\frac{\frac{dT}{dx}}{T}$, tous deux évidemment de degré inférieur d'une unité à celui de θ, sont de même degré que M.

D'après cette remarque, la méthode des coefficients indéterminés permettra de trouver l'intégrale, si elle est algébrique, ou de prouver qu'elle est impossible sous cette forme.

113. Cherchons, par exemple, si

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

est exprimable algébriquement.

L'intégrale algébrique, si elle existe, doit, d'après ce qui précède, être de la forme

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\sqrt{1+x^4}},$$

et l'on doit avoir

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3ax^2+2bx+c}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{2x^3(ax^3+bx^2+cx+d)}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

et

$$1 = 3ax^3+2bx+c - \frac{2x^3(ax^3+bx^2+cx+d)}{(1+x^4)},$$

égalité évidemment impossible, car elle exigerait qu'un polynôme de troisième degré fût divisible par $1+x^4$.

Intégrales exprimables par les fonctions algébriques et logarithmiques.

114. Quelles que soient les fonctions algébriques désignées par t, u, v,..., w, la différentielle de

$$t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

où A, B,..., C représentent des constantes, est évidemment algébrique.

L'équation

$$(1) \qquad \int y\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

où y, t, u,..., w sont des fonctions algébriques, est possible, par conséquent, dans un nombre infini de cas.

Abel a prouvé que, lorsqu'elle a lieu, t, u, v,..., w sont toujours exprimables rationnellement en fonction de x et y, et par conséquent (107) en fonction entière de y.

Quelles que soient les fonctions t, u,..., w, on peut toujours trouver une fonction algébrique λ telle, qu'elles puissent toutes s'exprimer en fonction de x, de y et de λ.

t, u, v,..., w sont en effet chacune racine d'une équation rationnelle qui la lie à x, et l'on formera, par la multiplication de ces équations diverses, une équation nouvelle à laquelle toutes ces fonctions satisferont. Si l'on pose alors

$$\lambda = ct + c'u + c''v + \ldots + c'''w,$$

c, c',..., c''' étant des constantes, on pourra, par un théorème connu de Lagrange, exprimer en fonction rationnelle de λ et des coefficients de l'équation, toute fonction semblable des mêmes racines, et par conséquent toute somme formée comme λ, en multipliant ces racines par des constantes inégales, et l'on obtiendra ainsi des équations du premier degré en nombre suffisant pour calculer t, u, v,..., w.

La fonction λ sera racine elle-même d'une équation algébrique dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de x. Supposons plus généralement qu'ils contiennent x et y. Soit $V = 0$ cette équation et μ son degré. Si l'on différentie l'équation

$$(1) \qquad \int y\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$$

après avoir réuni tous ses termes dans le premier membre, on obtiendra une équation

$$\varphi = 0.$$

φ, étant une fonction rationnelle de x, y, t, $u, \ldots, w$, peut s'exprimer en fonction rationnelle de x, y et λ, et si l'on suppose l'équation

$$V = 0$$

irréductible par rapport à λ, l'équation nouvelle

$$\varphi = 0$$

devra nécessairement admettre toutes ses racines, et l'on aura, par conséquent,

$$\int y\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

quelle que soit la valeur de λ, pourvu qu'elle satisfasse à l'équation irréductible $V = 0$, qui lui sert de définition.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$, $v_1, v_2, \ldots, v_\mu, \ldots$, $w_1, w_2, \ldots, w_\mu$ les valeurs des fonctions t, u, $v, \ldots, w$ qui correspondent aux diverses valeurs de λ. L'équation

$$\int y\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$$

donnera, pour le premier membre, qui reste toujours le même, μ expressions de même forme, et l'on aura, en les ajoutant,

$$\mu \int y\,dx = t_1 + t_2 + \ldots + t_\mu + A \log u_1 u_2 \ldots u_\mu + B \log v_1 v_2 \ldots v_\mu + \ldots + C \log w_1 w_2 \ldots w_\mu.$$

Mais, par la théorie des fonctions symétriques,

$$\begin{array}{c} t_1 + t_2 + \ldots + t_\mu, \\ u_1 u_2 \ldots u_\mu, \\ v_1 v_2 \ldots v_\mu, \\ \ldots\ldots \quad \ldots \\ w_1 w_2 \ldots w_\mu \end{array}$$

peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de x et de y, et par conséquent si $\int y\,dx$ peut s'exprimer par une somme de la forme (1), les diverses fonctions qui y figurent peuvent être remplacées par des fonctions rationnelles de x et de y.

115. M. Liouville est allé plus loin encore, en prouvant que y étant une fonction algébrique de x, si l'intégrale $\int y\,dx$ est exprimable explicitement sous forme finie à l'aide de signes algébriques exponentiels et logarithmiques, il sera toujours

permis de supposer

$$\int y\,dx = t + \mathrm{A}\log u + \mathrm{B}\log v + \ldots + \mathrm{C}\log w,$$

A, B,..., C étant des constantes et t, u, v,..., w des fonctions algébriques de x.

Nous nous bornerons à rapporter la démonstration relative au cas où l'intégrale est supposée exprimable par une fonction appartenant à la classe de celles que que M. Liouville nomme *fonctions transcendantes de première espèce*, et dans laquelle les signes relatifs aux opérations transcendantes (logarithmes et exponentielles) ne portent que sur des fonctions algébriques.

Soit donc supposé

$$(2) \qquad \int y\,dx = f(x, e^u, e^v, \ldots, \log w, \ldots),$$

u, v, ..., w,... désignant des fonctions algébriques de x, et le signe f une fonction algébrique des diverses quantités sur lesquelles il porte. Nulle relation algébrique ne peut évidemment exister entre x, e^u, e^v,..., $\log w$,..., car on pourrait sans cela considérer l'une d'elles comme fonction algébrique des autres et la supprimer, $\int y\,dx$ étant exprimable alors en fonction algébrique d'un moindre nombre d'expressions simples.

D'après cette remarque, si l'on trouve une relation algébrique, telle que

$$\mathrm{F}(x, e^u, e^v, \ldots, \log w, \ldots) = 0,$$

elle ne pourra contenir e^u, e^v,... qu'en apparence, et devra être satisfaite indépendamment des valeurs de ces fonctions, c'est-à-dire quand bien même on les remplacerait soit par d'autres fonctions de x tout à fait arbitraires, soit par de simples lettres indéterminées.

Ce principe étant admis, on peut démontrer d'abord que l'expression de l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut contenir aucune exponentielle. Soit, en effet, $e^u = \theta$, une des exponentielles que l'on suppose devoir y entrer; et, pour la mettre en évidence, écrivons simplement

$$(3) \qquad \int y\,dx = \varphi(x, \theta),$$

la fonction $\varphi(x, \theta)$ pouvant contenir algébriquement des exponentielles autres que θ et certains logarithmes qu'il est inutile de désigner explicitement. La différentiation de (3) donne

$$y = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta u',$$

relation algébrique entre les transcendantes monômes que $\varphi(x, \theta)$ renferme, et dans laquelle on pourra, par conséquent, d'après ce qu'on a vu, écrire $\mu\theta$ à la place de θ, μ étant une constante arbitraire. La nouvelle valeur de y qui résulte de ce changement doit être égale à l'ancienne, et l'on a, par conséquent,

$$\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\mu\theta u' = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)u'\theta,$$

et en multipliant les deux membres par dx et en les intégrant,

$$\varphi(x, \mu\theta) = \varphi(x, \theta) + C. \tag{4}$$

Pour chaque valeur numérique de μ, la constante C a une valeur déterminée, et l'équation (4), qui est algébrique, doit avoir lieu, quel que soit θ et indépendamment de sa liaison avec x; on a donc *identiquement*, en remplaçant C par $\psi(\mu)$,

$$\varphi(x, \mu\theta) = \varphi(x, \theta) + \psi(\mu).$$

Dans cette équation, qui a lieu indépendamment de la relation qui lie x à θ, on peut considérer x comme une constante, ainsi que les autres transcendantes qui n'ont pas été explicitement mentionnées. Posons, pour mettre cette supposition en évidence,

$$\varphi(x, \theta) = F(\theta),$$

on aura

$$F(\mu\theta) = F(\theta) + \psi(\mu).$$

Dans cette équation, θ étant arbitraire, on peut le remplacer par l'unité, et l'on en déduira

$$\psi(\mu) = F(\mu) - F(1),$$

et, par conséquent,

$$F(\mu\theta) = F(\mu) + F(\theta) - F(1).$$

Il est aisé de déduire de cette équation la forme de la fonction F : en différentiant, en effet, par rapport à μ, puis par rapport à θ, on en déduit

$$\theta F'(\mu\theta) = F'(\mu),$$
$$\mu F'(\mu\theta) = F'(\theta),$$

et, par conséquent,

$$\mu F'(\mu) = \theta F'(\theta).$$

Le produit $\theta F'(\theta)$ est donc une constante C indépendante de la variable θ, et $F'(\theta)$ est égal à $\frac{C}{\theta}$; d'où l'on conclut

$$F(\theta) = Cl\theta + C',$$

et en remplaçant θ par la valeur primitive e^u

$$F(\theta) = Cu + C',$$

en sorte que l'exponentielle e^u n'entre pas réellement dans la fonction F et la transcendante θ n'entre pas réellement dans l'expression de $\int y\,dx$.

116. L'intégrale explicite d'une fonction algébrique, lorsqu'elle est une fonction transcendante de première espèce, ne peut donc contenir que des logarithmes, et nous allons prouver qu'ils n'y peuvent figurer que sous forme linéaire.

Soit, en effet, $\theta = lu$ un de ces logarithmes. Posons, pour le mettre en évidence,

$$(5) \qquad \int y\,dx = \varphi(x, \theta).$$

On en déduit

$$(6) \qquad y = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u},$$

équation dont le second membre ne doit plus contenir θ qu'en apparence, car elle serait sans cela une relation algébrique entre les diverses transcendantes (**115**) qui n'en peuvent avoir. Il est donc permis de remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire, et l'on aura

$$(7) \qquad \varphi'_x(x, \mu + \theta) + \varphi'_\theta(x, \mu + \theta)\frac{u'}{u} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(8) \qquad \varphi(x, \mu + \theta) = \varphi(x, \theta) + \text{const.}$$

Cette relation étant algébrique, elle doit, pour chaque valeur de μ, avoir lieu identiquement; mais la constante peut changer avec μ. Posons $C = \psi(\mu)$, et, comme dans le cas précédent, posons

$$\varphi(x, \theta) = F(\theta),$$

en considérant x comme une constante, ce qui est permis, puisque la relation (8), étant algébrique, a lieu indépendamment de la relation qui lie x à θ. On aura alors

$$F(\mu + \theta) = F(\theta) + \psi(\mu),$$

et en faisant $\theta = 0$

$$F(\mu) = F(0) + \psi(\mu),$$

par conséquent,

$$F(\mu + \theta) = F(\mu) + F(\theta) - F(0).$$

En différentiant par rapport à μ, puis par rapport à θ, on en déduit

$$F'(\mu) = F'(\theta).$$

La dérivée $F'(\theta)$ est donc constante et $F(\theta)$ de la forme

$$C\theta + C',$$

C et C' étant indépendants de θ, mais pouvant renfermer x et les autres transcendantes.

Posons donc

$$\int y\,dx = \theta F_1(x) + F_2(x).$$

Si l'on remplace, comme il est permis, θ par $\theta + \mu$, on devra avoir

$$\int y\,dx = (\theta + \mu) F_1(x) + F_2(x),$$

et cette équation n'est compatible avec la précédente que si $F_1(x)$ est une constante.

Il est donc prouvé enfin que la transcendante $\theta = \log u$ ne peut entrer dans la valeur $\int y\,dx$ que sous forme linéaire et avec un coefficient constant A, en sorte que l'expression de cette intégrale, si elle est possible explicitement par une fonction transcendante de première espèce, est de la forme

$$\int y\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w,$$

A, B,..., C étant des constantes, et t, u, v,..., w des fonctions algébriques. Il reste à prouver, pour compléter la démonstration du théorème, que l'intégrale $\int y\,dx$ d'une fonction algébrique ne peut être exprimée par aucune fonction transcendante d'espèce supérieure à la première.

117. Nous indiquerons suffisamment la marche à suivre dans tous les cas en faisant voir que cette intégrale ne peut être une fonction transcendante de seconde espèce.

En supposant, ce qui est permis, que les transcendantes monômes de seconde espèce contenues dans $\int y\,dx$ aient été réduites au moindre nombre possible, en sorte que nulle équation algébrique ne puisse les lier ensemble et avec des transcendantes d'un ordre inférieur, on prouvera absolument, comme (**115**), que, u_1 désignant une transcendante de première espèce, l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut pas con-

tenir dans ses expressions explicites e^{u_1}, et que si lu_1 y figure, ce ne peut être que sous forme linéaire et multiplié par une constante.

Posons donc, s'il est possible,

$$(9) \qquad \int y\,dx = t_1 + \mathrm{A}\log u_1 + \mathrm{B}\log v_1 + \ldots + \mathrm{C}\log w_1,$$

$t_1, u_1, \ldots, w_1$ étant des fonctions transcendantes de première espèce, et A, B,..., C des constantes.

Or nous allons prouver que ces transcendantes prétendues ne peuvent contenir ni exponentielles ni logarithmes et sont par conséquent des fonctions algébriques. Soit en effet $\theta = e^u$, u étant algébrique, et supposons que θ figure dans les expressions de $t_1, u_1, \ldots, w_1$; posons pour la mettre en évidence

$$t_1 = f(x, \theta), \quad u_1 = \mathrm{F}(x, \theta), \quad v_1 = \varphi(x, \theta), \ldots, \quad w_1 = \psi(x, \theta),$$

et, par conséquent,

$$(10) \qquad \int y\,dx = f(x, \theta) + \mathrm{A}\log\mathrm{F}(x, \theta) + \ldots + \mathrm{C}\log\psi(x, \theta);$$

on en déduit, par la différentiation,

$$(11) \qquad y = f'_x(x, \theta) + f'_\theta(x, \theta)\theta u' + \mathrm{A}\frac{\mathrm{F}'_x(x, \theta) + \mathrm{F}'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\mathrm{F}(x, \theta)} + \ldots.$$

Cette équation, qui ne contient plus de transcendante de seconde espèce, est nécessairement identique par rapport à θ. Elle permettrait en effet, sans cela, de considérer θ comme une fonction algébrique des autres transcendantes de première espèce qui figurent dans (9), et d'en réduire par conséquent le nombre. Le second membre de (11) est donc égal à l'expression qu'on obtient en y remplaçant θ par $\mu\theta$, et si l'on intègre les deux membres de l'équation ainsi formée, on en déduira, en désignant le second membre de (10) par $\pi(\theta)$,

$$\pi(\mu\theta) = \pi(\theta) + \text{const.},$$

la constante étant une fonction de μ, égale évidemment à $\pi(\mu) - \pi(1)$.

On a donc enfin

$$\pi(\mu\theta) = \pi(\mu) + \pi(\theta) - \pi(1),$$

et cette équation prouve, comme (**115**), que $\pi(\theta)$ est de la forme $k\log\theta$, k étant indépendant de θ; mais, d'après la valeur e^u de θ, $\log\theta$ est algébrique, et l'exponentielle considérée ne figure donc pas véritablement dans l'intégrale.

118. Considérons en second lieu un logarithme et posons

$$\log u = \theta,$$

u étant algébrique.

Soit, s'il est possible,

$$(12) \qquad \int y\,dx = f(x, \theta) + \mathrm{A}\log \mathrm{F}(x, \theta) + \mathrm{B}\log\varphi(x, \theta) + \ldots + \mathrm{C}\log\psi(x, \theta).$$

En différentiant les deux membres, on obtiendra encore une relation algébrique entre θ et les autres transcendantes, qui, pour la raison déjà plusieurs fois indiquée, devra être identique par rapport à θ. On y pourra, par conséquent, remplacer θ par $\mu + \theta$, et en intégrant les équations obtenues en égalant les deux valeurs ainsi formées par y, on verra qu'en désignant par $\pi(\theta)$ le second membre de (12), et traitant θ comme une variable indépendante de x, on a

$$\pi(\mu + \theta) = \pi(\theta) + \mathrm{C},$$

la constante variant avec la valeur de μ, et devant être évidemment égale à $\pi(\mu) - \pi(0)$. Or l'équation

$$\pi(\mu + \theta) = \pi(\mu) + \pi(\theta) - \pi(0)$$

montre que $\pi(\theta)$ est de la forme $k\theta$, k étant une constante; c'est-à-dire, d'après le point de vue où nous nous plaçons en représentant l'intégrale par $\pi(\theta)$ une fonction de x indépendante de θ, on aura

$$\int y\,dx = k\theta + f(x),$$

k et $f(x)$ ne contenant pas θ. Mais comme il est permis, d'après ce qui a été dit, de remplacer θ par $\theta + \mu$, il faut nécessairement que k soit une constante, et enfin θ ne peut figurer qu'au premier degré et multiplié par une constante, il ne se trouve donc sous aucun signe logarithmique, et sa présence dans l'intégrale ne rend pas la transcendante de seconde espèce.

119. Lorsque l'intégrale d'une différentielle algébrique $y\,dx$ est exprimable explicitement à l'aide des fonctions simples précédemment considérées, elle est nécessairement de la forme

$$\int y\,dx = t + \mathrm{A}\log u + \mathrm{B}\log v + \ldots + \mathrm{C}\log w,$$

A, B,..., C étant des constantes, et t, u,..., w des fonctions algébriques. Si l'on suppose que les logarithmes qui figurent dans le second membre aient été réduits

au moindre nombre possible, le rapport de deux des constantes A, B,..., C ne peut être rationnel. Si l'on suppose en effet

$$A = Br,$$

r étant rationnel, il en résulte

$$A \log u + B \log v = B \log vu^r,$$

et l'on peut par conséquent réduire à un seul les deux logarithmes $\log u$, $\log v$. Il est permis en outre de rejeter comme impossible toute relation de la forme

$$Aa + Bb + \ldots + Cc = 0,$$

a, b,..., c étant des nombres rationnels; on en déduirait en effet

$$A = -\frac{Bb}{a} - \ldots - \frac{Cc}{a},$$

et par suite

$$\int y\,dx = t + B \log\left(vu^{-\frac{b}{a}}\right) + \ldots + C \log\left(wu^{-\frac{c}{a}}\right),$$

et le nombre des logarithmes contenus dans l'expression de $\int y\,dx$ pourrait, contrairement à notre hypothèse, être diminué d'une unité.

120. La formule

$$\int y\,dx = t + A \log u + A \log v + \ldots + C \log w$$

étant réduite, comme nous l'avons dit, au moindre nombre de termes possible, Abel a démontré, par des raisonnements analogues à ceux qui ont été rapportés (114), que chacune des fonctions t, u, v,..., w est exprimable rationnellement en fonction de x et de y.

Imaginons, en effet, comme (114), une fonction λ telle, que toutes les fonctions t, u, v,..., w se puissent exprimer rationnellement en λ, x et y, λ étant une fonction algébrique et satisfaisant par conséquent à une équation dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x. Nous les supposerons rationnelles en x et en y, ce qui simplifiera le raisonnement.

Soit

$$V = 0$$

l'équation en λ, et μ son degré. Supposons, ce qui est permis, que λ ne puisse être racine d'aucune autre équation de même forme et de degré inférieur à μ.

Différentions l'équation

$$(A) \qquad \int y\,dx - t - A\log u - B\log v - \ldots - C\log w = 0,$$

nous obtiendrons une relation de la forme

$$\varphi = 0,$$

où φ est, d'après ce qui précède, une fonction rationnelle de x, y et λ, et si cette équation $\varphi = 0$ est satisfaite, l'équation

$$\int y\,dx = t + A\log u + B\log v + \ldots + C\log w$$

le sera également. Mais l'équation $\varphi = 0$ étant algébrique en λ, il suit d'un théorème connu qu'elle sera également satisfaite en mettant au lieu de λ une quelconque des racines de l'équation irréductible $V = 0$, et l'équation (A), où t, u,..., w sont des fonctions de x, y et λ, aura lieu par conséquent quelle que soit la valeur de λ, pourvu qu'elle satisfasse à $V = 0$.

En remplaçant successivement λ par les μ valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$, on obtiendra μ équations de même forme qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$\mu\int y\,dx = t_1 + t_2 + \ldots + t_\mu + A\log u_1 u_2 \ldots u_\mu + B\log v_1 v_2 \ldots v_\mu + \ldots + C\log w_1 w_2 \ldots w_\mu,$$

et, par la théorie des fonctions symétriques, on peut évidemment exprimer le second membre sous la forme

$$T + A\log U + B\log V + \ldots + C\log W,$$

où T, U, V,..., W sont des fonctions rationnelles de x et de y.

121. Considérons en particulier l'intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$$

où P et R sont des polynômes entiers quelconques. y étant égal ici à $\frac{P}{\sqrt{R}}$, toute fonction rationnelle de x et de y est évidemment de la forme $\alpha + \beta\sqrt{R}$, ou, si l'on veut, $\eta + \frac{\theta}{\sqrt{R}}$; α, β, η, θ étant des fonctions rationnelles de x, l'intégrale (1), si

elle est exprimable par une fonction explicite, doit être de la forme

$$(2)\quad \int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}} = \eta + \frac{\theta}{\sqrt{R}} + A\log(\alpha+\beta\sqrt{R}) + \beta\log(\gamma+\delta\sqrt{R}) + \ldots + C\log(\rho+\sigma\sqrt{R}).$$

L'équation obtenue en différentiant les deux membres de (2) devant être identiquement satisfaite, et $\sqrt{R}$ n'étant pas par hypothèse exprimable rationnellement, il faut que son coefficient soit nul ainsi que la somme des termes indépendants du radical, et l'on peut, par conséquent, dans l'équation ainsi obtenue, et par suite dans (2), changer $\sqrt{R}$ en $-\sqrt{R}$; on aura ainsi

$$(3)\quad -\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}} = \eta - \frac{\theta}{\sqrt{R}} + A\log(\alpha-\beta\sqrt{R}) + B\log(\gamma-\delta\sqrt{R}) + \ldots,$$

et, en retranchant membre à membre les équations (2) et (3),

$$2\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{2\theta}{\sqrt{R}} + A\log\frac{\alpha+\beta\sqrt{R}}{\alpha-\beta\sqrt{R}} + B\log\frac{\gamma+\delta\sqrt{R}}{\gamma-\delta\sqrt{R}} + \ldots.$$

Telle est la forme la plus générale de l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ lorsqu'elle est exprimable explicitement.

122. Abel a cherché, dans un Mémoire fort élégant, dans quel cas l'intégrale peut se réduire à un seul terme. On a alors

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}} = \log\frac{\alpha+\beta\sqrt{R}}{\alpha-\beta\sqrt{R}},$$

α, β et R étant, de même que P, des fonctions entières de x.

Posons

$$z = \log\frac{\alpha+\beta\sqrt{R}}{\alpha-\beta\sqrt{R}}:$$

on a

$$dz = \frac{d\alpha + d(\beta\sqrt{R})}{\alpha+\beta\sqrt{R}} + \frac{d\alpha - d(\beta\sqrt{R})}{\alpha-\beta\sqrt{R}},$$

ou

$$dz = \frac{(\alpha-\beta\sqrt{R})\,[d\alpha + d(\beta\sqrt{R})] - (\alpha+\beta\sqrt{R})\,[d\alpha - d(\beta\sqrt{R})]}{\alpha^2-\beta^2 R},$$

c'est-à-dire

$$dz = \frac{2\alpha\,d(\beta\sqrt{R}) - 2\beta\sqrt{R}\,d\alpha}{\alpha^2-\beta^2 R}.$$

Or

$$d(\beta\sqrt{R}) = \sqrt{R}\,d\beta + \frac{1}{2}\beta\frac{dR}{\sqrt{R}},$$

donc

$$dz = \frac{\alpha\beta\,dR + 2(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha)R}{(\alpha^2 - \beta^2 R)\sqrt{R}};$$

et en faisant

$$\alpha\beta\frac{dR}{dx} + 2\left(\alpha\frac{d\beta}{dx} - \beta\frac{d\alpha}{dx}\right)R = M,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 R = N,$$

on aura

$$dz = \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}},$$

et par conséquent l'équation

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}} = \log\frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\alpha - \beta\sqrt{R}}$$

est satisfaite si l'on prend $P = \frac{M}{N}$.

En différentiant l'équation

$$N = \alpha^2 - \beta^2 R,$$

on obtient

$$dN = 2\alpha\,d\alpha - 2\beta\,d\beta\,R - \beta^2\,dR,$$

et, en multipliant par α,

$$\alpha\,dN = 2\alpha^2\,d\alpha - 2\alpha\beta\,d\beta\,R - \alpha\beta^2\,dR,$$

et, en remettant pour α^2 sa valeur $N + \beta^2 R$,

$$\alpha\,dN = 2N\,d\alpha + 2\beta^2\,d\alpha\,R - 2\alpha\beta\,d\beta\,R - \alpha\beta^2\,dR,$$

et, d'après l'équation qui définit M,

$$\alpha\,dN = 2N\,d\alpha - \beta M\,dx,$$

ou

$$\beta M = 2N\frac{d\alpha}{dx} - \alpha\frac{dN}{dx},$$

ou

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{\beta}\left(2\frac{d\alpha}{dx} - \alpha\frac{dN}{N\,dx}\right),$$

et, si l'on veut que $\frac{M}{N}$ soit une fonction entière P,

$$\beta P = 2\frac{d\alpha}{dx} - \alpha\frac{dN}{N dx};$$

$\alpha\frac{dN}{N dx}$ doit donc être une fonction entière de x. En faisant

$$N = (x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \ldots (x+a_n)^{m_n},$$

on aura

$$\frac{dN}{N dx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \ldots + \frac{m_n}{x+a_n},$$

donc

$$\alpha\left(\frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \ldots + \frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

doit être une fonction entière, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que le produit $(x+a)(x+a_1)\ldots(x+a_n)$ ne soit facteur de α, et l'on peut écrire

$$\alpha = (x+a)(x+a_1)\ldots(x+a_n)\alpha_1,$$

où α_1 est une fonction entière.

Or

$$N = \alpha^2 - \beta^2 R,$$

donc

$$(x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \ldots (x+a_n)^{m_n} = \alpha_1^2 (x+a)^2 (x+a_1)^2 \ldots (x+a_n)^2 - \beta^2 R,$$

comme R n'a pas de facteurs de la forme $(x+a)^2$ et que l'on peut toujours supposer que α et β n'aient pas de facteur commun, il est clair que

$$m = m_1 = \ldots = m_n = 1,$$

et

$$R = (x+a)(x+a_1)\ldots(x+a_n)R_1,$$

où R_1 est une fonction entière, et N est par conséquent facteur de R. En substituant les expressions de α et de R, dans les équations qui définissent M et N, on aura

$$\alpha_1^2 N - \beta^2 R_1 = 1,$$

$$\frac{M}{N} = \alpha_1 \beta \frac{dR}{dx} + 2\left(\alpha\frac{d\beta}{dx} - \beta\frac{d\alpha}{dx}\right)R_1 = P.$$

La première de ces équations déterminera la forme des fonctions α_1, β, N et R_1, et celles-ci étant déterminées, la seconde donnera enfin la fonction P.

La résolution de l'équation

$$\alpha_1^2 N - \beta^2 R_1 = 1,$$

où α_1, β, R_1 et N sont quatre polynômes inconnus, est un problème d'analyse indéterminée algébrique fort élégamment résolu par Abel, et pour la solution duquel nous renverrons à son Mémoire.

CHAPITRE VI.

CALCUL DIRECT DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Passage de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

123. Lorsqu'on connaît l'intégrale indéfinie d'une différentielle, on peut en déduire l'intégrale définie prise entre des limites données quelconques. Si l'on a

$$(1) \qquad \int \varphi(x)\,dx = F(x) + C,$$

il en résulte

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Cette intégrale représente, comme on l'a dit (2), l'aire comprise entre la courbe dont l'équation est $y = \varphi(x)$ et les deux ordonnées perpendiculaires qui répondent aux abscisses a et b.

La formule (2) suppose, bien entendu, que la fonction $\varphi(x)$ soit déterminée pour chaque valeur de x; et si, par sa définition, elle comporte plusieurs valeurs, il faut adopter celle dont la dérivée est $F(x)$.

Quant à la fonction $F(x)$, elle doit être supposée continue, car sans cela son accroissement total ne serait pas égal à la somme des accroissements infiniment petits qu'elle reçoit successivement, et la formule (2) serait en défaut.

Cette dernière remarque est fort importante. Elle indique, dans certains cas, le choix à faire entre plusieurs valeurs qui, se présentant ensemble, donneraient pour une intégrale bien définie un résultat en apparence indéterminé.

On a, par exemple, en vertu de la formule (2),

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } 1 - \text{arc tang } -1.$$

La fonction arc tang x est mal déterminée : à une même tangente correspondent un nombre infini d'arcs différents. Les deux termes du second membre de (3) sont donc séparément indéterminés, mais leur différence ne l'est pas; elle représente l'accroissement d'un arc qui varie d'une manière continue depuis la valeur pour

laquelle la tangente est -1 jusqu'à celle pour laquelle elle est $+1$. Le premier de ces arcs a pour expression $k\pi - \frac{\pi}{4}$, k étant un nombre entier arbitraire; mais ce nombre étant une fois choisi, on ne doit plus le changer lorsque l'arc augmente jusqu'à la valeur $k\pi + \frac{\pi}{4}$, dont la tangente est $+1$. On a par conséquent, sans aucune ambiguïté,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

124. Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

On a évidemment

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos x},$$

et par conséquent, en appliquant la règle générale,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}} - \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos 0} = \text{arc tang}\,(-\sqrt{2}) - \text{arc tang}\, 1.$$

Pour savoir quel sens il faut attribuer ici aux expressions mal déterminées $\text{arc tang}\,(-\sqrt{2})$ et $\text{arc tang}\, 1$, considérons la fonction $\text{arc tang}\, \frac{1}{\cos x}$ d'où elles proviennent, et prenons arbitrairement pour $x = 0$

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{\cos 0} = \text{arc tang}\, 1 = \frac{\pi}{4}.$$

x variant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, la fonction augmente de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, et il n'y a aucune difficulté; mais si l'on franchit la valeur $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction, qui représentait un arc dont la tangente est très-grande et positive, représente un arc dont la tangente est très-grande et négative. Il faut, par la continuité, prendre cet arc positif et un peu plus grand que $\frac{\pi}{2}$, de sorte que x continuant à croître, on devra, pour $x = \frac{3\pi}{4}$, prendre

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \text{arc tang}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4},$$

et l'on a enfin

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

125. Lorsque la fonction intégrale est discontinue et devient infinie entre les limites de l'intégration, l'intégrale définie n'a plus de sens. Dans ce cas, la fonction intégrée $\varphi(x)$ passe elle-même par l'infini; car lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie de la variable, sa dérivée le devient également. Mais la réciproque n'est pas exacte : la dérivée peut devenir infinie lors même que la fonction demeure finie; l'intégrale ne cesse pas alors d'avoir une signification déterminée.

On a, par exemple,

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right), \tag{5}$$

et cette formule, dont les deux membres sont parfaitement déterminés, reste exacte, lors même que b et a étant de signes contraires comprennent entre eux la valeur zéro de x, pour laquelle la différentielle est infinie.

Si l'on considère en effet les deux intégrales

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right],$$

$$\int_{\varepsilon'}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left(b^{\frac{2}{3}} - \varepsilon'^{\frac{2}{3}}\right),$$

ε et ε' désignant deux nombres positifs, il n'y a pour chacune d'elles aucune difficulté. Lorsque ces nombres tendent vers zéro, les deux intégrales ont respectivement pour limites $-\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}$ et $\frac{3}{2}b^{\frac{2}{3}}$, et leur somme tend évidemment vers

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$$

ce qui démontre la formule (5).

126. Lorsque la fonction intégrale $F(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, l'intégrale définie, somme des accroissements infiniment petits de $F(x)$, n'a plus de signification déterminée et doit être, à moins de définition nouvelle, absolument bannie des calculs et des raisonnements. Il est donc important de savoir décider dans quels cas une intégrale devient infinie en même temps que sa différentielle. La règle suivante est souvent applicable.

Soit

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

l'intégrale considérée. Supposons que pour la valeur $x = \alpha$, comprise entre a et b, $\varphi(x)$ devienne infinie, et que l'on ait

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^n},$$

$\psi(x)$ restant fini lorsque x est égal à α. Si n est égal ou supérieur à l'unité, les deux intégrales

$$\int_a^\alpha \frac{\psi(x)\,dx}{(x-\alpha)^n},$$

$$\int_\alpha^b \frac{\psi(x)\,dx}{(x-\alpha)^n}$$

sont infinies toutes deux, et leur somme est infinie ou indéterminée.

Soient en effet $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon'$ deux limites assez voisines de α pour que, dans chacune des intégrales

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \frac{\psi(x)\,dx}{(x-\alpha)^n},$$

$$\int_{\alpha+\varepsilon'}^\alpha \frac{\psi(x)\,dx}{(x-\alpha)^n},$$

la fonction $\psi(x)$ reste finie et toujours de même signe, et soient M et N les valeurs maxima et minima; les intégrales sont évidemment comprises, la première entre

$$(6) \qquad \mathrm{M}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \frac{dx}{(x-\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \frac{dx}{(x-\alpha)^n},$$

et la seconde entre

$$(7) \qquad \mathrm{M}\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-\alpha)^n};$$

et dans l'hypothèse adoptée, n étant supérieur ou égal à l'unité, toutes ces limites sont infinies.

Si l'on suppose au contraire n moindre que l'unité, les intégrales (6) et (7) sont finies et leur somme ne présente aucune ambiguïté.

La même conclusion s'applique *à fortiori* au cas où, n étant moindre que l'unité,

la fonction $\psi(x)$ est nulle pour $x = \alpha$. Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx\, lx}{\sqrt{x}}$$

a une valeur finie, parce qu'on peut l'écrire

$$\int_0^1 \frac{x^k\, lx\, dx}{x^{k+\frac{1}{2}}};$$

et comme, quel que soit l'exposant positif k, le produit $x^k\, lx$ est nul avec x, si l'on prend k qui est arbitraire compris entre zéro et $\frac{1}{2}$, la règle précédente est applicable et montre que l'intégrale est finie.

Soit encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x\, dx;$$

on peut l'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^k\, l \sin x\, dx}{x^k}.$$

Quelle que soit la valeur positive de k, le produit $x^k\, l \sin x$ devient nul avec x, et par conséquent, en donnant à k une valeur moindre que l'unité, on voit que l'intégrale a une valeur finie.

127. Lorsque l'une des limites de l'intégration est infinie, des considérations analogues aux précédentes permettent souvent de décider si l'intégrale a une valeur finie.

La question ne peut être douteuse que si la fonction intégrée $\varphi(x)$ devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande de la variable.

Soit

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x^n},$$

$\psi(x)$ ayant une valeur déterminée pour une valeur infinie de x. Si l'on suppose qu'à partir d'une valeur x_1 de x, $\psi(x)$ reste constamment inférieur à un nombre M, l'intégrale prise entre les limites x_1 et ∞ sera moindre que

$$M \int_{x_1}^{\infty} \frac{dx}{x^n},$$

et sera par conséquent finie si n est plus grand que l'unité. Lorsque n étant moindre

que l'unité, $\psi(x)$ a une limite différente de zéro, l'intégrale

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{\psi(x)\,dx}{x^n}$$

est évidemment infinie.

128. Il peut arriver que l'intégrale

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

soit finie, lors même que la fonction $\varphi(x)$ devient indéterminée pour une valeur infinie de la variable, mais il faut pour cela que cette fonction change de signe un nombre infini de fois.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx.$$

Lorsque x devient infini, $\sin x^2$ devient indéterminé, et cependant l'aire totale de la courbe, dont l'équation est

$$y = \sin x^2,$$

est finie et déterminée, parce qu'elle se compose évidemment d'une somme de termes alternativement positifs et négatifs et de plus en plus petits, représentant des segments dont la hauteur est constante et égale à l'unité, mais dont la base diminue indéfiniment.

Soit encore l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^n},$$

l'exposant n étant compris entre 0 et 2. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{x^n} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{x^n} + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x\,dx}{x^n} + \cdots;$$

elle se trouve ainsi changée en une série dont les termes alternativement positifs et négatifs décroissent indéfiniment.

Nous devons supposer n moindre que 2, parce que l'on a

$$\frac{\sin x}{x^n} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{x^{n-1}},$$

et si $n - 1$ était égal ou supérieur à l'unité,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{x^n}$$

serait infinie.

129. Lorsque la fonction intégrée devient pour les valeurs infinies de x infiniment plus petite que toute puissance négative de x d'exposant constant, l'intégrale a, *à fortiori*, une valeur finie; telles sont par exemple les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} \cos x\, dx.$$

Valeur principale d'une intégrale.

130. Cauchy a considéré souvent et introduit dans l'énoncé de plusieurs théorèmes des intégrales qui, d'après les règles et les explications précédentes, seraient indéterminées, et auxquelles, à l'aide d'une convention particulière, il donne cependant une signification précise.

C'est ici le lieu de faire connaître cette convention qui, malgré le défaut qu'elle présente de sembler absolument arbitraire, a été très-souvent utile.

Soit l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

dont l'élément devient infini pour la valeur α de x comprise entre a et b. Si, de plus, la fonction $\varphi(x)$ change de signe en devenant infinie, Cauchy nomme *valeur principale* de l'intégrale la limite de l'expression

$$\int_a^{\alpha-\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^b \varphi(x)\, dx,$$

lorsque la lettre ε, qui a la même valeur dans les deux intégrales, devient infiniment petite.

Soit par exemple l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}.$$

On a

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2},$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}.$$

La somme des deux intégrales est nulle, et par conséquent l'expression (1), qui en elle-même est indéterminée, a pour valeur principale zéro.

Calcul direct de quelques intégrales définies.

131. Le moyen direct de calculer une intégrale définie consiste à former l'intégrale indéfinie correspondante pour y substituer les deux limites et retrancher l'un de l'autre les résultats obtenus.

On a par exemple

$$(1)\qquad \int \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tang}\frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

On en conclut

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tang}\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\varphi}{2\sin\varphi},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tang}\infty - \frac{1}{\sin\varphi}\operatorname{arc\,tang}\cot\varphi = \frac{\pi}{2\sin\varphi} - \frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

132. On a

$$(2)\qquad \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')} = \frac{l\dfrac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta};$$

et par conséquent

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')} = \frac{l\dfrac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}.$$

Si l'on suppose $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, l'expression (3) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais la règle ordinaire en fait connaître la véritable valeur, et l'on a, en supposant les deux rapports égaux à l'unité,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha\beta},$$

résultat facile à vérifier directement.

133. On a, en supposant a plus grand que b,

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right).$$

On en conclut

$$(4)\qquad \int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Si l'on fait $a=1$, $b=\cos\theta$,

$$(5)\qquad \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos\theta\cos x} = \frac{\pi}{\sin\theta}.$$

134. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}},$$

dans laquelle le radical est considéré comme ayant une valeur positive. On a

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2},$$

et par conséquent

$$\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{1+2\alpha+\alpha^2}-\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}\right].$$

α étant un nombre positif, on a

$$\sqrt{1+2\alpha+\alpha^2}=1+\alpha,$$
$$\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}=\pm(1-\alpha),$$

le signe $+$ devant être adopté lorsque α est moindre que l'unité, et le signe $-$ dans le cas contraire.

On a par conséquent dans le premier cas

$$(6)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = 2,$$

et dans le second

$$(7)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = \frac{2}{\alpha}.$$

Lorsque α est plus grand que l'unité, la différentielle considérée passe par l'infini;

mais le facteur qui s'annule au dénominateur étant élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, il n'en résulte aucune indétermination.

Nous trouverons de nombreux exemples analogues de discontinuité dans la valeur des intégrales définies qui varient parfois brusquement non-seulement de forme, mais de valeur, lorsqu'un paramètre dont elles dépendent varie d'une manière continue.

135. On a par exemple

$$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\pi \left[\frac{(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} - 1\right] dx,$$

c'est-à-dire d'après la formule (4)

$$(8)\qquad \int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} = \frac{\pi(1+\alpha^2)}{2\alpha\sqrt{(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2}} - \frac{\pi}{2\alpha} = \pm\frac{\pi(1+\alpha^2)}{2\alpha(1-\alpha^2)} - \frac{\pi}{2\alpha},$$

le signe + correspondant au cas où α est moindre que l'unité, et le signe — au cas contraire. L'intégrale est, dans le premier cas, $\frac{\alpha\pi}{1-\alpha^2}$, et $\frac{\pi}{\alpha(\alpha^2-1)}$ dans le second.

136. On a

$$\int\frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x+(\alpha^2+1)\sin^2 x}$$
$$= \int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+(\alpha^2+1)\tang^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\arctang\sqrt{\alpha^2+1}\tang x;$$

par conséquent

$$(9)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\alpha^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

On en déduit la formule équivalente

$$(10)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

137. Cherchons l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}.$$

En posant

$$x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

on trouve

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\,dy}{(a+1)y^2 + a - 1},$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tang} y \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}.$$

Aux limites -1 et $+1$ de x correspondent les limites ∞ et 0 de y, et l'intégrale est par conséquent

$$(11) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

138. Les intégrales

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx, \quad \int_0^\pi \sin mx \cos nx\, dx,$$

où m et n désignent des nombres entiers quelconques, se présentent dans une théorie importante : leur valeur est très-aisée à calculer; en transformant chaque produit en une somme, l'intégration se fait immédiatement, et l'on trouve, lorsque m et n sont différents, que les trois intégrales ont pour valeur commune zéro. Si l'on suppose $m = n$, on a

$$(12) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 mx\, dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2mx}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 mx\, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2mx}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

139. On a

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(-a \sin bx + b \cos bx)}{a^2 + b^2},$$

par conséquent en supposant a négatif

$$(13) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{-a}{a^2 + b^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

140. Parmi les intégrales en nombre presque indéfini dont la valeur peut s'obtenir directement, nous devons citer comme une des plus importantes et des plus célèbres

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n},$$

où m et n sont deux nombres entiers quelconques satisfaisant à la condition $m < n$, sans laquelle l'intégrale serait infinie.

On a trouvé (**24**), en supposant n pair,

$$\text{(A)}\qquad \int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\sum \cos\frac{m(2k-1)\pi}{n}\, l\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + 1\right]$$

$$+\frac{2}{n}\sum \sin\frac{m(2k-1)\pi}{n}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{n}},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs positives et entières de k moindres que $\frac{n}{2}$.

Quoique l'intégrale cherchée ait une valeur finie et déterminée, les différents termes de l'expression (A) deviennent infinis avec x. De là dans le calcul de l'intégrale définie une petite difficulté facile à éluder.

Supposons d'abord que $m-1$ soit pair, aussi bien que n; substituons à l'intégrale cherchée l'expression évidemment équivalente dans ce cas

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}.$$

Nous pouvons regarder cette dernière comme la limite de

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n},$$

lorsque h augmente indéfiniment. Or, en substituant à x les valeurs $-h$ et $+h$ dans l'un des termes affectés des signes logarithmiques et retranchant l'un de l'autre les deux résultats, on trouve

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}\, l\,\frac{1-2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2}{1+2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2};$$

et lorsque h devient infini, cette expression se réduit à zéro, comme contenant en facteur le logarithme de l'unité. Les termes de ce genre sont donc sans influence

sur le résultat. On a d'ailleurs pour une valeur infinie de x

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}} = \frac{\pi}{2},$$

et pour $x = -\infty$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{x - \cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}} = -\frac{\pi}{2}.$$

La différence de ces deux résultats est π, et l'on a par conséquent

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\sum \sin(2k-1)\frac{m\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n} + \sin\frac{3m\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right],$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\,\frac{1-\cos m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

$m-1$ étant pair, $\cos m\pi$ est égal à -1, et l'on a enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

141. Si l'on pose $x^n = z$, la formule précédente devient

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{m}{n}-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

et si l'on pose $\frac{m}{n} = a$,

$$(14) \qquad \int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

la restriction imposée aux nombres $m-1$ et n, qui ont été supposés pairs, n'en impose aucune au rapport $\frac{m}{n}$ qui est un nombre quelconque moindre que l'unité, et la continuité évidente de l'intégrale permet de le supposer incommensurable.

142. Si l'on pose dans la formule précédente

$$z^a = u,$$
$$az^{a-1}\,dz = du,$$

elle devient

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{\frac{1}{a}}} = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

et en posant $\frac{1}{a} = n$,

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}, \tag{15}$$

n désignant un nombre quelconque plus grand que l'unité.

143. Si l'on pose

$$u = \frac{v}{\sqrt[n]{1-v^n}},$$

la formule précédente devient

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt[n]{1-v^n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \tag{16}$$

On a par exemple

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}.$$

144. On peut de la formule (14) déduire d'autres conséquences importantes. On a

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

En posant dans la seconde intégrale du second membre $x = \frac{1}{z}$, les limites de z deviennent 1 et 0, et l'on a

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = -\int_1^0 \frac{z^{-a}\,dz}{1+z} = \int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{1+x},$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{17}$$

Cette dernière formule est démontrée, comme celle dont elle est déduite, pour les valeurs positives de a moindres que l'unité. Le premier membre d'ailleurs deviendrait évidemment infini si cette condition n'était pas remplie.

145. Chaque intégrale définie peut, par des changements de variables, se transformer d'une infinité de manières. Nous citerons quelques-unes des formes que l'on peut donner ainsi au résultat précédent.

Si dans la formule (14) on pose $x = \tang^2 \varphi$, elle devient

$$(18) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \tang^{2a-1} \varphi = \frac{\pi}{2 \sin a\pi}.$$

En posant

$$x = \frac{(b+1)z}{1-z},$$

on en déduit

$$(19) \qquad \int_0^1 \frac{z^{a-1}\,dz}{(1+bz)(1-z)^a} = \frac{\pi}{(1-b)^a \sin a\pi},$$

où a désigne toujours un nombre compris entre zéro et l'unité, et b doit être tel, que $1 + bz$ ne devienne pas nul entre les limites de l'intégration; l'intégrale (19), dans ce cas, n'aurait plus de sens, et la transformation qui y a conduit cesserait d'être permise.

En posant en effet

$$x = \frac{(b+1)z}{1-z},$$

il est, dans tous les cas, exact de dire que pour $z = 0$, x devient nul, et que pour $z = 1$, il devient infini. Mais il n'en résulte pas toujours que, z variant de zéro à l'unité, x varie de zéro à l'infini. Dans le cas qui nous occupe, à des valeurs de z comprises entre zéro et l'unité correspondent des valeurs négatives de x, et l'intégrale dont (19) est la transformée, est

$$\int_0^\infty \frac{dx\,(-x)^{a-1}}{1-x},$$

qui n'a pas de sens.

146. Si l'on pose $x = z^n$, l'intégrale (14) devient

$$n \int_0^\infty \frac{z^{na-1}\,dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

et en posant $na = n - k$,

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{n-k}{n}\pi} = \frac{\pi}{n \sin \frac{k\pi}{n}}.$$

En transformant de nouveau cette intégrale et posant

$$\frac{z^n}{1-z^n} = u^n,$$

on aura

$$\frac{dz}{z} = \frac{du}{u(1+u^n)}$$

et

$$(20) \qquad \int_0^1 \frac{u^{n-k-1}}{(1-u^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{k\pi}{n}}.$$

Simplification de quelques formules de réduction.

147. Nous avons calculé un grand nombre d'intégrales indéfinies à l'aide de formules *de réduction* qui les lient à d'autres intégrales de plus en plus simples, dont la dernière s'obtient immédiatement.

La même méthode est applicable aux intégrales définies, mais on doit remarquer que souvent il est avantageux de faire la substitution des limites dans la formule de réduction elle-même, qui par là se trouve notablement simplifiée.

On a trouvé, par exemple,

$$m\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On en conclut

$$m\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (m-1)\int_0^1 \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et l'application répétée de cette formule permet, lorsque m est entier, de calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, en la réduisant à l'une des deux suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

On trouve ainsi

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}. \end{cases}$$

148. Des deux intégrales précédentes on déduit aisément

$$\int_0^1 x^m\,dx\,\sqrt{1-x^2}.$$

On a

$$\int_0^1 x^m\,dx\,\sqrt{1-x^2}=\int_0^1 \frac{x^m-x^{m+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int_0^1 \frac{x^{m+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{m+2}\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

149. La comparaison des formules précédentes conduit à une expression célèbre du nombre π, que nous avons déjà obtenue par une autre méthode.

Si l'on pose

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=y_m,$$

on a (147)

$$\frac{y_{2n}}{y_{2n+1}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1)}{(2.4.6\ldots 2n)^2}.$$

Mais le premier membre, évidemment compris entre $\frac{y_{2n}}{y_{2n}}=1$ et $\frac{y_{2n}}{y_{2n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}$, devient égal à l'unité pour une valeur infinie de n; il en est donc de même du second membre, et l'on en conclut

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1)},$$

c'est le théorème de Wallis.

150. Si dans les formules (1) on pose $x=\sin\varphi$, elles deviennent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}d\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},\\&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Si dans la première des formules (2) on pose

$$y=a(1-\cos\varphi),$$

elle devient

$$\int_0^a (2ay-y^2)^{n-1}\sqrt{2ay-y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,a^{2n}.$$

151. Considérons l'intégrale

$$\int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^n.$$

On trouve aisément

$$\int dx\,(a^2 - x^2)^n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int dx\,(a^2 - x^2)^{n-1},$$

et par conséquent

$$\int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^n = \frac{2na^2}{2n+1}\int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^{n-1}.$$

et l'application répétée de cette formule donne

$$(3) \qquad \int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^n = \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}\,a^{2n+1}.$$

En supposant $a = 1$,

$$(4) \qquad \int_0^1 dx\,(1 - x^2)^n = \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}.$$

152. La formule précédente mérite une mention spéciale. C'est en partant d'un résultat qui lui est équivalent, quoique antérieur à l'invention du calcul intégral, que Wallis a été ingénieusement conduit à l'expression du nombre π sous forme de produit infini.

Sa méthode consiste à transformer le second membre de (4) en une expression dans laquelle il soit possible d'attribuer à n une valeur fractionnaire, et à admettre alors, sans preuve suffisante il est vrai, que la formule démontrée pour les valeurs entières quelconques de n est par cela même identique et applicable au cas même où n est fractionnaire.

La formule (4) peut s'écrire

$$(5) \qquad \int_0^1 dx\,(1 - x^2)^n = \frac{2^n}{2n+1}\,\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

Or le second membre est la limite de

$$(\mathrm{A}) \qquad \left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{2n+1}{1}\,\frac{2n+3}{3}\cdots\frac{2n+2k+1}{2k+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{2}{n+2}\cdots\frac{k}{n+k}\right),$$

lorsque k augmente indéfiniment.

En supprimant en effet les facteurs communs, on réduit le produit à

$$\frac{1}{2n+1}\frac{(2k+3)(2k+5)\ldots(2k+2n+1)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{1.2.3\ldots n}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)};$$

mais lorsque k devient infini, on a

$$\frac{2k+3}{k+1}\frac{2k+5}{k+2}\cdots\frac{2k+2n+1}{k+n}=2^n,$$

et la formule (A) peut être remplacée par conséquent par le second membre de l'équation (5).

En acceptant ce résultat comme applicable au cas où n n'est pas entier, on a, en faisant $n=\frac{1}{2}$,

$$\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\frac{2.4\ldots(2k+2)}{1.3\ldots(2k+1)}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{2}{\left(\frac{5}{2}\right)}\cdots\frac{k}{\left(\frac{2k+1}{2}\right)},$$

et comme l'intégrale est égale à $\frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\frac{2k+2}{2k+1},$$

en supposant, bien entendu, que k augmente indéfiniment.

153. L'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

s'obtient aussi aisément que les précédentes. On a

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{(2n-2)a^2}\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}},$$

et comme le premier terme du second membre est nul aux deux limites

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int_0^\infty\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

L'application répétée de cette formule donne

$$(6)\qquad \int_0^\infty\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$, cette formule devient

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{n}\left(a^2 + \frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2} \frac{\pi}{2}.$$

En faisant $a = 1$ et supposant que n croisse indéfiniment, cette équation devient, à cause de la formule de Wallis,

$$(7) \qquad \int_0^\infty dz\, e^{-z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

154. L'intégration par partie donne

$$\int e^{-x^2} x^{2n}\, dx = -\frac{1}{2} x^{2n-1} e^{-x^2} + \frac{2n-1}{2} \int e^{-x^2} x^{2n-2}\, dx;$$

par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx = \frac{2n-1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-2}\, dx,$$

et l'application répétée de cette formule donne, en ayant égard à (7),

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

155. L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx,$$

considérée comme fonction de n, joue un rôle important en analyse. Les géomètres, qui l'ont désignée par $\Gamma(n)$, en ont fait une étude approfondie. Nous nous bornerons ici à donner sa valeur lorsque n est entier. On a

$$\int e^{-x} x^{n-1}\, dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2}\, dx,$$

par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2}\, dx,$$

et l'application répétée de cette formule donne, lorsque x est entier,

$$(9) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = \Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1).$$

156. L'intégrale

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

dont nous aurons à nous occuper dans le cas général, se calcule très-aisément lorsqu'un des nombres m et n est entier.

Remarquons d'abord que cette intégrale est une fonction symétrique de m et de n. Si l'on pose en effet $1-x=y$, elle devient

$$-\int_1^0 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy.$$

On peut donc changer les lettres m et n l'une dans l'autre sans altérer le résultat, et si l'un des exposants est entier, il est permis par conséquent de supposer que ce soit celui de x.

Cela posé, on a

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}=-\frac{(1-x)^n x^{m-1}}{n}+\frac{m-1}{n}\int x^{m-2}(1-x)^n\,dx,$$

et par conséquent, $m-1$ et n étant positifs,

$$\int_0^1 x^{m-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}=\frac{m-1}{n}\int_0^1 x^{m-2}\,dx\,(1-x)^n.$$

Puisque m est supposé entier, l'application répétée de cette formule ramènera l'intégrale à

$$\int_0^1 (1-x)^{m+n-2}\,dx=\frac{1}{m+n-1},$$

et par conséquent

$$(10)\qquad \int_0^1 x^{m-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)},$$

et cette formule ne suppose pas que n soit entier. D'après la symétrie remarquée, on a aussi, lorsque n est entier et quel que soit m,

$$(11)\qquad \int_0^1 x^{m-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots 1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)}.$$

157. En posant $x=\sin^2\varphi$, l'intégrale (10) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\,d\varphi,$$

dont la valeur est par conséquent connue, pourvu que m soit entier.

On a

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\varphi \cos^{2n-1}\varphi\, dx = \frac{(m-1)(m-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)}.$$

L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$$

peut d'ailleurs se calculer directement, quels que soient les exposants entiers m et n.

On déduit de la formule de réduction démontrée (84)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx,$$

et l'application répétée de cette formule donne, si n est pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx,$$

et si n est impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\, dx.$$

Mais on a, si m est pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,\frac{\pi}{2},$$

et si m est impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{1.3.5\ldots m}.$$

Dans les deux cas d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\, dx = \frac{1}{m+1},$$

et l'on trouve par suite, en mettant en évidence la parité ou la non-parité des exposants,

$$(13)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{1.3\ldots(2m-1)\,2.4\ldots 2n}{(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(m+2n-1)},$$

$$(14)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1.3.\ \ .(2n-1)\,1.3.\ \ .(2m-1)}{2.4\ldots(2m+2n)}\,\frac{\pi}{2},$$

$$(15)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)\,2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)(2m+2)(2m+4)\ldots(2m+2n)},$$

$$(16)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{1.2\ldots n\,1.2\ldots m}{1.2\ldots(m+n+1)}\,\frac{1}{2}.$$

158. On a trouvé (138)

$$\int_0^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit aisément les intégrales

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m} x \cos 2nx\, dx, \qquad \int_0^{\pi} \cos^{2m+1} x \cos(2n+1)\, x\, dx.$$

On a en effet (I, 386)

$$(1)\quad 2^{2m-1}\cos^{2m} x = \cos 2mx + 2m\cos(2m-2)\,x + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

$$(2)\quad 2^{2m}\cos^{2m+1} x = \cos(2m+1)\,x + (2m+1)\cos(2m-1)\,x + \ldots + \frac{(2m+1)\,2m\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots m}\cos x.$$

En multipliant les deux membres de (1) par $\cos 2nx\, dx$, et ceux de (2) par $\cos(2n+1)\,x\, dx$, et en intégrant entre les limites o et π, on trouve, en ayant égard aux formules (138),

$$(17)\quad \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \cos 2nx\, dx = \frac{1}{2^{2m}}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}\,\pi,$$

$$(18)\quad \int_0^{\pi} \cos^{2m+1} x \cos(2n+1)\, x\, dx = \frac{1}{2^{m+1}}\,\frac{(2m+1)\,2m\ldots(m+n+2)}{1.2.3\ldots(m-n)}\,\pi.$$

Si l'on suppose $m = n$, on trouve de même

$$(19) \qquad \int_0^\pi \cos^{2m} x \cos 2mx \, dx = \frac{\pi}{2^{2m+1}};$$

$$(20) \qquad \int_0^\pi \cos^{2m+1} x \cos(2m+1)x \, dx = \frac{\pi}{2^{2m+2}}.$$

Lorsque m et n sont de parité différente, on a évidemment

$$\int_0^\pi \cos^m x \cos nx \, dx = 0.$$

On a (I, 386)

$$2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x = 2\cos 2mx - 2\,2m\cos(2m-2)x + \ldots,$$
$$2^{(2m+1)}(-1)^m \sin^{2m+1} x = 2\sin(2m+1)x - 2(2m+1)\sin(2m-1)x + \ldots,$$

et on en conclura

$$(21) \quad \int_0^\pi \sin^{2m} x \cos 2nx \, dx = (-1)^n \frac{1}{2^{2m}} \frac{2m(2m-1)\ldots(m+n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)} \frac{\pi}{2},$$

$$(22) \quad \int_0^\pi \sin^{2m+1} x \sin(2n+1)x \, dx = (-1)^n \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m+1)(2m)\ldots(m+n+2)}{1.2.3\ldots(m-n)} \frac{\pi}{2}.$$

Ces résultats se retrouveront d'ailleurs comme conséquences d'autres formules plus générales qui seront démontrées ailleurs.

159. Les fonctions $\cos^{2m} x \cos 2nx$, $\cos^{2m+1} x \cos(2n+1)x$, $\sin^{2m} x \cos 2nx$, $\sin^{2m+1} x \sin(2n+1)x$, prennent chacune des valeurs égales quand on y fait successivement $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $x = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Si donc, dans les intégrales (17), (18), (21) et (22), les limites sont réduites à zéro et $\frac{\pi}{2}$, la valeur de chacune d'elles deviendra moitié moindre.

160. Les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx$$

peuvent d'ailleurs se réduire aisément à l'aide de l'intégration par parties. On a, en

considérant $\cos x\,dx$ comme la différentielle de $\sin x$,

$$\int \cos^m x \cos nx\,dx = \cos^{m-1} x \cos nx \sin x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^2 x \cos nx\,dx$$
$$+ n\int \cos^{m-1} x \sin x \sin nx\,dx.$$

En intégrant de nouveau par parties la seconde intégrale du second membre, où $\cos^{m-1} x \sin x\,dx$ est la différentielle de $\frac{-\cos^m x}{m}$, remplaçant dans la seconde $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, réduisant les termes semblables et remarquant que le terme intégré disparaît aux deux limites, on trouve

$$\text{(B)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} x \cos nx\,dx = \frac{m^2 - n^2}{m(m-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\,dx.$$

Si dans cette équation on suppose $m = n$, puis successivement $m = n - 2$, $m = n - 4, \ldots, m = n - 2k$, k étant un nombre entier quelconque, on en conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2k} x \cos nx\,dx = 0.$$

Mais, par une discontinuité remarquable, qui n'est pas rare dans la théorie des intégrales définies, cette formule cesserait d'être exacte si le nombre k était négatif, et l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2k} x \cos nx\,dx$$

est différente de zéro. On a trouvé (158)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx\,dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Si l'on fait dans l'équation (B) $m = n + 2$, $m = n + 4, \ldots, m = n + 2k$, on trouvera

$$(23) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2k} x \cos nx\,dx = \frac{\pi}{2^{n+2k+1}} \frac{(n+2k)(n+2k-1)\ldots(n+k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Cette formule s'applique, ainsi que l'équation (19) dont on l'a déduite, au cas même où n n'est pas entier; mais nous ne pouvons en donner la démonstration dans ce chapitre.

161. La formule de réduction (B) permet de calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx$$

toutes les fois que m est un nombre entier. En l'écrivant en effet sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx = \frac{m(m-1)}{m^2-n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} x \cos nx \, dx,$$

on pourra ramener l'exposant m à la valeur zéro ou à la valeur 1, en réduisant l'intégrale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n},$$

ou à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{1-n^2},$$

pourvu toutefois que n ne soit pas un nombre entier de même parité que m et moindre que lui, car alors, le dénominateur de l'une des formules de réduction étant nul, la méthode serait en défaut.

On trouve ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \cos(2n+1)x = \frac{2m(2m-1)\ldots 2.1.\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{[2^2-(2n+1)^2][4^2-(2n+1)^2]\ldots[4m^2-(2n+1)^2](2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x \cos 2nx \, dx = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots 2.1.\cos n\pi}{(1-4n^2)(9-4n^2)\ldots[(2m+1)^2-4n^2]}.$$

162. L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx$$

peut aussi se réduire à l'aide de deux intégrations par parties. On a, en considérant $\cos x \, dx$ comme une différentielle,

$$\int \cos^m x \sin nx \, dx = \sin x \cos^{m-1} x \sin nx + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^2 x \sin nx$$
$$- n\int \sin x \cos nx \cos^{m-1} x \, dx.$$

Intégrant par parties la seconde intégrale du second membre, remplaçant dans la première $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, réduisant les termes semblables, et remplaçant enfin dans les termes intégrés x par les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} x \sin nx\, dx = \frac{m^2 - n^2}{m(m-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx + \frac{n}{m(m-1)}.$$

Si l'on suppose $m = n$, on en déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} x \sin mx\, dx = \frac{1}{m-1}.$$

163. L'intégration par parties autrement dirigée peut fournir une autre formule de réduction pour l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx.$$

On a, en considérant $\sin nx\, dx$ comme une différentielle exacte,

$$\int \cos^m x \sin nx\, dx = -\frac{\cos nx}{n} \cos^m x - \frac{m}{n} \int \cos^{m-1} x \sin x \cos nx\, dx,$$

et, en remplaçant le produit $\sin x \cos nx$ par $\sin nx \cos x - \sin(n-1)x$ et réduisant les termes semblables,

$$(m+n) \int \cos^m x \sin nx\, dx = -\cos^m x \cos nx + m \int \cos^{m-1} x \sin(n-1)x\, dx,$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx = \frac{1}{m+n} + \frac{m}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin(n-1)x\, dx.$$

L'application répétée de cette formule donne, en supposant $n = m$ et m entier et positif,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\, dx = \frac{1}{2^{m+1}} \left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^m}{m}\right).$$

164. La même méthode de réductions successives s'applique à un grand nombre d'intégrales, dont il est bon de citer quelques-unes.

On a (80)

$$\int x^n \, lx \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \, lx - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \, lx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

et par conséquent

$$\int_0^1 x^n \, lx \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

On trouvera de même

$$\int x^n (lx)^2 \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (lx)^2 - \frac{2}{n+1} \int x^n \, lx \, dx,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 x^n (lx)^2 \, dx = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

On trouvera, en général,

$$\int_0^1 x^n (lx)^k \, dx = (-1)^k \frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)^{k+1}}.$$

165. On a trouvé (82)

$$\int e^{-mx} \sin^n x \, dx = \frac{e^{-mx} \sin^{n-1} x}{m^2+n^2} (-m \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{n^2+m^2} \int e^{-mx} \sin^{n-2} x \, dx.$$

On en conclut

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin^n x \, dx = \frac{n(n-1)}{n^2+m^2} \int_0^\infty e^{-mx} \sin^{n-2} x \, dx.$$

L'application répétée de ces formules ramènera l'intégrale considérée, suivant que n est un nombre pair ou impair, à l'une des deux suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-mx} \, dx = \frac{1}{m};$$

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin x \, dx = \frac{1}{m^2+1},$$

et l'on en conclut

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{1.2.3\ldots 2n+1}{(m^2+1)(m^2+9)\ldots[m^2+(2n+1)^2]},$$

$$\int_0^\infty e^{-mx} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1.2.3\ldots 2n}{m(m^2+4)(m^2+16)\ldots(m^2+4n^2)}.$$

166. Les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2n+1}x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2n}x\,dx$$

s'expriment moins simplement. On a (82)

$$\int e^{-mx}\cos^n x\,dx = \frac{e^{-mx}\cos^{n-1}x\,(n\sin x - m\cos x)}{n^2+m^2} + \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{-mx}\cos^{n-2}x\,dx,$$

par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^n x\,dx = \frac{m}{m^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{n-2}x\,dx,$$

et l'application répétée de cette formule ramènera l'intégrale à l'une des deux suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos x\,dx = \frac{m}{m^2+1},$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\,dx = \frac{1}{m}.$$

On a ainsi

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2n}x\,dx = \frac{1}{m}\left[\frac{1.2\ldots 2n}{(m^2+4)(m^2+16)\ldots(m^2+4n^2)}\right]$$
$$\times\left[1+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^2(m^2+4)}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{m^2(m^2+4)\ldots[m^2+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots(2n-1)2n}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2n+1}x\,dx = \frac{1}{m}\,\frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{(m^2+1)(m^2+7)\ldots[m^2+(2n+1)^2]}$$
$$\times\left[m^2+\frac{m^2(m^2+1)}{1.2.3}+\cdots+\frac{m^2(m^2+1)\ldots[m^2+(2n-1)^2]}{1.2\ldots 2n(2n+1)}\right].$$

On pourrait obtenir le même résultat en remplaçant la puissance de $\cos x$ par la somme qui la représente (I, 385),

$$2^{2n-1}\cos^{2n}x = \cos 2nx + 2n\cos(2n-2)x + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n},$$

$$2^{2n}\cos^{2n+1}x = \cos(2n+1)x + (2n+1)\cos(2n-1)x + \cdots + \frac{(2n+1)2n\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\cos x;$$

et comme on a

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos kx\,dx = \frac{m}{k^2+m^2},$$

on retrouvera les formules équivalentes aux précédentes.

Si l'on prend pour limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\int e^{-mx}\cos^n x\,dx$$

peut se déduire aisément de la même formule de réduction. On a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos^n x\,dx = \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos^{n-2}x\,dx;$$

et comme on trouve directement

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos x\,dx = \frac{e^{-\frac{m\pi}{2}}+e^{\frac{m\pi}{2}}}{1+m^2} = \frac{2\cos\text{hyp.}\frac{m\pi}{2}}{1+m^2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\,dx = \frac{e^{\frac{m\pi}{2}}-e^{-\frac{m\pi}{2}}}{m} = \frac{2\sin\text{hyp.}\frac{m\pi}{2}}{m},$$

on en conclut

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos^{2n}x\,dx = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(m^2+4)(m^2+16)\ldots(m^2+4n^2)}\,\frac{1}{m}\left(e^{\frac{m\pi}{2}}-e^{-\frac{m\pi}{2}}\right),$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos^{2n+1}x\,dx = \frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{(m^2+1)(m^2+9)\ldots[m^2+(2n+1)^2]}\left(e^{\frac{m\pi}{2}}+e^{-\frac{m\pi}{2}}\right).$$

167. Lorsque dans l'intégrale $\int e^{-mx}\cos^n x\,dx$, on remplace m par $m\sqrt{-1}$, elle devient

$$\int(\cos mx\cos^n x+\sqrt{-1}\sin mx\cos^n x)\,dx.$$

Le coefficient de $\sqrt{-1}$ étant une fonction impaire qui change de signe sans changer de valeur lorsqu'on y remplace x par $-x$, elle donne, entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, une intégrale nulle; la partie réelle au contraire ne change pas quand on change x en $-x$, et l'on peut par conséquent remplacer les limites par zéro et $\frac{\pi}{2}$ et doubler le résultat. On peut retrouver ainsi les formules déjà obtenues (**160**) et (**161**).

CHAPITRE VII.

EMPLOI DES SÉRIES DANS LE CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Quelques développements en séries connues.

168. On peut obtenir un grand nombre d'intégrales définies en les transformant en séries dont la somme soit connue.

Soit, par exemple, à calculer $\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x}$.

On a, pour toute valeur de x moindre que l'unité,

$$(1)\qquad \frac{lx}{1-x} = lx(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots).$$

D'ailleurs (**164**)

$$\int_0^1 lx\,dx\,x^n = -\frac{1}{(n+1)^2};$$

par conséquent (**I, 410**)

$$(2)\qquad \int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x} = -\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

169. L'intégrale $\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1+x}$ peut s'obtenir de même. On a

$$(3)\qquad \int_0^1 \frac{lx\,dx}{1+x} = \int_0^1 lx\,dx(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots\right) = -\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x^2} = \int_0^1 lx\,dx(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = -\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire (**I, 414**)

$$(4)\qquad \int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Cette troisième intégrale pourrait servir à calculer les deux précédentes. Soit, en effet,

$$(5) \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx\,lx}{1-x^2} = \mathrm{P}.$$

En posant $x^2 = z$, on aura

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz\,lz}{1-z} = \mathrm{P},$$

et par conséquent

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x} = 4\mathrm{P}.$$

En ajoutant les équations (4) et (5),

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx(1+x)}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x} = 4\mathrm{P} = \mathrm{P} - \frac{\pi^2}{8};$$

par conséquent

$$\mathrm{P} = -\frac{\pi^2}{24},$$

et

$$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

De même, en retranchant (5) de (4),

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx(1-x)}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{dx\,lx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{8} - \mathrm{P} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

170. L'intégrale plus générale $\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1-x}$ peut se calculer de la même manière. On a

$$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1-x} = \int_0^1 dx\,(lx)^{2n-1}(1+x+x^2+\ldots).$$

Mais (164)

$$\int_0^1 x^p (lx)^{2n-1}\,dx = -\frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{(p+1)^{2n}};$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx\,(lx)^{2n-1}}{1-x} = -1.2.3\ldots(2n-1)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right),$$

c'est-à-dire (I, 410)

$$(7)\qquad \int_0^1 \frac{dx\,(lx)^{2n-1}}{1-x} = -\frac{2^{2n-2}}{n}\pi^{2n}\mathrm{B}_n,$$

B_n étant le $n^{ième}$ nombre de Bernoulli.

Si l'on pose $x = e^{-z}$, l'intégrale précédente devient

$$\int_\infty^0 \frac{e^{-z}\,dz\,z^{2n-1}}{1-e^{-z}} = -\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}\,dz}{e^z-1},$$

et par conséquent

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}\,dz}{e^z-1} = \frac{2^{2n-2}}{n}\pi^{2n}\mathrm{B}_n.$$

Si dans cette formule on pose $x = 2\pi y$, on trouve

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{y^{2n-1}\,dy}{e^{2\pi y}-1} = \frac{1}{4n}\mathrm{B}_n.$$

On peut rattacher au résultat précédent l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{e^{2\pi x}-1}.$$

En développant, en effet, $\sin mx$ en série on trouve, à l'aide de la formule précédente et du développement (I, 347),

$$(10)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right).$$

171. Considérons encore l'intégrale $\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1+x}$.

On a

$$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 (lx)^{2n-1}\,dx\,(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots),$$

c'est-à-dire (164)

$$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1+x} = -1.2.3\ldots(2n-1)\left(1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\right).$$

Mais on a (I, 410)

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{2^{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}\pi^{2n}\mathrm{B}_n;$$

par conséquent

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots=\frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\frac{\pi^{2n}}{2}B_n,$$

et

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots=\frac{2^{2n-1}-1}{1.2.3\ldots 2n}\pi^{2n}B_n;$$

d'où l'on conclut

$$(11)\qquad \int_0^1\frac{(lx)^{2n-1}\,dx}{1+x}=-\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\pi^{2n}B_n.$$

Et en posant $x=e^{-z}$, on en déduit

$$(12)\qquad \int_0^1\frac{z^{2n-1}\,dz}{1+e^z}=\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\pi^{2n}B_n.$$

172. On peut rattacher au résultat précédent l'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{\sin mx\,dx}{1+e^x}.$$

En développant $\sin mx$ en série et intégrant tous les termes au moyen de la formule (12), on trouve

$$\int_0^\infty\frac{\sin mx}{1+e^x}dx=\frac{m\pi^2}{1.2}B_1-\frac{m^3\pi^4}{1.2.3}\frac{2^3-1}{4}B_2+\frac{m^5\pi^6}{1.2.3.4.5}\frac{2^5-1}{6}B_3+\ldots,$$

c'est-à-dire (I, 388)

$$(13)\qquad \int_0^\infty\frac{\sin mx\,dx}{1+e^x}=\frac{1}{2m}+\frac{\pi}{2\sqrt{-1}}\operatorname{cosec}m\pi\sqrt{-1}=\frac{1}{2m}-\frac{\pi}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}}.$$

173. On a

$$(14)\qquad \int_0^1\frac{l(1+x)\,dx}{x}=\int_0^1 dx\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)$$
$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\cdots=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}.$$

On trouvera de même

$$(15)\qquad \int_0^1\frac{dx}{x}\,l\,\frac{1+x}{1-x}=2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

174. La méthode employée dans les paragraphes précédents peut donner lieu à une objection qu'il est bon d'indiquer pour montrer qu'elle est peu fondée. Les

développements de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, ... dont nous avons fait usage deviennent inexacts lorsque x atteint la limite supérieure des intégrales considérées, qui est l'unité. Mais on doit remarquer que, pour $x=1$, $\frac{lx}{x-1}$ ne devient pas infini et que $\frac{(lx)^{2n-1}}{x-1}$ est nul. Le dernier élément de l'intégrale sur lequel porte la difficulté est donc sans influence sur la somme et par conséquent toute difficulté disparaît.

175. La valeur de la série qui représente l'intégrale cherchée ne s'aperçoit pas toujours aussi immédiatement. Soit par exemple à calculer

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons $\sqrt{1-x^2}=y$, $x=\sqrt{1-y^2}$, $dx=\frac{-y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $lx=\frac{1}{2}l(1-y^2)$, nous aurons

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}\left(y^2+\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+\cdots\right);$$

par conséquent (**147**)

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2.4^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6^2}+\cdots\right).$$

Pour sommer cette série, remarquons que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1.3}{2.4}z^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}z^6+\cdots,$$

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2.4^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6^2}+\cdots,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right).$$

On a

$$\int dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right)=-l\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}-lz=-l(1+\sqrt{1-z^2}),$$

et

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right)=l2;$$

donc enfin

$$(16)\qquad \int_0^1 \frac{lx\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\,l2.$$

Si l'on pose $x = \sin\varphi$, cette formule devient

$$(17)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\,l2.$$

Cette dernière intégrale pourrait d'ailleurs s'obtenir directement. On a (I, 382)

$$\frac{1}{2}\,l4\sin^2\frac{1}{2}\varphi = -\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos2\varphi + \ldots\right).$$

En posant $\frac{1}{2}\varphi = x$,

$$(18)\qquad l\sin x = -l2 - \cos2x - \frac{1}{2}\cos4x - \frac{1}{3}\cos6x - \ldots.$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos2mx\,dx = 0;$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} l2\,dx = -\frac{\pi}{2}\,l2.$$

La formule (18) permet d'obtenir l'intégrale plus générale

$$(19)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos2mx\,l\sin x\,dx = -\frac{\pi}{4m},$$

où m désigne un nombre entier quelconque, et que l'on démontre immédiatement en intégrant les deux membres de (18) entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, après les avoir multipliés par $\cos2mx$.

176. $\int_0^1 \frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta)$.

On a

$$x^\alpha = e^{\alpha lx} = 1 + \alpha lx + \frac{\alpha^2(lx)^2}{1.2} + \cdots,$$

$$x^\beta = e^{\beta lx} = 1 + \beta lx + \frac{\beta^2(lx)^2}{1.2} + \cdots,$$

et comme (164)

$$\int_0^1 dx\,(lx)^n = (-1)^n.1.2.3\ldots n,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta) = \alpha - \beta - \frac{\alpha^2-\beta^2}{2} + \frac{\alpha^3-\beta^3}{3} - \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(20)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta) = l\,\frac{1+\alpha}{1+\beta}.$$

Si dans cette formule on fait $\alpha = m\sqrt{-1}$, $\beta = n\sqrt{-1}$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{\cos m\,lx - \cos n\,lx + \sqrt{-1}\,(\sin m\,lx - \sin n\,lx)}{lx}\,dx = l\,\frac{1+m\sqrt{-1}}{1+n\sqrt{-1}},$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires (I, 370),

$$(21)\qquad \int_0^1 \frac{\cos m\,lx - \cos n\,lx}{lx}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+m^2}{1+n^2},$$

$$(22)\qquad \int_0^1 \frac{\sin m\,lx - \sin n\,lx}{lx}\,dx = \text{arc tang}\,m - \text{arc tang}\,n.$$

Si dans la seconde de ces formules on fait $m = 0$, on a

$$(23)\qquad \int_0^1 \frac{\sin n\,lx\,dx}{lx} = \text{arc tang}\,n.$$

Toutes ces formules pourraient d'ailleurs se démontrer directement sans l'intervention des imaginaires en développant les fonctions placées sous le signe d'intégration en série ordonnée suivant les puissances de x.

177. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{(1+x)\,lx}\,dx.$

On a, en remplaçant $\frac{1}{1+x}$ par son développement,

$$\frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{1+x} = x^{\alpha-1} - x^{-\alpha} - (x^\alpha - x^{1-\alpha}) + (x^{\alpha+1} - x^{2-\alpha}) - \ldots,$$

et par conséquent, en ayant égard à la formule (20),

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{(1+x)\,lx}\,dx &= l\,\frac{\alpha}{1-\alpha} - l\,\frac{\alpha+1}{2-\alpha} + l\,\frac{\alpha+2}{3-\alpha} - \ldots \\ &= l\,\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(2-\alpha)(4-\alpha)\ldots}{(1-\alpha)(1+\alpha)(3-\alpha)(3+\alpha)\ldots} \\ &= l\,\frac{\alpha(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)\ldots}{(1-\alpha^2)(3^2-\alpha^2)\ldots}.\end{aligned}$$

c'est-à-dire (I, 404, 405, 416)

$$(24)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{(1+x)\,lx}\,dx = l\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha\pi}{2}.$$

178. La méthode précédente permet évidemment de transformer en logarithme d'un produit l'intégrale plus générale

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{x\,lx\,(1+x^n)}\,dx,$$

et l'on trouve

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{x\,(1+x^n)\,lx}\,dx = l\,\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta+n}{\alpha+n}\,\frac{\alpha+2n}{\beta+2n}\cdots.$$

Si l'on pose $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $n = 1$, il vient

$$(25)\qquad \int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)\,lx}\,dx = l\,\frac{1.3.3.5.5\ldots}{2.2.4.4\,6\ldots} = l\,\frac{\pi}{2}.$$

179. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-qx}\sin rx}{x}\,dx.$

On a

$$\frac{e^{-qx}\sin rx}{x} = e^{-qx}\left(r - \frac{r^3x^2}{1.2.3} + \frac{r^5x^4}{1.2.3.4.5} - \cdots\right),$$

mais (155)

$$\int_0^\infty e^{-qx}\,x^n\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{q^{n+1}}.$$

Donc

$$(26)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-qx}\sin rx\,dx}{x} = \frac{r}{q} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{q}\right)^5 - \cdots = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{r}{q}.$$

Si l'on fait $q = 0$, on a la formule très-connue

$$(27)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin rx\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

180. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x}\,l(1+k\cos x).$

k étant plus petit que l'unité, on a

$$\frac{1}{\cos x}\,l(1+k\cos x) = k - \frac{k^2\cos x}{2} + \frac{k^3\cos^2 x}{3} + \cdots,$$

Nous avons trouvé (150) l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$: en posant $\varphi = \frac{\pi}{2} - x$, on en déduira $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx$, dont la valeur est précisément égale et qui se double évidemment quand on prend pour limites zéro et π. L'intégrale

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\, dx$$

est d'ailleurs évidemment nulle, comme composée d'éléments qui se détruisent deux à deux, et l'on a par conséquent

$$(28) \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x}\, l(1 + k\cos x) = \pi\left(k + \frac{k^3}{2.3} + \cdots\right) = \pi \operatorname{arc\,sin} k.$$

181. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x}$.

On a

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \ldots.$$

L'intégration par parties donne, en remarquant que $\int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\, dx$ est évidemment nulle,

$$\int_0^{\pi} x \sin x \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2n+1}:$$

Donc

$$(29) \qquad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

182. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\, dx$.

On a

$$e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x = e^{-\alpha^2 x^2}\left[1 - \frac{(2\beta x)^2}{1.2} + \frac{(2\beta x)^4}{1.2.3.4} + \cdots\right];$$

par conséquent

$$(30) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4}{1.2} - \cdots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}.$$

On trouverait de même, ou en changeant β en $\beta\sqrt{-1}$,

$$(31)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\frac{e^{2\beta x}+e^{-2\beta x}}{2}\,dx=\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos\text{hyp.}\,2\beta x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}.$$

183. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$.

On a, pour les valeurs de x moindres que l'unité,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n}=x^{m-1}(1-x^n+x^{2n}-x^{3n}+\ldots),$$

et par conséquent

$$(32)\qquad \int_0^1\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}+\ldots.$$

Lorsque x est plus grand que l'unité, on a

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n}=\frac{x^{m-n-1}}{1+x^{-n}}=x^{m-n-1}(1-x^{-n}+x^{-2n}-\ldots),$$

et par conséquent, en supposant $m-n-1$ négatif,

$$(33)\qquad \int_1^\infty\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{3n-m}-\ldots,$$

et en ajoutant membre à membre les équations (32) et (33)

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\ldots+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\ldots,$$

c'est-à-dire (I, 409)

$$(34)\qquad \int_0^\infty\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{2n}\left(\cot\frac{m\pi}{2n}+\tang\frac{m\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (**140**).

184. $\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx.$

On a

$$\frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} = (x^{m-1} - x^{n-m-1})(1 + x^n + x^{2n} + \ldots),$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \cdots,$$

c'est-à-dire (I, 409)

$$(35) \qquad \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx = \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n}.$$

185. $\int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$

On a, en supposant α moindre que l'unité (I, 382),

$$l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) = -2\left(\alpha \cos x + \frac{1}{2}\alpha^2 \cos 2x + \frac{1}{3}\alpha^3 \cos 3x + \cdots\right),$$

par conséquent

$$(36) \qquad \int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx = 0.$$

Lorsque α est plus grand que l'unité, on a

$$l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) = l\alpha^2\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos x + \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

et par conséquent

$$\int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx = 2\int_0^\pi dx\, l\alpha + \int_0^\pi dx\, l\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos x + \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

c'est-à-dire, d'après le résultat précédent,

$$(37) \qquad \int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx = 2\pi\, l\alpha = \pi\, l\alpha^2.$$

186. $\int_0^\pi \cos mx\, l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$

En remplaçant le logarithme par son développement et faisant usage des for-

mules (138), on trouve, m étant entier,

$$(37)\qquad \int_0^\pi \cos mx\, l(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx = -\frac{\pi\alpha^m}{m}.$$

187. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos mx\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}$.

On a (I, 386)

$$\frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = 1 + 2\alpha\cos x + 2\alpha^2\cos 2x + \ldots,$$

par conséquent (138)

$$(38)\qquad \int_0^\pi \frac{\cos mx\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \frac{\pi\alpha^m}{1-\alpha^2}.$$

188. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}$.

On a (I, 386)

$$\frac{\alpha\sin x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \alpha\sin x + \alpha^2\sin 2x + \ldots.$$

Et comme on a

$$\int_0^\pi x\sin mx\, dx = -\frac{\pi\cos m\pi}{m},$$

on en conclut

$$(39)\qquad \int_0^\pi \frac{x\sin x\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha}\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \cdots\right) = \frac{\pi}{\alpha}\, l(1+\alpha).$$

189. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\sin mx\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}$.

Le même développement donne, en supposant m entier,

$$(40)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x\sin mx\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \frac{\pi}{2}\alpha^{m-1}.$$

Si dans cette équation on pose $\alpha = 1 - \frac{h}{m}$, h étant un nombre positif, et $x = \frac{z}{m}$, elle devient

$$\int_0^{m\pi} \frac{m\sin\frac{z}{m}\sin z\, dz}{h^2 + 4m^2\sin^2\frac{z}{2m} - 4mh\sin^2\frac{z}{2m}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{h}{m}\right)^{m-1},$$

et, en faisant croître m indéfiniment, $m \sin \frac{z}{m}$ tend vers z, $m \sin^2 \frac{z}{2m}$ vers zéro, $4m^2 \sin^2 \frac{z}{2m}$ vers z^2, $\left(1 - \frac{h}{m}\right)^{m-1}$ vers e^{-h}, et l'on a

$$(41) \qquad \int_0^\infty \frac{z \sin z \, dz}{h^2 + z^2} = \frac{\pi}{2} e^{-h}.$$

L'équation

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = \frac{\pi \alpha^m}{1 - \alpha^2}$$

donnerait, par une transformation toute semblable,

$$(42) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos z \, dz}{h^2 + z^2} = \frac{\pi}{2} e^{-h}.$$

Nous retrouverons ces formules, qui sont importantes, par des méthodes plus rigoureuses que l'indication précédente, qu'il serait aisé cependant de compléter.

190. $\displaystyle\int_1^\pi \frac{\sin x \cot \frac{1}{2} x \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}.$

On a, comme on le vérifie aisément, quel que soit le nombre entier n,

$$\cot \frac{1}{2} x = 2(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx) + \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

par conséquent, en ayant égard à la formule (40),

$$\int_0^\pi \frac{\sin x \cot \frac{1}{2} x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx = \pi(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) + \int_0^\pi \frac{\sin x \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, le second terme du second membre tend vers zéro, comme on s'en assure en le considérant comme une série à termes alternativement positifs et négatifs,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin x \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{3\pi}{2n+1}} \frac{\sin x \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \ldots.$$

La somme de tous les termes pris en valeur absolue serait finie, car ce serait l'inté-

grale

$$\int_0^\pi + \sqrt{\frac{\sin^2 x \cos^2(2n+1)\frac{x}{2}}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}}\,dx,$$

dont aucun élément ne devient infini. Or la différence de deux termes consécutifs est infiniment petite évidemment par rapport à chacun d'eux, et la somme de ces différences, infiniment petite par rapport à une somme finie, a nécessairement pour limite zéro.

On a donc enfin, en remplaçant la série $1+\alpha+\alpha^2+\ldots$ par sa valeur,

$$(43)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x \cot\frac{1}{2}x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{\pi}{(1-\alpha)}.$$

191. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x \operatorname{tang}\frac{1}{2}x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}.$

On a, quel que soit l'entier n,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = 2(\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots) \pm \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}},$$

et l'on en déduit, en raisonnant comme précédemment,

$$(44)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x \operatorname{tang}\frac{1}{2}x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{\pi}{(1+\alpha)}.$$

En ajoutant cette formule à la précédente, on a

$$(45)\qquad \int_0^\pi \frac{dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{\pi}{1-\alpha^2},$$

résultat compris dans la formule (38).

192. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1-2\beta\cos x+\beta^2)}.$

On a

$$\frac{\sin^2 x}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1-2\beta\cos x+\beta^2)} = \frac{\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(\sin x+\beta\sin 2x+\beta^2\sin 3x+\ldots),$$

et par conséquent, en ayant égard à la formule (40),

$$(46)\quad \int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1-2\beta\cos x+\beta^2)} = \frac{\pi}{2}(1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2+\ldots) = \frac{\pi}{2(1-\alpha\beta)}.$$

α et β étant, bien entendu, plus petits que l'unité.

193. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)}\, l(1-2\alpha\cos mx+\alpha^2).$

On a, en supposant α plus petit que l'unité,

$$l(1-2\alpha\cos mx+\alpha^2) = -2\left(\alpha\cos mx+\frac{\alpha^2}{2}\cos 2mx+\frac{\alpha^3}{3}\cos 3mx+\cdots\right).$$

D'ailleurs (189)

$$\int_0^\infty \frac{\cos pmx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-pm};$$

donc

$$(47)\quad \int_0^\infty \frac{l(1-2\alpha\cos mx+\alpha^2)}{1+x^2}\,dx = -\pi\alpha e^{-m} - \pi\frac{\alpha^2}{2}e^{-2m} - \ldots = \pi\, l(1-\alpha e^{-m}).$$

Si dans cette formule on fait $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$ successivement, et que l'on retranche les résultats obtenus, on trouvera

$$(48)\quad \int_0^\infty \frac{l\sin\frac{1}{2}mx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\, l\,\frac{1-e^{-m}}{2},$$

$$(49)\quad \int_0^\infty \frac{l\cos\frac{1}{2}mx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\, l\,\frac{1+e^{-m}}{2},$$

$$(50)\quad \int_0^\infty \frac{l\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}mx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\, l\,\frac{e^m-1}{e^m+1}.$$

194. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+2\alpha\cos mx+\alpha^2)}.$

On a

$$\frac{1}{1+2\alpha\cos mx+\alpha^2} = \frac{1}{1-\alpha^2}(1-2\alpha\cos mx+2\alpha^2\cos 2mx+\ldots);$$

par conséquent

$$(51)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+2\alpha\cos mx+\alpha^2)} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\alpha\pi}{2}e^{-m}+2\alpha^2\frac{\pi}{2}e^{-2m}+\ldots\right)$$
$$= \frac{\pi}{2(1-\alpha^2)}\left(\frac{1-\alpha e^{-m}}{1+\alpha e^{-m}}\right).$$

195. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin mx\, dx}{(1+x^2)(1+2\alpha\cos mx+\alpha^2)}$.

On a trouvé (I, 386)

$$\frac{\alpha \sin mx}{1+2\alpha\cos mx+\alpha^2} = \alpha\sin mx - \alpha^2\sin 2mx + \alpha^3\sin 3mx - \ldots;$$

par conséquent (190)

$$(52)\qquad \int_0^\infty \frac{x\sin mx\, dx}{(1+x^2)(1+2\alpha\cos mx+\alpha^2)} = \frac{\pi}{2\alpha}(\alpha e^{-m} - \alpha^2 e^{-2m} + \alpha^3 e^{-3m} - \ldots)$$
$$= \frac{\pi e^{-m}}{2(1+\alpha e^{-m})} = \frac{\pi}{2(\alpha+e^m)}.$$

196. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin mx\, dx$.

$e^{-\pi x}$ étant plus petit que l'unité, on a

$$\frac{e^{ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{e^{ax}e^{-\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} = e^{ax}(e^{-\pi x}+e^{-3\pi x}+e^{-5\pi x}+\ldots),$$

et de même

$$\frac{e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = e^{-ax}(e^{-\pi x}+e^{-3\pi x}+e^{-5\pi x}+\ldots).$$

Mais, lorsque k est positif,

$$(\mathrm{K})\qquad \int_0^\infty e^{-kx}\sin bx\, dx = \frac{b}{k^2+b^2};$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin mx\, dx = \sum \frac{m}{[(2n-1)\pi-a]^2+m^2} + \sum \frac{m}{[(2n-1)\pi+a]^2+m^2},$$

n devant recevoir toutes les valeurs entières et positives.

Mais on a trouvé (I, 408)

$$\frac{e^m+e^{-m}+2\cos a}{2(1+\cos a)} = \left[1+\frac{4m^2}{(\pi-a)^2}\right]\left[1+\frac{4m^2}{(\pi+a)^2}\right]\cdots.$$

En différentiant les deux membres par rapport à m, après avoir pris les logarithmes, on trouve

$$\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+2\cos a+e^{-m}} = \sum \frac{2m}{[(2n-1)\pi-a]^2+m^2} + \sum \frac{2m}{[(2n-1)\pi+a]^2+m^2},$$

et par conséquent

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+2\cos a+e^{-m}},$$

où il faut supposer $a<\pi$, afin que la formule (K) soit applicable lorsque $k=q-\pi$.

En remplaçant dans cette formule m par $\alpha\sqrt{-1}$, elle devient

$$\int_0^\infty \frac{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos a},$$

et en remplaçant ensuite a par $m\sqrt{-1}$

$$(54)\qquad \int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\cos mx\,dx = \frac{\sin\alpha}{e^m+2\cos\alpha+e^{-m}}.$$

En faisant $m=0$, on a

$$(55)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Si dans la formule (53) on fait $a=0$, elle devient

$$(56)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{1}{4}\,\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+2+e^{-m}} = \frac{1}{4}\,\frac{e^{\frac{m}{2}}-e^{-\frac{m}{2}}}{e^{\frac{m}{2}}+e^{-\frac{m}{2}}},$$

et en faisant $a=\pi$

$$(57)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx\sin mx = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{m}{2}}+e^{-\frac{m}{2}}}{e^{\frac{m}{2}}-e^{-\frac{m}{2}}}.$$

197. Développons les deux membres de l'équation (56) suivant les puissances de m. Nous aurons (I, 388), en remarquant que

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{m}{2}}-e^{-\frac{m}{2}}}{e^{\frac{m}{2}}+e^{-\frac{m}{2}}} = -\frac{\sqrt{-1}}{4}\operatorname{tang}\left(\frac{m}{2}\sqrt{-1}\right),$$

$$m\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} - \frac{m^3}{1.2.3}\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^2-1}{1.2}B_1 m - \frac{2^4-1}{1.2.3.4}B_2 m^3 + \frac{2^6-1}{1.2.3.4.5.6}B_3 m^5 + \cdots\right),$$

et en égalant les coefficients des mêmes puissances de m

$$(58)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{2^{2n}-1}{4n}\,B_n,$$

198. Les formules des paragraphes précédents permettent de calculer des intégrales analogues, dans lesquelles figure en dénominateur sous le signe $\int$ la somme de deux exponentielles.

Si, en effet, on remplace successivement dans (53) a par $a+\frac{\pi}{2}$ et par $a-\frac{\pi}{2}$, on trouve, en retranchant l'une de l'autre les équations ainsi obtenues,

$$(59)\qquad \int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\sin mx\,dx = \frac{2(e^m-e^{-m})\sin a}{e^{2m}+2\cos 2a+e^{-2m}}.$$

On déduit de (54), par un artifice semblable,

$$(60)\qquad \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x}+e^{-\alpha x})}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\cos mx\,dx = \frac{(e^m+e^{-m})\cos\alpha}{e^{2m}+2\cos 2\alpha+e^{-2m}}.$$

En faisant $m=0$ dans les équations (60) et (54), on trouve

$$(61)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{e^{\frac{\pi x}{2}}+e^{-\frac{\pi x}{2}}}\,dx = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$(62)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\alpha.$$

En faisant dans (61) $e^{-\frac{\pi x}{2}}=z^n$, $\frac{2\alpha n}{\pi}=m$, et dans (62) $e^{-\pi x}=z^n$, $\frac{\alpha n}{\pi}=m$, on trouve

$$(63)\qquad \int_0^1 \frac{z^m-z^{-m}}{z^n-z^{-n}}\,\frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2n}\tang\frac{m\pi}{2n},$$

$$(64)\qquad \int_0^1 \frac{z^m+z^{-m}}{z^n+z^{-n}}\,\frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\cos\frac{m\pi}{2n}}.$$

En faisant $n=\frac{1}{2}$, $m=a-\frac{1}{2}$, on a

$$(65)\qquad \int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}\,dz = \pi\cot a\pi.$$

On peut de cette formule déduire la suivante, déjà démontrée (141),

$$(66)\qquad \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Dans la formule (65), remplaçons z par z^2 et a par $\frac{a}{2}$, nous aurons

$$(67)\qquad \int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{1-a}}{1-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\cot\frac{1}{2}a\pi;$$

en mettant $1-a$ au lieu de a

$$(68)\qquad \int_0^1 \frac{z^{-a}-z^{a}}{1-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\pi;$$

et en ajoutant les formules (67) et (68)

$$(69)\qquad \int_0^1 \frac{z^{a-1}+z^{-a}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

ce qui équivaut (144) à

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

199. L'intégrale

$$(70)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\mathrm{A}\cos x-\mathrm{B}\sin x},$$

aisée à calculer directement, est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}},$$

en supposant toutefois que $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$ étant moindre que l'unité, le dénominateur de la différentielle ne devienne jàmais égal à zéro. Si A et B désignent des constantes imaginaires, la formule est-elle encore applicable et quelle est la valeur de l'intégrale?

Le développement en série est nécessaire pour distinguer les différents cas.

Soit

$$\mathrm{A} = a + a'\sqrt{-1},\quad \mathrm{B} = b + b'\sqrt{-1},$$

le dénominateur ne s'annulera que si l'on a en même temps

$$a\cos x + b\sin x = 1,$$
$$a'\cos x + b'\sin x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\cos x = \frac{b'}{ab' - ba'},$$

$$\sin x = \frac{-a'}{ab' - ba'},$$

équations contradictoires si l'on n'a pas

$$(ab' - ba')^2 = a'^2 + b'^2.$$

Nous supposons que cette condition ne soit pas remplie et que l'intégrale soit par conséquent finie et déterminée. Posons

$$\Delta = ab' - ba';$$

on peut toujours supposer Δ positif, car, en changeant x en $2\pi - x$, les limites restent les mêmes et les signes de b et de b' sont seuls changés.

On a identiquement

$$(71) \qquad \frac{1}{1 - A\cos x - B\sin x} = \frac{1}{n - n'\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{1 - Ce^{x\sqrt{-1}}} + \frac{1}{1 - C'e^{-x\sqrt{-1}}} - 1\right),$$

où

$$n - n'\sqrt{-1} = \sqrt{1 - A^2 - B^2} = \sqrt{1 - (a + a'\sqrt{-1})^2 - (b + b'\sqrt{-1})^2},$$

$$C = \frac{A - B\sqrt{-1}}{1 + \sqrt{1 - A^2 - B^2}},$$

$$C' = \frac{A + B\sqrt{-1}}{1 + \sqrt{1 - A^2 - B^2}}.$$

Le signe du radical $\sqrt{1 - A^2 - B^2}$ étant arbitraire, nous supposerons que n soit positif.

Avant de développer la fraction (71), il importe d'examiner si les modules de C et de C′ sont plus grands ou moindres que l'unité. On a

$$CC' = \frac{1 - n + n'\sqrt{-1}}{1 + n - n'\sqrt{-1}},$$

dont le module est

$$\sqrt{\frac{(1 - n)^2 + n'^2}{(1 + n)^2 + n'^2}},$$

évidemment moindre que l'unité, et l'un des modules au moins est par conséquent moindre que l'unité.

Ces modules sont respectivement

$$\sqrt{\frac{a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\Delta}{(1+n)^2+n'^2}},\quad \sqrt{\frac{a^2+a'^2+b^2+b'^2-2\Delta}{(1+n)^2+n'^2}},$$

et puisque Δ est positif, c'est le second qui est le plus petit. Le module de C′ est donc moindre que l'unité; celui de C peut être plus grand ou plus petit que l'unité suivant des cas qu'il faut distinguer.

Le produit des carrés des modules de C et de C′ est

$$\frac{1+n^2+n'^2-2n}{1+n^2+n'^2+2n}=\frac{(a^2+a'^2+b^2+b'^2)^2-4\Delta^2}{(1+n^2+n'^2+2n)^2}.$$

On a, par conséquent,

$$(a^2+a'^2+b^2+b'^2)^2-4\Delta^2=(1+n^2+n'^2)^2-4n^2,$$

et l'on voit que suivant que Δ sera plus petit ou plus grand que n, $a^2+a'^2+b^2+b'^2$ sera en même temps plus petit ou plus grand que $1+n'+n'^2$, et, *à fortiori*, $a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\Delta$ plus petit ou plus grand que $1+n'+n'^2+2n$, et le module de C est par conséquent plus petit ou plus grand que l'unité, suivant que Δ est plus petit ou plus grand que n. Mais on a

$$(n-n'\sqrt{-1})^2=1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2,$$

et par suite

$$n^2-n'^2=1-a^2+a'^2-b^2+b'^2,$$
$$nn'=aa'+bb';$$

d'où l'on conclut, à cause de la valeur de Δ^2,

$$\begin{aligned}(\Delta^2+n'^2)(\Delta^2-n^2)&=\Delta^4+\Delta^2(a^2+b^2-a'^2-b'^2)-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\\&=(\Delta^2+a^2+b^2)(\Delta^2-a'^2-b'^2);\end{aligned}$$

d'où résulte que Δ est plus petit ou plus grand que n, suivant qu'il est plus petit ou plus grand que $\sqrt{a'^2+b'^2}$, et la condition cherchée est par conséquent la suivante :

Le module de C′ est toujours moindre que 1;

Celui de C l'est seulement lorsque $ab'-ba'$ est plus petit que $\sqrt{a'^2+b'^2}$. Le module de C′ étant moindre que l'unité, on a, dans tous les cas,

$$\frac{1}{1-C'e^{-x\sqrt{-1}}}=1+C'e^{-x\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2x\sqrt{-1}}+\ldots,$$

et, suivant que le module de C est moindre ou plus grand que l'unité,

$$\frac{1}{1 - Ce^{x\sqrt{-1}}} - 1 = Ce^{x\sqrt{-1}} + C^2 e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots,$$

ou

$$\frac{1}{1 - Ce^{x\sqrt{-1}}} - 1 = -\left(1 + C^{-1} e^{-x\sqrt{-1}} + C^{-2} e^{-2x\sqrt{-1}} + \ldots\right),$$

et par conséquent, lorsque $(ab' - a'b)^2$ est plus petit que $a'^2 + b'^2$, on a

$$\frac{n - n'\sqrt{-1}}{1 - (a + a'\sqrt{-1})^2 \cos x - (b + b'\sqrt{-1})^2 \sin x}$$
$$= 1 + Ce^{x\sqrt{-1}} + C^2 e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots + C' e^{-x\sqrt{-1}} + C'^2 e^{-2x\sqrt{-1}} + \ldots.$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} e^{kx\sqrt{-1}}\, dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{-2kx\sqrt{-1}}\, dx = 0;$$

par conséquent, dans ce cas,

$$(72) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - A\cos x - B\sin x} = \frac{2\pi}{n - n'\sqrt{-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - A^2 - B^2}}.$$

Si l'on a au contraire

$$(ab' - ba')^2 > a'^2 + b'^2,$$

on doit écrire

$$\frac{n - n'\sqrt{-1}}{1 - A\cos x - B\sin x} = (C' - C^{-1})\, e^{-x\sqrt{-1}} + (C'^2 - C^{-2})\, e^{-2x\sqrt{-1}} + \ldots,$$

et dans ce cas

$$(73) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - A\cos x - B\sin x} = 0.$$

On voit, par cet exemple, combien, avant d'employer les développements en séries, il importe de s'assurer de leur convergence.

200. Presque toutes les intégrales définies précédemment obtenues par le développement en série ont été choisies parmi celles dont l'intégrale indéfinie correspondante n'est pas connue explicitement. Le développement en série peut s'appliquer élégamment à d'autres cas pour simplifier les calculs ou l'expression du résultat. Nous en donnerons un exemple emprunté au Cours d'Analyse professé par

M. Hermite à l'École Polytechnique. Cherchons l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

où $F(x)$ désigne un polynôme entier quelconque. Les réductions successives indiquées (63) montrent que l'intégrale indéfinie est de la forme

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varphi(x)\sqrt{1-x^2} + A\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier en x et A une constante. On en déduit évidemment

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = A\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A\pi,$$

et toute la question se réduit à déterminer la constante A.

Or cette constante, facile d'ailleurs à calculer directement dans chaque cas, est égale au terme constant dans le produit de $F(x)$ par le développement

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^4} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{x^{2n}} + \ldots.$$

Reprenons en effet l'égalité

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varphi(x)\sqrt{1-x^2} + A\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et développons dans les deux membres, suivant les puissances décroissantes de x, les fonctions placées sous le signe intégral, ainsi que le terme algébrique $\varphi(x)\sqrt{1-x^2}$; il faudra pour cela les écrire sous la forme

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{F(x)}{x\sqrt{-1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varphi(x)\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{-1}\,\varphi(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{-1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$F(x)$ étant supposé de degré μ, on aura

$$F(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \cdots,$$

$\alpha_\mu, \alpha_{\mu-1}, \ldots, \alpha', \ldots$ étant des constantes.

En multipliant les deux membres par $\frac{dx}{x\sqrt{-1}}$ et intégrant, on formera le développement de $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sous forme d'une série contenant dans un nombre fini de termes les puissances positives de x, un terme de la forme $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}\,lx$, et des termes en nombre infini contenant les puissances de $\frac{1}{x}$. Le produit $\varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ traité de la même manière donnera un développement purement algébrique, et l'intégrale $A\int \frac{dx}{x\sqrt{-1}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donnera pour premier terme $\frac{A}{\sqrt{-1}}\,lx$, tous les autres étant algébriques; en sorte qu'en égalant les coefficients des deux termes logarithmiques, on aura

$$A = \alpha;$$

c'est précisément le théorème énoncé, dont la démonstration directe résulterait d'ailleurs aisément des formules (63).

201. Plusieurs intégrales se transforment en séries par décomposition en un nombre infini d'intégrales partielles, dont les limites embrassent, à elles toutes, l'intervalle compris entre celles de l'intégrale cherchée.

Soit, par exemple, à chercher

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}.$$

On a évidemment

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{x} + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{x} + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x\,dx}{x} + \cdots.$$

Si l'on pose

$$x = (2n-1)\pi + y,$$

on aura

$$\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin x\,dx}{x} = \int_0^\pi \frac{-\sin y}{(2n-1)\pi + y}\,dy,$$

et, en posant $x = (2n-1)\pi - y$,

$$\int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\sin x\,dx}{x} = \int_0^\pi \frac{\sin y\,dy}{(2n-1)\pi - y};$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \int_0^\pi \sin y\,dy\left(\frac{1}{\pi-y} - \frac{1}{\pi+y} + \frac{1}{3\pi-y} - \frac{1}{3\pi+y} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire (I, 409)

$$(74)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin y \operatorname{tang}\frac{1}{2}y\,dy = \int_0^\pi \sin^2\frac{1}{2}y\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

La formule précédente déjà obtenue (179), et que nous retrouverons par d'autres méthodes, peut se rattacher à la formule

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \cdots\right)$$

donnée (I, 382). Soit en effet $\varphi = dx$, on a

$$\frac{\pi}{2} = 2dx\left(\frac{\sin dx}{dx} + \frac{\sin 3dx}{3dx} + \frac{\sin 5dx}{5dx} + \cdots\right).$$

Le second membre est la somme des rectangles inscrits dans la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

et ayant pour base $2dx$. La somme de ces rectangles est évidemment, lorsque dx est infiniment petit,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}.$$

202. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2}$.

On a évidemment

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \cdots + \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \cdots.$$

Mais en posant

$$x = 2n\pi + y,$$

on a

$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2},$$

et, en posant $x = (2n+2)\pi - y$,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[(2n+2)\pi-y]^2};$$

par conséquent

$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[2n+2)\pi-y]^2},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dy \cos y \left[\frac{1}{a^2+y^2} + \frac{1}{a^2+(2\pi+y)^2} + \frac{1}{a^2+(2\pi-y)^2} + \cdots\right].$$

On en conclut, en différentiant la troisième formule (I, 408), après avoir pris le logarithme des deux membres,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{4a}\int_0^{2\pi} \frac{(e^a-e^{-a})\cos y\,dy}{e^a-2\cos y+e^{-a}}.$$

Mais on déduit de (I, 386)

$$\frac{e^a-e^{-a}}{e^a-2\cos y+e^{-a}} = 1+2e^{-a}\cos y+2e^{-2a}\cos 2y+2e^{-3a}\cos 3y+\ldots,$$

d'ailleurs

$$\int_0^{2\pi} \cos ny \cos y\,dy = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 y\,dy = \pi,$$

et par conséquent enfin

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}. \tag{75}$$

203. Soit enfin l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x}.$$

On a

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x} + \ldots.$$

En posant $x = n\pi - y$,

$$\int_{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\pi} \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{x}$$

devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} y\,dy}{n\pi-y};$$

et en posant $x = n\pi + y$,

$$\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} x\, dx}{x}$$

devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} y\, dy}{n\pi + y}.$$

L'intégrale cherchée est par conséquent égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang} y\, dy \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{2\pi + y} + \cdots + \frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{2\pi - y} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire (I, 414)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang} y \cot y\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc enfin

$$(76) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tang} x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Formule générale de Poisson.

204. Désignons par $F(\alpha)$ une fonction donnée de la variable α, soit x un angle quelconque, et faisons $\cos x + \sqrt{-1}\sin x = q$; si le théorème de Taylor est applicable à la fonction F, nous aurons

$$F(\alpha + q) = F(\alpha) + q\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \frac{q^2}{2}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{q^3}{2.3}\frac{d^3F(\alpha)}{d\alpha} + \cdots.$$

En changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura une autre équation qui se déduira de celle-ci en y mettant $\frac{1}{q}$ à la place de q; en ajoutant et retranchant l'une de l'autre les deux équations, et en ayant égard à la valeur de q, on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{2}F\left(\alpha + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{2}F(\alpha + q) = F(\alpha) + \cos x\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\cos 2x}{1.2}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} + \cdots,$$

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{-1}}{2}F\left(\alpha + \frac{1}{q}\right) - \frac{\sqrt{-1}}{2}F(\alpha + q) = \sin x\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\sin 2x}{2}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} + \cdots.$$

Mais on a (I, 386)

$$(3)\qquad \frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}=1+p\cos x+p^2\cos 2x+\cdots,$$

$$(4)\qquad \frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}=p\sin x+p^2\sin 2x+p^3\sin 3x+\cdots.$$

Multipliant l'équation (1) par l'équation (3) et l'équation (2) par l'équation (4), multipliant ensuite les produits par dx et intégrant entre les limites o et π, on trouvera

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left[F\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)+F(\alpha+q)\right](1-p\cos x)}{1-2p\cos x+p^2}\,dx=2F(\alpha)+p\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}+\cdots,$$

$$\frac{p\sqrt{-1}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left[F\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)-F(\alpha+q)\right]\sin x\,dx}{1-2p\cos x+p^2}=p\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}+\frac{p^2}{2}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}+\cdots,$$

c'est-à-dire

$$(77)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{F(\alpha+e^{-z\sqrt{-1}})+F(\alpha+e^{z\sqrt{-1}})(1-p\cos x)}{1-2p\cos x+p^2}\,dx=F(\alpha+p)+F(\alpha),$$

$$(78)\qquad \frac{p\sqrt{-1}}{\pi}\int_0^\pi \frac{F(\alpha+e^{-z\sqrt{-1}})-F(\alpha+e^{z\sqrt{-1}})\sin x\,dx}{1-2p\cos x+p^2}=F(\alpha+p)-F(\alpha).$$

La fonction F reste indéterminée, et ces résultats ont par conséquent une grande généralité; mais il ne faut pas oublier que les séries dont on fait usage doivent être convergentes, et que, sans cela, la démonstration n'a aucune force; p par exemple doit être plus petit que l'unité, sans quoi les formules (3) et (4) seraient inexactes.

Soit par exemple

$$F(x)=\frac{x}{ax^2+2x+a},$$

dans laquelle a est une constante donnée; supposons de plus qu'on fasse $\alpha=0$, on aura

$$F(0)=0,\quad F(e^{-z\sqrt{-1}})=F(e^{z\sqrt{-1}})=\frac{1}{2(1+a\cos x)}.$$

Le premier membre de l'équation (78) est donc nul et le second se réduit à $F(p)$; cette équation est donc inexacte.

L'équation (77) devient dans ce cas

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx(1-p\cos x)}{(1-2p\cos x+p^2)(1+a\cos x)} = \frac{p}{ap^2+2p+a},$$

équation inexacte, comme il est aisé de s'en assurer par l'intégration directe.

Il est aisé de voir en effet que les séries (1) et (2) ne sont pas dans ce cas convergentes. Soient h et k les deux racines, évidemment réelles si a est moindre que l'unité, de l'équation

$$\alpha^2 + \frac{2}{a}\alpha + 1 = 0.$$

On a

$$F(\alpha) = \frac{1}{a(h-k)}\left(\frac{h}{\alpha-h} - \frac{k}{\alpha-k}\right).$$

On en déduit, pour la valeur particulière $\alpha = 0$,

$$\frac{d^n F(\alpha)}{d\alpha^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{a(h-k)}(h^n - k^n),$$

et en observant que $hk = 1$, les séries (1) et (2) sont dans ce cas :

$$\frac{1}{a(h-k)}[(h-k)\cos x + (h^2-k^2)\cos 2x + \ldots],$$

$$\frac{1}{a(h-k)}[(h-k)\sin x + (h^2-k^2)\sin 2x + \ldots],$$

l'une des racines h et k étant plus grande que l'unité, ces séries sont évidemment divergentes.

205. Soit encore $F(\alpha) = \alpha^a$, en faisant $\alpha = 1$, et supposant l'exposant a positif, les séries (1) et (2) ne sont plus divergentes et l'on a

$$F(1+e^{x\sqrt{-1}}) = (1+\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^a = 2^a\cos^a\frac{x}{2}\left(\cos\frac{ax}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{ax}{2}\right),$$

et l'on déduit des équations (77), (78), en retranchant de la première la formule obtenue par l'hypothèse $p = 0$ et mettant $2x$ à la place de x,

$$(79)\qquad \frac{2(1-p^2)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a x\cos ax\,dx}{1-2p\cos 2x+p^2} = \left(\frac{1+p}{2}\right)^a,$$

$$(80)\qquad \frac{4p}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a x\sin ax\sin 2x\,dx}{1-2p\cos 2x+p^2} = \left(\frac{1+p}{2}\right)^a - \frac{1}{2^a}.$$

Si l'on développe les deux membres suivant les puissances de p et qu'on égale de part et d'autre les coefficients de p^n, on aura

$$(81)\qquad \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos ax \cos 2nx\, dx = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2^a},$$

$$(82)\qquad \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \sin ax \sin 2nx\, dx = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{2^a},$$

et, en prenant la somme et la différence de ces résultats,

$$(83)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos(a-2n)x\, dx = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2^a},$$

$$(84)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos(a+2n)x\, dx = 0.$$

n peut désigner un nombre entier positif quelconque, le cas de $n = 0$ doit être exclu. Mais en faisant dans (79) $p = 0$, on a

$$(85)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos ax\, dx = \frac{1}{2^a}.$$

Formule d'Abel.

206. Soit $F(x+\alpha)$ une fonction développable suivant les puissances de $e^{-\alpha}$, et

$$F(x+\alpha) = A + B_1 e^{-\alpha} + B_2 e^{-2\alpha} + \ldots + B_n e^{-n\alpha} + \ldots,$$

et en supposant le développement étendu aux valeurs imaginaires de α

$$F(x+\alpha t\sqrt{-1}) + F(x-\alpha t\sqrt{-1}) = 2A + 2B_1\cos\alpha t + 2B_2\cos 2\alpha t + \ldots,$$

on en déduit (202)

$$(86)\qquad \int_0^{\infty} \frac{F(x+\alpha t\sqrt{-1}) + F(x-\alpha t\sqrt{-1})}{1+t^2}\, dt$$
$$= \pi(A + B_1 e^{-\alpha} + B_2 e^{-2\alpha} + \ldots) = \pi F(x+\alpha).$$

Soit par exemple $F(x) = \frac{1}{x}$, on a

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+\alpha^2 t^2)} = \frac{\pi}{2x(x+\alpha)},$$

ce qui est exact, comme on s'en assure par l'intégration de la fraction rationnelle.

Soit encore $\varphi(x) = \frac{1}{x^n}$, on aura, en posant $\alpha t = z \sin\varphi$, $x = z\cos\varphi$,

$$\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) + \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = z^{-n}\cos n\varphi,$$

et comme, d'après les hypothèses,

$$z = \sqrt{x^2+\alpha^2 t^2}, \quad \varphi = \text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x},$$

la formule (86) devient

$$(87) \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}\,\frac{\cos n\,\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x}}{(x^2+\alpha^2 t^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi}{2(x+\alpha)^n}.$$

Si l'on veut prendre φ pour variable au lieu de t, on a

$$t = \frac{x}{\alpha}\,\text{tang}\,\varphi,$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x\, d\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi},$$

$$\cos n\,\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x} = \cos n\varphi,$$

$$\frac{1}{(x^2+\alpha^2 t^2)^{\frac{n}{2}}} = z^{-n} = \frac{\cos^n\varphi}{x^n},$$

et la formule (87) devient

$$(88) \qquad \frac{\alpha}{x^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\varphi\cos n\varphi\, d\varphi}{x^2\sin^2\varphi + \alpha^2\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2(x+\alpha)^n}.$$

Si l'on fait $\alpha = x$, on en déduit la formule (85)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Formule de Jacobi.

207. On a trouvé (157), (160), en nommant m et n deux entiers positifs tels que $m > n$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1.(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2m+2n)(2m+2n-2)\ldots 2},\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \cos 2nx\, dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos 2nx\, dx\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2^{2m}} \frac{2m(2m-1)\ldots(m+n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)} \frac{\pi}{2},\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x \cos(2n+1)x\, dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \sin(2n+1)x\, dx\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2^{2m+1}} \frac{(2m+1)2m\ldots(m+n+2)}{1.2.3\ldots(m-n)} \frac{\pi}{2};
\end{aligned}\right.$$

les deux dernières sont comprises dans la formule plus générale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix\, dx = \frac{1}{2^p} \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+i}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p-i}{2}},$$

qui suppose seulement que la différence $p-i$ soit un nombre pair. Cette formule peut s'écrire encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix\, dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)} \frac{(p-i-1)(p-i-3)\ldots 1.(2i-1)(2i-3)\ldots 1}{2.4.6\ldots(p+i)} \frac{\pi}{2},$$

qui, à cause des formules (1), donne

$$(2)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix\, dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} x \cos^{p-i} x\, dx.$$

Cette équation suppose que la différence $p-i$ soit un nombre pair. Si l'on double la limite supérieure, les deux membres doubleront et resteront égaux, et comme

ils sont tous deux égaux à zéro, lorsque la différence $p - i$ est impaire, la formule ainsi modifiée

$$(3)\qquad \int_0^\pi \cos^p x \cos ix\, dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.2.3\ldots(2i-1)} \int_0^\pi \sin^{2i} x \cos^{p-i} x\, dx$$

a lieu pour toutes les valeurs entières des nombres p et i, tels que l'on ait $p - i > 0$.

208. Jacobi a déduit des résultats précédents une formule très-générale pour la transformation d'une classe d'intégrales définies.

Soit $\varphi(z)$ une fonction développable suivant les puissances entières de z et

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p + \ldots.$$

En désignant par $\varphi^i(z)$ la dérivée d'ordre i, on a

$$\varphi^i(z) = \sum p(p-1)\ldots(p-i+1) A_p z^{p-i},$$

et d'après l'équation (3) on en conclut immédiatement

$$\int_0^\pi \varphi(\cos x) \cos ix\, dx = \sum A_p \int_0^\pi \cos^p x \cos ix\, dx = \frac{1}{1.3\ldots(2i-1)} \int_0^\pi dx \sin^{2i} x\, \varphi^i(\cos x).$$

Cette formule déduite du développement en série est vraie d'ailleurs dans tous les cas et applicable au cas même où la fonction n'est pas développable.

On a trouvé en effet (I, 143), en supposant $\cos x = z$,

$$\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} 1.3.5\ldots(2i-1) \frac{\sin ix}{i}.$$

Mais une intégration par parties $i - 1$ fois répétée donne, quelle que soit la fonction $\varphi(z)$,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^i(z)(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}} dz = (-1)^i \int_{-1}^{+1} \varphi(z) \frac{d^i(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^i} dz.$$

Si l'on pose $z = \cos x$, cette formule devient

$$(89)\qquad \int_0^\pi \varphi^i(\cos x) \sin^{2i} x\, dx = 3.5\ldots(2i-1) \int_0^\pi \varphi(\cos x) \cos ix\, dx.$$

Formule de M. Kummer.

209. Soit $\varphi(x)$ une fonction quelconque à laquelle soit applicable le théorème de Taylor, en sorte que

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi(x)+\alpha\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\cdots.$$

Posons

$$\alpha=xe^{2v\sqrt{-1}},$$

ce qui donne

$$x+\alpha=x(1+\cos 2v+\sqrt{-1}\sin 2v)=2x\cos v e^{v\sqrt{-1}};$$

par conséquent

$$\varphi(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}})=\varphi(x)+xe^{2v\sqrt{-1}}\varphi'(x)+\frac{x^2}{1.2}e^{4v\sqrt{-1}}\varphi''(x)+\cdots.$$

Multipliant par $e^{2nv\sqrt{-1}}dv$ et intégrant les limites $v=-\frac{1}{2}\pi$ et $v=\frac{1}{2}\pi$, on trouve

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}})\,dv=\sin n\pi\left[\frac{\varphi(x)}{n}-\frac{x}{(n+1)}\varphi'(x)+\frac{x^2}{1.2.(n+2)}\varphi''(x)-\cdots\right].$$

De même, en posant $\alpha=-xw$, on a

$$\varphi(x-xw)=\varphi(x)-\frac{xw}{1}\varphi'(x)+\frac{x^2w^2}{1.2}\varphi''(x)-\cdots.$$

Multipliant par $w^{n-1}dw$ et intégrant entre les limites $w=0$ et $w=1$, on trouve la même série exprimée par cette autre intégrale

$$\int_0^1 w^{n-1}\varphi(x-xw)\,dw=\frac{1}{n}\varphi(x)-\frac{x}{(n+1)}\varphi'(x)+\frac{x^2}{1.2.(n+2)}\varphi''(x)-\cdots,$$

et en égalant les deux expressions de la même série

$$(90)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}})\,e^{2nv\sqrt{-1}}\,dv=\sin n\pi\int_0^1 w^{n-1}\varphi(x-xw)\,dw.$$

Si l'on pose $w = 1 - u$

$$(91)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}}\right) e^{2nv\sqrt{-1}}\, dv = \sin n\pi \int_0^1 (1-u)^{n-1} \varphi(xu)\, du.$$

Soit $\varphi(x) = x^m$. Cette formule donne, quand on a chassé les imaginaires et divisé par x^m,

$$(92)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^m \cos(m+2n)v\, dv = \sin n\pi \int_0^1 u^m (1-u)^{n-1}\, du.$$

210. Lorsque dans la formule (91) on attribue à n une valeur entière k, $\sin n\pi$ devient nul, et le premier membre est *en général* égal à zéro. Je dis *en général*, car il faut excepter le cas où l'intégrale qui figure au second membre serait infinie. Lorsque cela n'a pas lieu, divisons les deux membres de (91) par $\sin n\pi$, puis donnons à n la valeur entière k; le premier membre, d'après ce que nous venons de dire, prendra la forme $\frac{0}{0}$, et l'on aura, en le remplaçant par sa véritable valeur, égale au rapport des dérivées,

$$\frac{2\sqrt{-1}}{\pi\cos k\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}}\right) e^{2kv\sqrt{-1}}\, v\, dv = \int_0^1 (1-u)^{k-1} \varphi(xu)\, du.$$

Si l'on fait $k = 1$,

$$(93)\qquad \frac{2}{\pi\sqrt{-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(2x\cos v e^{v\sqrt{-1}}\right) e^{2v\sqrt{-1}}\, v\, dv = \int_0^1 \varphi(xu)\, du.$$

Soit $\varphi(x) = x^{n-1}$, on aura

$$\frac{2}{\pi\sqrt{-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^{n-1} e^{(n+1)v\sqrt{-1}}\, v\, dv = \frac{1}{n},$$

et en faisant disparaître les imaginaires

$$(94)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^{n-1} \sin(n+1)v\, dv = \frac{\pi}{4n}.$$

211. M. Kummer a fait connaître d'autres formules qui, en établissant des relations entre certaines intégrales définies et la somme de séries qui s'en déduisent, permettent de calculer les unes lorsque les autres sont connues.

Soit

$$\int_a^b \mathrm{U} f(u, k)\, du$$

une intégrale définie dans laquelle U désigne une fonction quelconque de u; supposons que, par un choix convenable de cette fonction, on ait trouvé une relation de la forme

$$(a) \qquad \int_a^b \mathrm{U} f(u, k)\, du = \mathrm{B}_k \int_a^b \mathrm{U} f(u, 0)\, du,$$

B_k étant une fonction connue de k.

Posons

$$\mathrm{A}_0 f(u, 0) + \mathrm{A}_1 f(u, 1) + \mathrm{A}_2 f(u, 2) + \ldots = \varphi(u),$$

et supposons que $\varphi(u)$ soit une fonction connue.

On aura

$$\int_a^b \varphi(u)\, \mathrm{U}\, du = \mathrm{A}_0 \int_a^b f(u, 0)\, \mathrm{U}\, du + \mathrm{A}_1 \int_a^b f(u, 1)\, \mathrm{U}\, du + \ldots,$$

et d'après la relation (a) qui a été supposée

$$\int_a^b \mathrm{U} \varphi(u)\, du = \int_a^b \mathrm{U} f(u, 0)\, du\, (\mathrm{A}_0 \mathrm{B}_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_0 \mathrm{B}_0 + \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n + \ldots = \frac{\int_a^b \mathrm{U} \varphi(u)\, du}{\int_a^b \mathrm{U} f(u, 0)\, du}.$$

M. Kummer a employé élégamment cette formule pour la détermination de plusieurs intégrales définies.

L'intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha + k - 1}\, du = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1) \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha - 1}\, du.$$

Posons donc dans les formules précédentes

$$\mathrm{U} = e^{-u} u^{\alpha - 1}, \quad f(u, k) = u^k,$$

nous aurons

$$B_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1),$$

et il en résultera le théorème suivant :

Si l'on connaît la somme de la série

$$A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_n u^n + \ldots = \varphi(u),$$

on aura

$$A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha(\alpha+1) + A_3\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) + \ldots = \frac{\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\varphi(u)\,du}{\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\,du}.$$

212. Posons par exemple dans la formule précédente

$$\varphi(u) = \cos(u \operatorname{tang} x).$$

On aura

$$A_0 = 1,\quad A_1 = 0,\quad A_2 = -\frac{\operatorname{tang}^2 x}{1.2},\quad A_3 = 0,\quad A_4 = \frac{\operatorname{tang}^4 x}{1.2.3.4},\ldots,$$

et par conséquent

$$1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\operatorname{tang}^2 x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4 x - \ldots$$
$$= \frac{\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\cos(u \operatorname{tang} x)\,du}{\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\,du}.$$

Mais le premier membre est le développement de $(\cos x)^\alpha \cos\alpha x$; le dénominateur du second membre a été désigné par $\Gamma(\alpha)$, par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\cos(u \operatorname{tang} x)\,du = \Gamma(\alpha)(\cos x)^\alpha \cos\alpha x.$$

En posant

$$\varphi(u) = \sin(u \operatorname{tang} x),$$

on trouverait de même

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\sin(u \operatorname{tang} x)\,du = \Gamma(\alpha)(\cos x)^\alpha \sin\alpha x.$$

213. Prenons encore

$$\varphi(u) = \cos(2\sqrt{xu}) = 1 - \frac{2^2}{1.2}xu + \frac{2^4}{1.2.3.4}x^2u^2 - \ldots,$$

nous aurons

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{x}{\frac{1}{2}\cdot 1}, \quad A_2 = \frac{x^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1.2}, \ldots,$$

et par conséquent

$$1 - \frac{\alpha x}{\frac{1}{2}\cdot 1} + \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1.2} - \ldots = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}\cos(2\sqrt{xu})\,du.$$

Si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, le premier membre devient le développement de e^{-x}; on a d'ailleurs

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi},$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\cos(2\sqrt{xu})\,du = \sqrt{\pi}\,e^{-x}.$$

Si l'on pose $u = v^2$, $x = z^2$,

$$\int_0^\infty e^{-v^2}\cos 2zv\,dv = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{-z^2}}{2},$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (182).

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$.

214. La valeur d'une intégrale définie ne dépend pas de la variable par rapport à laquelle s'effectue l'intégration, mais elle est fonction des paramètres indépendants de cette variable qui peuvent figurer dans la fonction intégrée et que l'on considère comme des constantes dans l'opération. On peut différentier ou intégrer une intégrale définie par rapport aux lettres dont elle dépend de cette manière, et il existe pour cela deux règles importantes dont les applications font le sujet de ce chapitre.

Différentiation sous le signe $\int$.

215. Soit une intégrale

$$u = \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx, \tag{1}$$

a et b désignant deux limites données indépendantes de α. Cherchons la dérivée $\frac{du}{d\alpha}$. Si l'on change α en $\alpha + \Delta\alpha$, on a, en nommant Δu l'accroissement correspondant de u,

$$u + \Delta u = \int_a^b \varphi(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx, \tag{2}$$

et par conséquent

$$\Delta u = \int_a^b [\varphi(x, \alpha + \Delta\alpha) - \varphi(x, \alpha)]\, dx,$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{\varphi(x, \alpha + \Delta\alpha) - \varphi(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx,$$

et en passant à la limite

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx. \tag{3}$$

216. Il est important de signaler une difficulté que laisse subsister la démonstration précédente et qui explique certaines anomalies que l'on rencontre dans l'application du théorème.

La fonction

$$(4) \qquad \frac{\varphi(x, \alpha + \Delta\alpha) - \varphi(x, \alpha)}{\Delta\alpha}$$

a pour limite, quelle que soit la valeur attribuée à x, la dérivée $\frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}$, mais il peut arriver qu'à chaque valeur de $\Delta\alpha$ correspondent des valeurs de x assez grandes pour que la différence entre la fonction (4) et sa limite soit aussi grande qu'on le voudra. Soit, par exemple,

$$u = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1 + x^2}\, dx.$$

On trouverait, en appliquant la formule (3),

$$\frac{du}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{x \sin\alpha x}{1 + x^2}\, dx,$$

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2 \cos\alpha x}{1 + x^2}\, dx,$$

et $\frac{d^2 u}{d\alpha^2}$ serait par conséquent indéterminé, puisque, pour une valeur infinie de x, la fonction $\frac{x^2 \cos\alpha x}{1 + x^2}$ est évidemment indéterminée. Le théorème est donc en défaut, et cela tient à ce que, quelque petit que soit $\Delta\alpha$, la différence

$$x\,\frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)x - \sin\alpha x}{\Delta\alpha} - x^2 \cos\alpha x$$

peut, pour certaines valeurs de x, devenir aussi grande qu'on le voudra, quoique, pour toute valeur de x, elle tende vers zéro avec $\Delta\alpha$.

217. Lorsque les limites a et b dépendent du paramètre α, la règle de différentiation est moins simple. Posons encore

$$u = \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Si l'on attribue à α l'accroissement $\Delta\alpha$, a et b se changent en $a + \Delta a$ et en $b + \Delta b$,

on aura

$$u + \Delta u = \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} \varphi(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx,$$

$$\Delta u = \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} \varphi(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx;$$

mais on a identiquement, quelle que soit la fonction désignée par P,

$$\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} \mathrm{P}\, dx = \int_a^b \mathrm{P}\, dx - \int_a^{a+\Delta a} \mathrm{P}\, dx + \int_b^{b+\Delta b} \mathrm{P}\, dx.$$

Lorsque $\Delta\alpha$ tend vers zéro, les limites des deux dernières intégrales se rapprochant indéfiniment, chacune d'elles peut être remplacée par un seul élément, et l'on a, à la limite,

$$(5) \qquad \frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx - \varphi(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \varphi(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha}.$$

Variation finie d'un paramètre.

218. On a quelquefois considéré utilement la variation produite par le changement fini attribué à la valeur d'un paramètre en faisant usage d'une formule, complétement évidente d'ailleurs, qui peut être considérée comme la généralisation du théorème de la différentiation sous le signe $\int$.

Si l'on pose

$$u = \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx,$$

les limites a et b étant indépendantes de α, on aura, en désignant par le signe Δ l'accroissement qui résulte d'un accroissement $\Delta\alpha$ attribué à α,

$$(6) \qquad \Delta u = \int_a^b \Delta\varphi(x, \alpha)\, dx.$$

On a, par exemple,

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx.$$

Si l'on attribue à α un accroissement égal à l'unité, on en déduira

$$\Delta\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}(e^{-x} - 1)\, dx,$$

et l'application répétée de la même formule donnera

$$\Delta^n \frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty \Delta^n e^{-\alpha x}\, dx,$$

c'est-à-dire, en supprimant le facteur commun $1.2.3\ldots n$,

$$(7) \qquad \frac{(-1)^n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}(e^{-x}-1)^n\, dx.$$

219. Considérons les deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos(2\alpha - m)x\, dx = \frac{k}{(2\alpha-m)^2+k^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\sin(2\alpha - m)x\, dx = \frac{2\alpha-m}{(2\alpha-m)^2+k^2}.$$

Si l'on donne à α un accroissement $\Delta\alpha$, et que l'on égale *les différences*, c'est-à-dire les accroissements des deux membres, on en conclura

$$\int_0^\infty e^{-kx}\Delta\cos(2\alpha - m)x\, dx = \Delta\frac{k}{(2\alpha-m)^2+k^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\Delta\sin(2\alpha - m)x\, dx = \Delta\frac{2\alpha-m}{(2\alpha-m)^2+k^2}.$$

L'application répétée de la formule donne

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, dx\, \Delta^n\cos(2\alpha - m)x = \Delta^n\frac{k}{(2\alpha-m)^2+k^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, dx\, \Delta^n\sin(2\alpha - m)x = \Delta^n\frac{2\alpha-m}{(2\alpha-m)^2+k^2}.$$

220. Si l'on suppose m entier et égal à n, et $\Delta\alpha$ égal à l'unité, ces formules prennent une forme remarquable.

Supposons d'abord n pair égal à $2p$, on a

$$\Delta^{2p}\cos(2\alpha-2p)x = \cos(2\alpha+2p)x - 2p\cos(2\alpha+2p-2)x + \ldots + \cos(2\alpha-2p)x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\Delta^{2p}\cos(2\alpha-2p)x = \cos 2\alpha x\Big[&\cos 2px - 2p\cos(2p-2)x \\ &+ \frac{2p(2p-1)}{1.2}\cos(2p-4)x + \ldots + \cos 2px\Big]. \\ &- \sin 2\alpha x\,[\sin 2px - 2p\sin(2p-2)x + \ldots - \sin 2px].\end{aligned}$$

Le coefficient de $\cos 2\alpha x$, dans lequel les termes se doublent deux à deux, est égal (I, 385) à $(-1)^p 2^{2p} \sin^{2p} x$, et celui de $\sin 2\alpha x$ à zéro, parce que les termes également distants des extrêmes se détruisent; on a donc

$$\Delta^{2p} \cos(2\alpha - 2p)x = (-1)^p 2^{2p} \cos 2\alpha x \sin^{2p} x,$$

et par conséquent

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cos 2\alpha x \sin^{2p} x \, dx = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \Delta^{2p} \frac{k}{(2\alpha - 2p)^2 + k^2}.$$

Si l'on suppose n impair et égal à $2p + 1$, on a

$$\Delta^{2p+1} \sin(2\alpha - 2p - 1)x = \sin(2\alpha + 2p + 1)x - (2p + 1)\sin(2\alpha + 2p - 1)x$$
$$+ \frac{(2p+1)2p}{1.2} \sin(2\alpha + 2p - 3)x - \ldots - \sin(2\alpha - 2p - 1)x,$$

c'est-à-dire

$$\Delta^{2p+1} \sin(2\alpha - 2p - 1)x = \sin 2\alpha x [\cos(2p+1)x - (2p+1)\cos(2p-1)x + \ldots - \cos(2p+1)x]$$
$$+ \cos 2\alpha x \Big[\sin(2p+1)x - 2p \sin(2p-1)x$$
$$+ \frac{(2p+1)2p}{1.2} \sin(2p-3)x - \ldots + \sin(2p+1)x \Big].$$

Le coefficient de $\sin 2\alpha x$ est nul, car les termes à égale distance des extrêmes se détruisent, et celui de $\cos 2\alpha x$ est égal (I, 835) à $(-1)^p 2^{2p+1} \sin^{2p+1} x$, et l'on a

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \cos 2\alpha x \sin^{2p+1} x \, dx = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}} \Delta^{2p+1} \frac{2\alpha - 2p - 1}{(2\alpha - 2p - 1)^2 + k^2}.$$

La différence indiquée dans le second membre étant prise par rapport à α et correspondant à un accroissement égal à l'unité. On a

$$\Delta^{2p} \frac{k}{(2\alpha - 2p)^2 + k^2} = k \Bigg[\frac{1}{(2\alpha + 2p)^2 + k^2} - \frac{2p}{(2\alpha + 2p - 2)^2 + k^2}$$
$$+ \frac{\frac{2p(2p-1)}{1.2}}{(2\alpha + 2p - 4)^2 + k^2} - \cdots + \frac{1}{(2\alpha - 2p)^2 + k^2} \Bigg].$$

Si l'on suppose $\alpha = 0$, les termes à égale distance de celui du milieu deviennent égaux, et la somme devient égale à

$$k^{(-1)^p} \frac{(1.2.3\ldots 2p)2^{2p}}{k^2(k^2 + 2^2)(k^2 + 4^2)\ldots[k^2 + (2p)^2]},$$

comme l'on s'en assure aisément en décomposant cette fraction en fractions simples. On a donc

$$\int_0^\infty e^{-kx}\sin^{2p}x\,dx = \frac{1.2.3\ldots 2p}{k(k^2+4)(k^2+16)\ldots(k^2+4p^2)}.$$

On trouvera de même, en faisant $\alpha = 0$ dans la formule (8),

$$\int_0^\infty e^{-kx}\sin^{2p+1}x\,dx = \frac{1.2.3\ldots(2p+1)}{(k^2+1)(k^2+9)\ldots[k^2+(2p+1)^2]},$$

comme on l'a obtenu (165).

Intégration sous le signe $\int$.

221. Considérons de nouveau l'intégrale

$$(1)\qquad u = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx,$$

dont les limites a et b sont supposées indépendantes de α. On a

$$(2)\qquad \int u\,d\alpha = \int_a^b \left[\int \varphi(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx.$$

En effet, d'après le théorème démontré (215),

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b\left[\int\varphi(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx = u,$$

et par conséquent le second membre de (2), ayant pour dérivée par rapport à α la fonction u, est égal à $\int u\,d\alpha$.

222. Si l'on substitue à l'intégration indéfinie par rapport à α une intégration définie entre deux limites α_0 et α, l'équation (2) devient

$$(3)\qquad \int_{\alpha_0}^{\alpha} u\,d\alpha = \int_a^b\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha}\varphi(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx,$$

et les deux membres sont égaux, car ayant même dérivée par rapport à α, ils sont nuls tous deux pour $\alpha = \alpha_0$.

223. Les deux membres de l'équation (3) résultent l'un et l'autre d'une double intégration effectuée sur la fonction $\varphi(x,\alpha)$.

On voit que dans cette expression que l'on nomme une intégrale double, lorsque les limites relatives à chaque variable sont indépendantes l'une de l'autre, on peut changer l'ordre des intégrations.

224. Quelle que soit la fonction bien définie

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1},$$

on a (I, 360)

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy},$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx};$$

par conséquent, en nommant α, β, a et b des limites quelconques, on a

$$(4) \qquad \int_a^b dx \int_\alpha^\beta \frac{dQ}{dy}\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b \frac{dP}{dx}\, dx,$$

$$(5) \qquad \int_a^b dx \int_a^\beta \frac{dP}{dy}\, dy = -\int_\alpha^\beta dy \int_a^b \frac{dQ}{dx}\, dx.$$

La première intégration pouvant s'effectuer immédiatement, on aura ainsi des relations parfois importantes entre des intégrales de formes très-différentes.

Soit par exemple

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = e^{-(x+y\sqrt{-1})^2} = e^{-x^2} e^{y^2} (\cos 2xy - \sqrt{-1}\sin 2xy).$$

On a

$$P = e^{-x^2} e^{y^2} \cos 2xy,$$

$$Q = -e^{-x^2} e^{y^2} \sin 2xy.$$

L'équation (5) devient

$$\int_a^b dx\,(e^{-x^2} e^{\beta^2} \cos 2\beta x - e^{-x^2} e^{\alpha^2} \cos 2\alpha x)$$

$$= -\int_\alpha^\beta dy\,(e^{y^2} e^{-b^2} \sin 2by - e^{y^2} e^{-a^2} \sin 2ay).$$

Soit $a = 0$, $\alpha = 0$ et $b = \infty$, le second membre deviendra nul, et l'on aura

$$\int_0^\infty (e^{-x^2} e^{\beta^2} \cos 2\beta x - e^{-x^2})\, dx = 0,$$

par conséquent

$$e^{\beta^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\beta x\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

ce qui s'accorde avec les formules (153), (182).

Cas remarquable d'exception.

225. Il faut toujours (4) excepter le cas où les différentielles que l'on intègre passent par l'infini dans l'étendue des intégrations. Les intégrales, dans ce cas, n'ont pas toujours de signification déterminée, et les théorèmes dans lesquels elles figurent, n'étant pas suffisamment démontrés, peuvent conduire à des contradictions.

On n'a pas, par exemple,

$$(1)\qquad \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,d\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2},$$

parce que, pour $\alpha = 0$, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$$

devient

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty.$$

L'application pure et simple des règles ordinaires aux deux membres de l'équation (1) donne en effet un résultat absurde. On a

$$\int \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{x}{\alpha^2 + x^2},$$

$$\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

et

$$\int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On trouverait de même

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\,d\alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

et les deux membres de (1) sont par conséquent inégaux.

226. Réciproquement, si en renversant l'ordre des intégrations d'une intégrale double on obtient deux valeurs différentes, on peut affirmer que la fonction intégrée devient infinie pour des valeurs des variables comprises dans les limites de la double intégration.

Gauss s'est servi très-ingénieusement de cette remarque pour prouver que toute équation algébrique à coefficients réels admet une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Soit l'équation

$$(2) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Posons

$$x = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Le premier membre deviendra

$$P + Q\sqrt{-1},$$

où

$$P = \rho^m \cos m\omega + A_1 \rho^{m-1}\cos(m-1)\omega + \ldots + A_m,$$
$$Q = \rho^m \sin m\omega + A_1 \rho^{m-1}\sin(m-1)\omega + \ldots + A_{m-1}\rho\sin\omega.$$

Posons

$$V = \text{arc tang}\,\frac{P}{Q}:$$

on aura

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{Q\dfrac{dP}{d\omega} - P\dfrac{dQ}{d\omega}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{Q\dfrac{dP}{d\rho} - P\dfrac{dQ}{d\rho}}{P^2 + Q^2},$$

et la dérivée $\dfrac{d^2V}{d\rho\, d\omega}$ a pour dénominateur $(P^2 + Q^2)^2$. Si donc nous prouvons qu'elle devient infinie, P et Q devront s'annuler en même temps, et l'équation aura une racine.

Écrivons l'équation

$$(3) \qquad \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d^2V}{d\rho\, d\omega}\, d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{d^2V}{d\rho\, d\omega}\, d\rho,$$

qui est exacte nécessairement, quel que soit R (223), pourvu que $\dfrac{d^2V}{d\rho\, d\omega}$ ne devienne pas infini. Nous allons calculer les deux membres en supposant la valeur de R très-grande, et nous verrons qu'ils sont inégaux.

On a

$$\int \frac{d^2V}{d\rho\, d\omega}\, d\omega = \frac{dV}{d\rho}.$$

Si l'on remplace ω par zéro et par 2π, les valeurs de $\dfrac{dV}{d\rho}$ sont égales; par conséquent, quel que soit R, le premier membre de (3) est égal à zéro. Calculons le second membre.

On a

$$\int \frac{d^2 V}{d\rho\, d\omega}\, d\rho = \frac{dV}{d\omega} = \frac{Q\dfrac{dP}{d\omega} - P\dfrac{dQ}{d\omega}}{P^2 + Q^2}.$$

$Q\dfrac{dP}{d\omega}$ et $P\dfrac{dQ}{d\omega}$ sont nuls tous deux pour $\rho = 0$, et pour $\rho = R$, puisque R est supposé très-grand, on peut les réduire, ainsi que P et Q à leurs premiers termes. On trouve ainsi

$$\int_0^R \frac{d^2 V}{d\rho\, d\omega}\, d\rho = -\frac{m R^{2m}(\cos^2 m\omega + \sin^2 m\omega)}{R^{2m}(\cos^2 m\omega + \sin^2 m\omega)} = -m,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{d^2 V}{d\rho\, d\omega}\, d\rho = -2\pi m.$$

Les deux membres de (3) sont donc inégaux et il faut en conclure que $\dfrac{d^2 V}{d\rho\, d\omega}$ devient infini; que, par conséquent, P et Q deviennent nuls en même temps et que l'équation (2) a au moins une racine.

Intégrales déduites de la différentiation sous le signe $\int$.

227. La différentiation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre qu'elle contient permet d'obtenir des formules nouvelles dont la détermination directe serait quelquefois moins facile.

On a, par exemple,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}.$$

On en déduit, en différentiant n fois de suite par rapport à a,

$$(1) \qquad \int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\, dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a^n},$$

formule déjà obtenue.

La formule

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

donne de même, par la différentiation n fois répétée par rapport à a,

$$(2) \qquad \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1} a^{\frac{2n+1}{2}}}\sqrt{\pi}.$$

On a (182)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2kx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-k^2}.$$

On en déduit, en différentiant par rapport à k,

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x\sin 2kx\,dx = \frac{1}{2}k\sqrt{\pi}\,e^{-k^2},$$

et, en différentiant de nouveau n fois de suite,

$$(4)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x^{n+1}\sin\left(2kx+\frac{n}{2}\pi\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\frac{d^n ke^{-k^2}}{dk^n}.$$

Si l'on fait, par exemple, $n=1$, $k=1$,

$$(5)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x^2\cos 2x\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4e}.$$

228. On a

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

En différentiant k fois de suite par rapport à n, on en déduit

$$(6)\qquad \int_0^1 x^n(lx)^k\,dx = (-1)^k\frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)^{k+1}}.$$

229. La formule

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{\alpha+x} = \frac{\pi\alpha^{a-1}}{\sin a\pi}$$

s'obtient immédiatement en posant (141) $x=\alpha z$.

On en déduit, après n différentiations par rapport à α, et faisant $\alpha=1$,

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n\pi}{\sin a\pi}\,\frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2.3\ldots n}.$$

L'intégration par parties donne, en supposant $m<n+1$, la formule de réduction

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x)^n} = \frac{m}{n-1}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{n-1}},$$

et, par conséquent,

$$(10)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a+n}\,dx}{(1+x)^{2n+2}} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a+n}\,dx}{(1+x)^{2n+2}} = \frac{\pi(-1)^n}{\sin a\pi}\,\frac{a(a^2-1)\ldots(a^2-n^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}.$$

230. L'intégration directe donne

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

On en déduit, en différentiant par rapport à α,

$$(13)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3\beta}.$$

La différentiation par rapport à β donnera de même

$$(14)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3},$$

et en ajoutant les formules (13) et (14), on a

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right).$$

En opérant sur cette formule comme nous l'avons fait sur (12), on en déduira

$$(16)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{3}{\alpha\beta^5}+\frac{3}{\beta\alpha^5}+\frac{2}{\alpha^3\beta^3}\right),$$

et de celle-là

$$(17)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x+\beta^2\sin^2 x)^4} = \frac{\pi}{32}\left(\frac{5}{\alpha\beta^7}+\frac{5}{\beta\alpha^7}+\frac{7}{\alpha^3\beta^5}+\frac{7}{\alpha^5\beta^3}\right).$$

231 On a (99)

$$\int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m}}{1+x^{2n}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n\cos\frac{m\pi}{2n}}.$$

On en déduit, en différentiant par rapport à m,

$$(18)\qquad \int_0^1 \frac{-x^{n-m}+x^{n+m}}{1+x^{2n}}\frac{dx}{x}\,lx = \frac{\pi^2 \sin\frac{m\pi}{2n}}{4n^2\cos^2\frac{m\pi}{2n}}.$$

La formule (198)

$$\int_0^1 \frac{x^{n-m}-x^{n+m}}{1-x^{2n}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}$$

donne de même

$$(19)\qquad \int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m}}{1-x^{2n}}\frac{dx}{x}\,lx = \frac{-\pi^2}{4n^2\cos^2\frac{m\pi}{2n}}.$$

En faisant $m=0$, elle devient

$$(20)\qquad \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1-x^{2n}}\,dx\,lx = -\frac{\pi^2}{8n^2}.$$

232. La différentiation sous le signe $\int$ permet quelquefois de déterminer une intégrale inconnue en la rattachant à sa dérivée par rapport à un paramètre.

Soit, par exemple,

$$u = \int_0^1 \frac{dx \operatorname{arc\,tang} rx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

On en déduit

$$\frac{du}{dr} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+r^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+r^2}},$$

et par conséquent, u étant évidemment nul pour $r=0$,

$$(21)\qquad u = \frac{\pi}{2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}\,l\left(r+\sqrt{1+r^2}\right).$$

Si l'on fait par exemple $r=1$, on aura

$$(22)\qquad \int_0^1 \frac{dx \operatorname{arc\,tang} x}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,l\left(1+\sqrt{2}\right).$$

233. Soit encore

$$u = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} rx\,dx}{x(1+x^2)},$$

on aura

$$\frac{du}{dr} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+r},$$

et, par conséquent,

$$(23)\qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} rx}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\pi\int_0^r \frac{dr}{1+r} = \frac{\pi}{2}\,l(1+r).$$

234. Posons enfin

$$u = \int_0^\infty \frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx,$$

on a

$$\frac{du}{da} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}\,dx = \frac{\pi}{1+ab};$$

par conséquent, u étant nul pour $a = 0$,

$$(24)\qquad \int_0^\infty \frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx = \pi\int_0^a \frac{da}{1+ab} = \frac{\pi}{b}\,l(1+ab).$$

235. La méthode suivie dans le paragraphe précédent revient évidemment à une intégration sous le signe $\int$, appliquée à une intégrale que l'on forme de manière à obtenir le résultat désiré. Il arrive quelquefois que la dérivée n'étant pas connue, non plus que l'intégrale primitive, on aperçoit entre elles une relation qui sert à les déterminer toutes deux.

Soit, par exemple,

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx.$$

On a

$$\frac{du}{da} = -2a\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x^2},$$

et en posant $\frac{a}{x} = z$,

$$\frac{du}{da} = -2\int_0^\infty e^{-z^2-\frac{a^2}{z^2}}\,dz = -2u.$$

On en conclut

$$\frac{du}{u} = -2\,da,$$

$$lu = -2a + c,$$

$$u = c'e^{-2a},$$

c' étant indépendant de a. Pour $a = 0$, on a (153)

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

par conséquent

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-2a}. \tag{25}$$

236. Soit encore l'intégrale plusieurs fois considérée déjà

$$u = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos 2\beta x \, dx.$$

On a

$$\frac{du}{d\beta} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} 2x \sin 2\beta x \, dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{du}{d\beta} = -\int_0^\infty \frac{2\beta}{a^2} e^{-a^2x^2} \cos 2\beta x \, dx = -\frac{2\beta u}{a^2}.$$

On en conclut

$$\frac{du}{u} = -\frac{2\beta \, d\beta}{a^2},$$

$$lu = -\frac{\beta^2}{a^2} + c.$$

Pour $\beta = 0$, on a

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

et par conséquent, dans le cas général,

$$u = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos 2\beta x \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\beta^2}{a^2}}.$$

Intégrales définies déduites de l'intégration sous le signe $\int$.

237. L'intégration directe donne

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Multiplions les deux membres par da et intégrons entre les limites $a = \alpha$, $a = \beta$. Nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx \, dx = \text{arc tang} \frac{\beta}{b} - \text{arc tang} \frac{\alpha}{b}.$$

Si l'on suppose α nul et β infini, cette équation devient

$$(26)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx\,dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

résultat déjà obtenu (179), et qui suppose seulement b positif; dans le cas contraire, en effet, arc tang $\frac{\beta}{b}$ serait égal à $-\frac{\pi}{2}$. Il est évident, d'ailleurs, que l'intégrale (26) change de signe sans changer de valeur absolue, quand on y remplace b par $-b$.

238. Si l'on multiplie les deux membres de (26) par db en intégrant entre les limites p et q de b, on en déduit

$$(27)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(q-p).$$

239. On a évidemment

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}.$$

On en déduit, en multipliant par dm et intégrant par rapport à m entre les limites $m=\alpha$, $m=\beta$,

$$(28)\qquad \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{lx}\,dx = l\frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

Multiplions l'équation (28) par $d\beta$ et intégrons entre les limites β et γ. Nous aurons

$$\int_0^1 \frac{x^\gamma - x^\beta - x^\alpha(\gamma-\beta)\,lx}{(lx)^2}\,dx = (\gamma+1)\,l(\gamma+1) - (\beta+1)\,l(\beta+1) - (\gamma-\beta)[1+l(\alpha+1)].$$

Par des changements de lettres, on en déduit

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\gamma - x^\beta(\alpha-\gamma)\,lx}{(lx)^2}\,dx = (\alpha+1)\,l(\alpha+1) - (\gamma+1)\,l(\gamma+1) - (\alpha-\gamma)[1+l(\beta+1)],$$

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha - x^\gamma(\beta-\alpha)\,lx}{(lx)^2}\,dx = (\beta+1)\,l(\beta+1) - (\alpha+1)\,l(\alpha+1) - (\beta-\alpha)[1+l(\gamma+1)].$$

Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées, la première par α, la seconde par β et la troisième par γ, nous aurons, en ayant égard à l'équation (28),

$$(29)\qquad \int_0^1 \frac{(\alpha-\beta)\,x^\gamma + (\beta-\gamma)\,x^\alpha + (\gamma-\alpha)\,x^\beta}{l(x)^2}\,dx$$
$$= (\gamma+1)(\alpha-\beta)\,l(\gamma+1) + (\alpha+1)(\beta-\gamma)\,l(\alpha+1) + (\beta+1)(\gamma-\alpha)\,l(\beta+1).$$

Soit, par exemple, $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. On aura

$$(30) \qquad \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{(lx)^2}\,dx = l\,\frac{27}{16};$$

pour $\gamma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$:

$$(31) \qquad \int_0^1 \frac{x^3 - 3x + 2}{(lx)^2}\,dx = l\,4.$$

240. La formule

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{lx}\,dx = l\,\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

est équivalente à celle qui a été donnée (**176**). Posons en effet

$$\begin{aligned}
\beta &= m\sqrt{-1},\\
\alpha &= n\sqrt{-1},\\
x^\beta &= x^{m\sqrt{-1}} = e^{m\,lx\sqrt{-1}} = \cos m\,lx + \sqrt{-1}\sin m\,lx,\\
x^\alpha &= x^{n\sqrt{-1}} = e^{n\,lx\sqrt{-1}} = \cos n\,lx + \sqrt{-1}\sin n\,lx,
\end{aligned}$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(\cos m\,lx - \cos n\,lx) + \sqrt{-1}\,(\sin m\,lx - \sin n\,lx)}{lx}\,dx\\
&\quad = l\,\frac{1 + m\sqrt{-1}}{1 + n\sqrt{-1}} = l\,\frac{1 + mn + (m-n)\sqrt{-1}}{1+n^2},
\end{aligned}$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(32) \qquad \int_0^1 \frac{\cos m\,lx - \cos n\,lx}{lx}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{(1+mn)^2 + (m-n)^2}{(1+n^2)^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{(1+m^2)}{1+n^2},$$

$$(33) \qquad \int_0^1 \frac{\sin m\,lx - \sin n\,lx}{lx}\,dx = \text{arc tang}\,\frac{m-n}{1+mn} = \text{arc tang}\,m - \text{arc tang}\,n,$$

ce qui s'accorde avec les formules (**176**).

241. On a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par $d\alpha$ et les intégrant ensuite

entre les limites α et β,

$$(34)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx = l\beta - l\alpha.$$

Si l'on multiplie l'équation (34) par $d\alpha$ et intégrant entre les limites α et γ, on trouve

$$(35)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\gamma x}}{x^2} - \frac{e^{-\beta x}(\gamma - \alpha)}{x}\right] dx = (\gamma - \alpha)\, l\beta - \gamma\, l\gamma + \alpha\, l\alpha + \gamma - \alpha.$$

Si l'on fait, par exemple, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, on aura

$$(36)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx = 1 - l2,$$

et, en faisant $\alpha = n$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$,

$$(37)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2} + \frac{e^{-x}\left(n - \frac{1}{2}\right)}{x}\right] dx = \frac{1}{2}\, l2 + n\, ln + \frac{1}{2} - n.$$

242. On trouve directement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \operatorname{tang}^2 x} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}.$$

Multiplions les deux membres par $d\alpha$ et intégrons entre $\alpha = 0$ et $\alpha = a$. Nous aurons

$$(38)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tang} x} \operatorname{arc\,tang}(a \operatorname{tang} x) = \frac{\pi}{2}\, l(1 + a).$$

Si l'on fait $a = 1$,

$$(39)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{\operatorname{tang} x} = \frac{\pi}{2}\, l2.$$

En intégrant par parties, et considérant $\frac{dx}{\operatorname{tang} x}$ comme la différentielle de $l \sin x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\, l2,$$

résultat déjà obtenu (175).

243. On a (144)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

En multipliant les deux membres par dm et intégrant entre les limites zéro et k, on en déduit

$$(40)\qquad \int_0^1 \frac{x^{k-1}-x^{n-k-1}}{1+x^n}\,\frac{dx}{lx} = \log\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n}.$$

Soit, par exemple, $n=4$, $k=1$. On a

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\frac{dx}{lx} = \log\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}.$$

244. On a (98), α étant moindre que l'unité,

$$(41)\qquad \int_0^a \frac{dx}{\alpha\cos x+1} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\right).$$

En multipliant par $d\alpha$ et intégrant entre les limites zéro et k, on a

$$(42)\qquad \int_0^a \frac{dx}{\cos x}\,l(k\cos x+1) = 2\int_0^k \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\right).$$

Soit $a=\frac{\pi}{2}$,

$$(43)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}\,l(k\cos x+1) = 2\int_0^k \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Pour calculer le second membre, posons $\alpha=\cos u$. On aura

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = -du,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1}{2}u,$$

$$2\int_0^k \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = -\int_0^{\operatorname{arc\,cos}k} u\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4}-(\operatorname{arc\,cos}k)^2\right],$$

et par conséquent

$$(44)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}\, l(k\cos x + 1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{arc}\cos k)^2\right].$$

Si dans la formule (42) on fait $a = \pi$, elle devient

$$(45)\qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x}\, l(k\cos x + 1) = \pi \operatorname{arc}\sin k.$$

245. On a trouvé (234)

$$\int_0^{\infty} \frac{l(1 + a^2x^2)}{b^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{b}\, l(1 + ab).$$

Posons $x = \frac{1}{y}$, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{l\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)}{b^2y^2 + 1}\, dy = \frac{\pi}{b}\, l(1 + ab);$$

et, en posant $a = 1$,

$$\int_0^{\infty} \frac{l\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)}{b^2y^2 + 1}\, dy = \frac{\pi}{b}\, l(1 + b).$$

Multiplions cette équation par $2b\,db$, et intégrons entre les limites zéro et k, nous aurons

$$\int_0^k 2b\,db \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + b^2y^2}\, l\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) = 2\pi \int_0^k l(1 + b)\,db,$$

ou

$$\int_0^{\infty} l\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy \int_0^k \frac{2b\,db}{1 + b^2y^2} = 2\pi \int_0^k l(1 + b)\,db.$$

En effectuant l'intégration par rapport à b dans le premier membre et remplaçant le second par sa valeur,

$$\int_0^{\infty} l(1 + k^2y^2)\, l\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \frac{dy}{y^2} = 2\pi(1 + k)\, l(1 + k) - 2k\pi.$$

Soit $y = \frac{z}{\beta}$, $k = \frac{\beta}{\alpha}$, il vient

$$(46)\qquad \int_0^{\infty} l\left(1 + \frac{z^2}{\alpha^2}\right) l\left(1 + \frac{\beta^2}{z^2}\right) \frac{dz}{z^2} = 2\pi\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) l\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{2\pi}{\alpha}.$$

246. On déduit aisément de la formule (23) (**233**)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}\,\frac{\operatorname{arc\,tang} x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{l(1+\alpha)}{\alpha^2}.$$

Multiplions par $d\alpha$ et intégrons entre $\alpha = k$ et $\alpha = \infty$, nous aurons

$$\int_k^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}\,\frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x} = \frac{\pi}{2}\int_k^\infty \frac{l(1+\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2}.$$

Le premier membre est égal à

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} x\,dx}{x}\int_k^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x}\,\frac{1}{x}\left(\operatorname{arc\,tang}\infty - \operatorname{arc\,tang}\frac{k}{x}\right)dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k}\,dx.$$

Le second membre est égal à

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{l(1+k)}{k} + l\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].$$

On a donc

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{x^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{l(1+k)}{k} + l\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].$$

Si l'on pose $x = \frac{y}{\beta}$, $k = \frac{\alpha}{\beta}$,

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{\beta}\,\frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\,l\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\,l\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right].$$

Si l'on pose $\alpha = \beta = 1$,

$$(47)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{arc\,tang} y}{y}\right)^2 dy = \pi\, l2.$$

247. L'intégration sous le signe $\int$, appliquée d'une manière moins immédiate, conduit à des résultats importants. On a déterminé un grand nombre d'intégrales simples en décomposant la différentielle placée sous le signe d'intégration en deux facteurs, dont l'un est remplacé par une intégrale définie prise entre des limites constantes par rapport à une variable nouvelle; l'intégrale simple devient ainsi une intégrale double, dont le calcul devient quelquefois facile par le changement d'ordre des intégrations équivalent, comme il a été dit, à l'intégration sous le signe $\int$.

248. Cherchons, par exemple,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}.$$

On a (153)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha;$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos x\,dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x} \cos x\,dx,$$

c'est-à-dire

(48) $$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\alpha^2\,d\alpha}{1+\alpha^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on pose $x = y^2$, on en déduit

(49) $$\int_0^\infty \cos y^2\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

249. L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$$

s'obtient de la même manière.

On a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin x\,dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x} \sin x\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^4},$$

c'est-à-dire

(50) $$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

et on en conclut

(51) $$\int_0^\infty \sin y^2\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

250. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{1+x^2}.$$

On a

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty 2\alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha,$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \cos mx\,dx \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha = 2\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\alpha\,d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2}\cos mx\,dx,$$

c'est-à-dire (235), (236)

$$(52)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha^2-\frac{m^2}{4\alpha^2}}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-m}.$$

251. Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,lx}{x-1}\,dx.$$

On a

$$\frac{lx}{x-1} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(x+\alpha)(1+\alpha)};$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,lx}{x-1}\,dx = \int_0^\infty x^{a-1}\,dx \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(x+\alpha)(1+\alpha)} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+\alpha},$$

c'est-à-dire

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,lx}{x-1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int \frac{\alpha^{a-1}\,d\alpha}{1+\alpha} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}.$$

252. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-mx}}{x}\,dx.$$

On a

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d\alpha;$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-mx}}{x}\,dx = \int_0^\infty (\cos x - e^{-mx})\,dx \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d\alpha$$
$$= \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty (\cos x - e^{-mx})\,e^{-\alpha x}\,dx.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-(m+\alpha)x}\,dx = \frac{1}{m+\alpha};$$

donc

$$(54)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-mx}}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{1}{m+\alpha}\right) d\alpha = lm.$$

253. Considérons encore l'intégrale

$$(55)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx,$$

où n désigne un nombre entier quelconque qui, bien entendu, ne doit pas être inférieur à m.

On a

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \int_0^\infty e^{-zx} z^{m-1}\,dz;$$

par conséquent

$$(56)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \int_0^\infty \sin^n x\,dx \int_0^\infty e^{-zx} z^{m-1}\,dz$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \int_0^\infty z^{m-1}\,dz \int_0^\infty e^{-zx} \sin^n x\,dx.$$

Mais on a (165), si n est pair,

$$\int_0^\infty e^{-zx} \sin^n x\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{z(z^2+4)\ldots(z^2+n^2)},$$

et si n est impair

$$\int_0^\infty e^{-zx} \sin^n x\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{(z^2+1)(z^2+9)\ldots(z^2+n^2)}.$$

L'intégrale (55) sera donc réduite, dans tous les cas, à l'intégrale d'une fraction rationnelle que l'on pourra calculer.

Soit, par exemple, $n = 2$, $m = 2$. On aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\,dx}{x^2} = \int_0^\infty z\,dz \int_0^\infty e^{-zx} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+4} = \frac{\pi}{2},$$

ce qui s'accorde avec la formule connue, démontrée (237) et (179). L'intégration par parties donne en effet

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\sin^2 x + 2\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{x} = -\frac{1}{x}\sin^2 x + \int \frac{\sin 2x\,dx}{x},$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\,dx}{x^2} = \int_0^\infty \frac{\sin 2x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose $n = 3$, $m = 1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\,dx}{x} = 6\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule peut, comme la précédente, servir de vérification. On a, en effet

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Si l'exposant m n'était pas entier, la même méthode serait applicable; mais le résultat nécessite l'intervention des fonctions appelées Γ, et nous en renverrons le détail à un autre chapitre.

254. Posons, pour indiquer une dernière application,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = k.$$

La valeur de k, déjà obtenue (**153**), peut se déduire, de la manière suivante, du procédé d'intégration sous le signe $\int$.

On a, en posant $x = y\sqrt{r}$,

$$\int_0^\infty e^{-ry^2}\,dy = \frac{k}{\sqrt{r}}.$$

En multipliant les deux membres par $e^{-r}\,dr$,

$$dr\int_0^\infty e^{-r(1+y^2)}\,dy = k\,\frac{e^{-r}\,dr}{\sqrt{r}}.$$

Intégrons par rapport à r entre les limites $r = 0$, $r = \infty$, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = k\int_0^\infty \frac{e^{-r}\,dr}{\sqrt{r}};$$

mais en posant $r = z^2$, on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r}\,dr}{\sqrt{r}} = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = 2k;$$

par conséquent

$$2k^2 = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exemple remarquable de discontinuité

255. On a identiquement

$$(57)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx.$$

Lorsque $(a+b)$ et $(a-b)$ sont positifs tous deux, on en déduit (237)

$$(58)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

mais, s'ils sont de signes contraires,

$$(59)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx = 0.$$

L'intégrale (57) change donc brusquement de valeur au moment où b, variant d'une manière continue, vient à surpasser la valeur a.

256. On a utilisé cette singularité d'une manière fort ingénieuse pour transformer certaines intégrales et en obtenir la valeur. Posons

$$(60)\qquad u = \int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx,$$

u est nul pour les valeurs de a moindres que b, et égal à $\frac{\pi}{2}$ lorsque a est plus grand que b. On a donc

$$\int_0^\infty u\,e^{-a}\,da = \int_b^\infty \frac{\pi}{2}\,e^{-a}\,da = \frac{\pi}{2}\,e^{-b}.$$

mais $\int_0^\infty u e^{-a} da$ est égal à

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x} dx \int_0^\infty \sin ax\, e^{-a} da = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2} dx;$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-b},$$

résultat déjà obtenu (202).

257. Reprenons la formule

$$(61) \qquad u = \int_0^\infty \cos bx \frac{\sin ax}{x} dx,$$

u est nul lorsque b surpasse a, et dans les autres cas égal à $\frac{\pi}{2}$. On en conclut, en supposant b plus grand que a,

$$\int_0^b u\, db = \frac{\pi a}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^b \cos bx\, db = \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx,$$

et cette formule s'applique seulement lorsque b est plus grand que a. Si b est moindre que a, on a, d'après la forme de u,

$$\int_0^b u\, db = \frac{\pi b}{2};$$

et par conséquent

$$(62) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{\pi b}{2}.$$

On voit que l'intégrale (62) est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par le plus petit des deux nombres a et b.

258. L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2} dx$$

se déduit de la précédente et présente comme elle une discontinuité remarquable.

On a

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{2x^2} [\sin(1+a)x + \sin(1-a)x] dx.$$

Si $(1+a)$ et $(a-1)$ sont tous deux plus grands que l'unité, c'est-à-dire si a est plus grand que 2, le second membre est nul (257); si au contraire a est positif et inférieur à 2, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \sin(a+1)x}{2x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \sin(a-1)x}{2x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(a-1),$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(2-a), \tag{63}$$

et cette intégrale, qui s'annule pour $a=2$, conserve la valeur zéro lorsque a surpasse cette limite.

259. Posons

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2}\,dx.$$

Intégrons les deux membres par rapport à a entre les limites zéro et a; si a est plus grand que 2, on a

$$\int_0^a u\,da = \int_0^2 \frac{\pi}{4}(2-a)\,da = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale du second membre est

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \int_0^a \cos ax\,da = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x \sin ax}{x^3}\,dx,$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \sin ax}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{2}, \tag{64}$$

lorsque a est plus grand que 2.

Si a est moindre que 2, on a

$$\int_0^a u\,da = \int_0^a \frac{\pi}{4}(2-a)\,da = \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8},$$

et par conséquent, dans ce cas,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \sin ax}{x^3}\,dx = \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8}. \tag{65}$$

CHAPITRE IX.

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES OBTENUES PAR DES MÉTHODES DIVERSES.

Nous réunissons dans ce chapitre quelques intégrales définies obtenues par des artifices fort simples qu'il serait difficile de rattacher à aucune théorie générale.

260. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x$. Pour calculer cette intégrale déjà obtenue (175), posons

$$(1) \qquad u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \, dx.$$

En posant $x = \frac{\pi}{2} - y$, on a

$$u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - l \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos y \, dy,$$

et par conséquent

$$(2) \qquad u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x \, dx.$$

En ajoutant les équations (1) et (2), on a

$$2u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sin x + l \cos x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} l 2 \, dx.$$

En posant $2x = z$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \sin z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \sin x \, dx.$$

La courbe dont l'équation est $y = \sin x$ étant symétrique par rapport à une paral-

lèle à l'axe des y, dont l'abscisse est $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale de $l \sin x\, dx$, entre les limites zéro et π, est double de celle dont les limites sont zéro et $\frac{\pi}{2}$, et l'on a par conséquent

$$2u = u - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, l2 = u - \frac{\pi}{2} l2,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad u = -\frac{\pi}{2} l2 = \frac{\pi}{2} l\frac{1}{2}.$$

261. $\int_0^{\pi} x l \sin x\, dx.$

En posant $x = \pi - y$, on trouve

$$\int_0^{\pi} x^2 l \sin x\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - y)^2 l \sin y\, dy,$$

et en remplaçant y par x dans le second membre, et supprimant les termes communs,

$$0 = \pi^2 \int_0^{\pi} l \sin x\, dx - 2\pi \int_0^{\pi} x l \sin x\, dx.$$

Mais on a

$$\int_0^{\pi} l \sin x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x\, dx = \pi l \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$(4) \qquad \int_0^{\pi} x l \sin x\, dx = \frac{1}{2} \pi^2 l \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \pi^2 l 2.$$

262. Si l'on fait croître x au delà de la limite π, $\sin x$ devient négatif et $l \sin x$ imaginaire. Mais l'intégrale

$$\int_0^{n\pi} x l \sin^2 x\, dx$$

est toujours réelle, et nous allons en calculer la valeur.

On a : pour $n = 1$,

$$\int_0^{\pi} x l \sin^2 x\, dx = 2 \int_0^{\pi} x l \sin x\, dx = -\pi^2 l 2;$$

pour $n = 2$,

$$\int_0^{2\pi} x\, l \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} x\, l \sin^2 x\, dx + \int_0^{2\pi} x\, l \sin^2 x\, dx.$$

Faisons, dans la seconde de ces intégrales, $x = \pi + y$, elle deviendra

$$\int_0^{\pi} (\pi + y)\, l \sin^2 y\, dy = 2\pi \int_0^{\pi} l \sin y\, dy + 2 \int_0^{\pi} y\, l \sin y\, dy = -2\pi^2 l 2 - \pi^2 l 2 = -3\pi^2 l 2,$$

et par conséquent

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} x\, l \sin^2 x\, dx = -4\pi^2 l 2.$$

On a en général

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} x\, l \sin^2 x\, dx &= \int_0^{\pi} x\, l \sin^2 x\, dx + \int_0^{2\pi} x\, l \sin^2 x\, dx + \ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\, l \sin^2 x\, dx \\ &= \int_0^{\pi} x\, l \sin^2 x\, dx + \int_0^{\pi} (\pi + y)\, l \sin^2 y\, dy + \int_0^{\pi} (2\pi + y)\, l \sin^2 y\, dy + \ldots \\ &\quad + \int_0^{\pi} [(n-1)\pi + y]\, l \sin^2 y\, dy,\end{aligned}$$

et à cause des formules (3) et (4), en remettant pour chacune des intégrales sa valeur,

$$(6) \qquad \int_0^{n\pi} x\, l \sin^2 x\, dx = -n^2 \pi^2 l 2.$$

263. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x}$.

En posant $x = \pi - y$, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y) \sin y\, dy}{1 + \cos^2 y} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y\, dy}{1 + \cos^2 y} - \int_0^{\pi} \frac{y \sin y\, dy}{1 + \cos^2 y}.$$

Si l'on fait passer dans le premier membre le second terme du second après y avoir, comme cela est permis, remplacé y par x, on en déduit

$$2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y\, dy}{1 + \cos^2 y} = -\pi(\text{arc tang} \cos \pi - \text{arc tang} \cos 0) = \frac{\pi^2}{2},$$

et enfin

$$(7) \qquad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4},$$

résultat déjà obtenu (**181**).

264. $\int_0^\pi x \sin^n x\, dx$, n étant entier.

En posant dans cette intégrale comme dans les deux précédentes $x = \pi - y$, elle devient

$$\int_0^\pi (\pi - y) \sin^n y\, dy.$$

Si donc on désigne sa valeur par A, on aura

$$A = \int_0^\pi \pi \sin^n y\, dy - \int_0^\pi y \sin^n y\, dy = \pi \int_0^\pi \sin^n y\, dy - A,$$

et par conséquent

$$2A = \pi \int_0^\pi \sin^n y\, dy.$$

On aura donc, si n est pair et égal à $2m$,

$$(8) \qquad A = \int_0^\pi x \sin^{2m} x\, dx = \frac{\pi^2}{2} \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m},$$

et si n est impair et égal à $2m+1$,

$$(9) \qquad A = \int_0^\pi x \sin^{2m+1} x\, dx = \pi \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)}.$$

265. $\int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2}$.

En posant $x = \operatorname{tang}\varphi$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} l(1+\operatorname{tang}\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} l \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} l \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\, 2\sin\frac{\pi}{4}\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\varphi\, d\varphi.$$

En posant $\frac{\pi}{4} - \varphi = \omega$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\omega\, d\omega,$$

et par conséquent les deux derniers termes de l'équation précédente se détruisent;

elle se réduit à

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2} = l2 \sin\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \frac{\pi}{4}\, l\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\, l2.$$

266. $\int_0^\pi l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$

Cette intégrale offre un exemple remarquable de discontinuité; elle est nulle lorsque α est moindre que l'unité et égale à $\pi l\alpha^2$ quand α surpasse l'unité. Pour le démontrer, posons

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$$

En faisant $x=\pi-y$, on trouve

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi l(1+2\alpha\cos y+\alpha^2)\,dy.$$

Remplaçons y par x dans la seconde intégrale et ajoutons les deux valeurs de $\varphi(\alpha)$, nous aurons

$$2\varphi(\alpha) = \int_0^\pi l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx = \int_0^\pi l(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx,$$

et en posant $2x=z$,

$$2\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz = \int_0^\pi l(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz = \varphi(\alpha^2),$$

et par conséquent

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\varphi(\alpha^2).$$

On déduit de cette relation, qui a lieu quel que soit α,

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\varphi(\alpha^2) = \frac{1}{4}\varphi(\alpha^4) = \cdots = \frac{1}{2^n}\varphi(\alpha^{2^n}).$$

Mais si α est moindre que l'unité, α^{2^n} a pour limite zéro, et comme $\varphi(0)$ est évidemment nul, on a dans ce cas

$$(11)\qquad \varphi(\alpha) = 0.$$

Le cas où α est plus grand que l'unité se ramène au précédent. On a

$$\varphi(\alpha)=\int_0^\pi l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\int_0^\pi l\alpha^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}\cos x+1\right)dx=\int_0^\pi l\alpha^2\,dx+\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

et $\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ étant nul,

$$\varphi(\alpha)=\int_0^\pi l\alpha^2\,dx=\pi l\alpha^2. \tag{12}$$

267. En intégrant par parties, on trouve

$$\int l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=x\,l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)-2\alpha\int\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}.$$

On en conclut, en supposant α moindre que l'unité, et prenant les intégrales entre les limites zéro et π,

$$0=\pi l(1+\alpha)^2-2\alpha\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2},$$

et en le supposant plus grand que l'unité,

$$\pi l\alpha^2=\pi l(1+\alpha)^2-2\alpha\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}.$$

On a donc, lorsque α est moindre que l'unité,

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}l(1+\alpha)^2, \tag{13}$$

et lorsque α est moindre que l'unité,

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}l\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2. \tag{14}$$

Si l'on fait $\alpha=1$, les deux formules s'accordent et donnent

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{2(1-\cos x)}=\int_0^\pi\frac{x\,dx}{2\tang\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}l4=\pi l2, \tag{15}$$

et en posant $\frac{x}{2} = y$,

$$(16) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y\,dy}{\operatorname{tang} y} = \frac{\pi}{2} l2,$$

formule déjà obtenue (**242**).

Si dans l'équation (12) on fait $\alpha = -1$, elle devient

$$\int_0^{\pi} l(2 + 2\cos x)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$(17) \qquad \int_0^{\pi} l(1 + \cos x)\,dx = -\pi l2.$$

En faisant $\alpha = 1$, on trouverait

$$(18) \qquad \int_0^{\pi} l(1 - \cos x)\,dx = -\pi l2,$$

et en ajoutant les équations (17) et (18), puis remplaçant $l \sin^2 x$ par $2 l \sin x$,

$$\int_0^{\pi} l \sin x\,dx = -\pi l2,$$

formule déjà obtenue (**175**).

268. Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^{\infty} \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x} - x(\beta - \alpha)e^{\alpha x}}{x^2}\,dx,$$

dont la valeur est finie et déterminée, en supposant, bien entendu, α et β négatifs, parce que, pour $x = 0$, la différentielle placée sous le signe $\int$ ne devient pas infinie.

Si nous remplaçons la limite inférieure zéro par ε, l'intégrale variera infiniment peu; mais cela suffira pour qu'on ait le droit de la partager en deux autres qui, sans cela, seraient toutes deux infinies, et on l'écrira sous la forme

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\alpha - \beta)e^{\alpha x}}{x}\,dx.$$

Mais l'intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x^2}\,dx = -\left(\frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x}\right)_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\beta e^{\beta x} - \alpha e^{\alpha x}}{x}\,dx.$$

Le terme intégré, lorsque ε s'annule, se réduit à $\beta - \alpha$, l'intégrale est donc égale à

$$\beta - \alpha + \int_0^\infty \frac{\beta e^{\beta x} - \alpha e^{\alpha x} + (\alpha - \beta) e^{\alpha x}}{x} dx = \alpha - \beta + \beta \int_0^\infty \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x} dx,$$

et l'on a par conséquent (**241**)

$$u = \beta - \alpha - \beta\, l \frac{\beta}{\alpha}. \tag{19}$$

269. Cherchons encore l'intégrale

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x} - (\beta - \alpha) x e^{\alpha x} - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 x^2 e^{\alpha x}}{x^3} dx,$$

dont la valeur est finie et déterminée, en supposant toujours α et β négatifs, parce que, pour $x = 0$, la différentielle ne devient pas infinie.

En remplaçant la limite zéro par la limite infiniment petite ε, l'intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{\alpha x}}{x^2} dx = \frac{e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty \frac{\alpha e^{\alpha x}}{x} dx,$$

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x^3} dx = \frac{1}{2} \frac{e^{\beta \varepsilon} - e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\beta e^{\beta x} - \alpha e^{\alpha x}}{x^2} dx,$$

$$\frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\beta e^{\beta x} - \alpha e^{\alpha x}}{x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\beta e^{\beta \varepsilon} - \alpha e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{\beta^2 e^{\beta x} - \alpha^2 e^{\alpha x}}{x} dx,$$

et l'integrale cherchée devient

$$\frac{(\alpha - \beta) e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{e^{\beta \varepsilon} - e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta e^{\beta \varepsilon} - \alpha e^{\alpha \varepsilon}}{\varepsilon}$$
$$+ \int_0^\infty \frac{\alpha(\alpha - \beta) e^{\alpha x} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 e^{\alpha x} + \frac{1}{2} \beta^2 e^{\beta x} - \frac{1}{2} \alpha^2 e^{\alpha x}}{x} dx;$$

en développant les exponentielles qui figurent dans les trois premiers termes, faisant $\varepsilon = 0$ et réduisant l'expression placée sous le signe d'intégration, l'intégrale proposée devient

$$u = \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2 - \alpha\beta + \int_0^\infty \frac{\beta^2}{2} \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x} dx = \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2 - \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2} l \frac{\beta}{\alpha}, \tag{20}$$

et l'on trouverait de même l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x} - (\beta - \alpha) x e^{\alpha x} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{1.2} x^2 e^{\alpha x} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{1.2.3} x^3 e^{\alpha x}}{x^4} dx.$$

270. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} l(1-x)$.

En posant $x = 1 - y$, on trouve

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{x} l(1-x) = \int_{1-\alpha}^1 \frac{dy\, ly}{1-y} = \int_0^1 \frac{dy\, ly}{1-y} - \int_0^{1-\alpha} \frac{dy\, ly}{1-y},$$

c'est-à-dire (168)

$$(21) \qquad \int_0^\alpha \frac{dx}{x} l(1-x) + \int_0^{1-\alpha} \frac{dy\, ly}{1-y} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Mais l'intégration par parties donne

$$\int \frac{dy\, ly}{1-y} = -ly\, l(1-y) + \int \frac{dy\, l(1-y)}{y}.$$

Par conséquent, le produit $ly\, l(1-y)$ étant nul, comme il est aisé de le voir, pour $y = 0$,

$$\int_0^{1-\alpha} \frac{dy\, ly}{1-y} = -l(1-\alpha) l\alpha + \int_0^{1-\alpha} \frac{dy\, l(1-y)}{y}.$$

Si donc on pose

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{x} l(1-x) = \varphi(\alpha),$$

l'équation (21) devient

$$(22) \qquad \varphi(\alpha) + \varphi(1-\alpha) - l\alpha\, l(1-\alpha) = -\frac{\pi^2}{6},$$

et, si l'on fait $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(23) \qquad 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} l(1-x) = \left(l\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} = (l2)^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

271. La même intégrale peut être calculée pour deux autres valeurs numériques de la limite supérieure.

Posons

$$(24)\qquad \varphi(x)=\int_0^x \frac{dx}{x}\, l(1-x).$$

On aura

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}\, l(1-x),$$

$$\varphi'(-x)=-\frac{1}{x}\, l(1+x),$$

$$\frac{d}{dx}\varphi\left(\frac{-x}{1-x}\right)=\frac{-1}{(1-x)^2}\varphi'\left(\frac{-x}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)}\, l\left(1+\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{x(1-x)}\, l\frac{1}{1-x};$$

par conséquent

$$(25)\qquad \varphi\left(\frac{-x}{1-x}\right)=\int_0^x \frac{dx}{x(1-x)}\, l\frac{1}{1-x}=\int_0^x \frac{dx}{x}\, l\frac{1}{1-x}+\int_0^x \frac{dx}{1-x}\, l\frac{1}{1-x},$$

et il n'y a pas de constante à ajouter parce que le premier membre s'annule comme le second en même temps que x.

En ajoutant les équations (24) et (25), on a

$$\varphi(x)+\varphi\left(\frac{-x}{1-x}\right)=\int_0^x \frac{dx}{1-x}\, l\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\left[l(1-x)\right]^2.$$

Dans cette équation, remplaçons x, qui est arbitraire, par $\frac{x}{1+x}$. Nous aurons

$$(26)\qquad \varphi\left(\frac{x}{1+x}\right)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\left(l\frac{1}{1+x}\right)^2=\frac{1}{2}\left[l(1+x)\right]^2.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{dx}{x}\, l(1-x)=-\int_0^x dx\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots\right),$$

ou

$$\varphi(x)=-\left(x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots\right);$$

par conséquent

$$\varphi(-x)=x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\cdots,$$

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{2^2}+\frac{x^6}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

L'équation (26) peut donc se mettre sous la forme

$$(27)\qquad \varphi\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\varphi(x^2)-\varphi(x)=\frac{1}{2}[l(1+x)]^2.$$

Donnons à x une valeur telle que l'on ait

$$x^2=\frac{x}{x+1},$$

c'est-à-dire

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\beta.$$

On aura

$$\frac{3}{2}\varphi(\beta^2)-\varphi(\beta)=\frac{1}{2}[l(1+\beta)]^2,$$

c'est-à-dire, à cause de $\beta^2=1-\beta$ et $1+\beta=\frac{1}{\beta}$,

$$(28)\qquad \frac{3}{2}\varphi(1-\beta)-\varphi(\beta)=\frac{1}{2}(l\beta)^2.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (22),

$$(29)\qquad \varphi(1-\beta)+\varphi(\beta)=-\frac{\pi^2}{6}+l\beta\, l(1-\beta)=-\frac{\pi^2}{6}+2(l\beta)^2,$$

et l'on déduit des équations (28) et (29)

$$\varphi(\beta)=-\frac{\pi^2}{10}+(\log\beta)^2,$$

$$\varphi(1-\beta)=-\frac{\pi^2}{15}+(\log\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$(30)\qquad \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{l(1-x)\,dx}{x}=-\frac{\pi^2}{10}+\left(\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

$$(31)\qquad \int_0^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\frac{l(1-x)\,dx}{x}=-\frac{\pi^2}{15}+\left(\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

272. Lorsque dans l'intégrale

$$\int_0^{\alpha}\frac{dx\, l(1-x)}{x}$$

on suppose α plus grand que l'unité, la somme contient des éléments imaginaires et devient elle-même imaginaire, mais elle reste déterminée. On peut la calculer pour la valeur particulière $\alpha = 2$.

On a

$$\int_0^\alpha \frac{dx\, l(1-x)}{x} = \int_0^1 \frac{dx\, l(1-x)}{x} + \int_1^\alpha \frac{dx\, l(1-x)}{x} = -\frac{1}{6}\pi^2 + \int_1^\alpha \frac{dx\, l(1-x)}{x}.$$

$1-x$ étant toujours négatif dans la dernière intégrale, remplaçons $l(1-x)$ par $l(-1)(x-1) = l(-1) + l(x-1) = \pi\sqrt{-1} + l(x-1)$, nous aurons

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \frac{dx\, l(1-x)}{dx} &= -\frac{1}{6}\pi^2 + \pi\sqrt{-1}\int_1^\alpha \frac{dx}{x} + \int_1^\alpha \frac{dx\, l(x-1)}{x},\\ &= -\frac{1}{6}\pi^2 + \pi\sqrt{-1}\, l\alpha + \int_1^\alpha \frac{dx}{x}\left[lx + l\left(1-\frac{1}{x}\right)\right],\\ &= -\frac{1}{6}\pi^2 + \pi\sqrt{-1}\, l\alpha + \frac{1}{2}(l\alpha)^2 + \int_1^\alpha \frac{dx}{x}\, l\left(1-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Posons dans la dernière intégrale $\frac{1}{x} = y$, nous aurons

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{x}\, l(1-x) = -\frac{1}{6}\pi^2 + \pi\sqrt{-1}\, l\alpha + \frac{1}{2}(l\alpha)^2 + \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{dy}{y}\, l(1-y);$$

mais

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{dy}{y}\, l(1-y) = \int_0^1 \frac{dy}{y}\, l(1-y) - \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dy}{y}\, l(1-y) = -\frac{\pi^2}{6} - \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

et enfin

$$\varphi(\alpha) + \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{\pi^2}{3} + \pi\sqrt{-1}\, l\alpha + \frac{1}{2}(l\alpha)^2.$$

Si l'on fait $\alpha = 2$, il vient enfin, à cause de la valeur trouvée pour $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$(32) \qquad \varphi(2) = \int_0^2 \frac{dx\, l(1-x)}{x} = -\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\sqrt{-1}\, l2.$$

273. L'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{2x}\, l\frac{1+x}{1-x}$$

peut aussi s'obtenir pour certaines valeurs de la limite x.

Posons

$$\psi(x)=\int_0^x \frac{dx}{2x}\, l\,\frac{1+x}{1-x}.$$

On a

$$\psi'(x)=\frac{1}{2x}\, l\,\frac{1+x}{1-x},$$

$$\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{x}{(1+x)^2}\psi'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{lx}{1-x^2};$$

par conséquent

$$\psi(x)+\psi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\int_0^x\left(\frac{1}{2x}\, l\,\frac{1+x}{1-x}+\frac{lx}{1-x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\, lx\, l\,\frac{1+x}{1-x}+C.$$

En faisant $x=1$, on voit (173) que la constante est égale à $\frac{\pi^2}{8}$.

On a donc

$$\psi(x)+\psi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\, lx\, l\,\frac{1+x}{1-x}. \tag{33}$$

Si l'on donne à x une valeur telle que

$$x=\frac{1-x}{1+x},$$

c'est-à-dire

$$x=\sqrt{2}-1=\gamma,$$

l'équation (33) donne

$$\psi(\gamma)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}(l\gamma)^2,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{x}\, l\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\left[l(\sqrt{2}-1)\right]^2. \tag{34}$$

274. $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)dx.$

Cette intégrale est indépendante de a, car elle ne change pas de valeur si l'on attribue à ce paramètre une autre valeur b. La différence des deux intégrales est en effet

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx-n\int_0^1\frac{x^{na-1}-x^{nb-1}}{1-x^n}\,dx,$$

et en posant dans le second terme $x^n=y$, il devient identique au premier, et la différence est par conséquent égale à zéro.

L'intégrale étant indépendante de a, on peut, sans changer sa valeur, y supposer $a = 1$; elle devient alors

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right) dx.$$

Mais on a

$$\int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right) dx = l\,\frac{1-x^n}{1-x},$$

et par conséquent, en remarquant que pour $x = 1$

$$\frac{1-x^n}{1-x} = n,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right) dx = ln,$$

et aussi

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right) dx = ln. \tag{35}$$

Formule de Frullani.

275. Frullani a fait connaître une formule très-générale qui, malgré quelques restrictions auxquelles elle est soumise, contient un nombre infini de résultats particuliers.

On a, quelle que soit la fonction φ,

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\, dx = \varphi(0)\, l\,\frac{b}{a}.$$

Posons

$$u = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

Si l'on fait $ax = z$, on aura

$$u = \int_0^h \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z}\, dz,$$

u étant indépendant de a conserve la même valeur si cette constante est remplacée par une autre, b par exemple, et l'on a

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(0)}{x}\, dx = \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx) - \varphi(0)}{x}\, dx,$$

et par conséquent

$$(36)\quad \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \int_{\frac{h}{b}}^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\,l\frac{b}{a}.$$

Le premier membre peut s'écrire

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx - \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx,$$

et si l'on suppose h infini, on a enfin

$$(37)\qquad \int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx = \varphi(0)\,l\frac{b}{a};$$

c'est la formule de Frullani.

La démonstration est fondée, on le voit, sur ce que h devenant infini, l'intégrale

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx,$$

dont les deux limites deviennent infinies, se réduit alors à zéro. Il en est quelquefois autrement, car ces limites, infinies toutes deux, sont infiniment écartées l'une de l'autre. Il y a donc, dans chaque cas, un examen à faire avant d'appliquer la formule.

276. Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = \cos x.$$

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\cos bx}{x}\,dx$$

étant évidemment nulle lorsque h est infini, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = l\frac{b}{a};$$

c'est-à-dire

$$2\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{x}\,dx = l\frac{b}{a}.$$

ou, en posant $\frac{a+b}{2} = p$, $\frac{b-a}{2} = q$,

$$(38) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x} dx = \frac{1}{2} l \frac{p+q}{p-q}.$$

277. Soit encore

$$\varphi(x) = l(p + qe^{-x}).$$

L'intégrale

$$(39) \qquad \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{l(p + qe^{-bx})}{x} dx$$

ne tend pas vers zéro lorsque h augmente. x ne recevant que de très-grandes valeurs, $l(p + qe^{-bx})$ diffère très-peu de lp, et l'intégrale (39) peut être remplacée par

$$lp\, l \frac{a}{b}.$$

On a donc, en rétablissant dans la formule (37) le terme qui a été supprimé,

$$(40) \qquad \int_0^\infty l \frac{(p + qe^{-bx})}{p + qe^{-ax}} \frac{dx}{x} = l(p+q) l \frac{b}{a} + lp\, l \frac{a}{b} = l\left(1 + \frac{q}{p}\right) l \frac{b}{a}.$$

278. Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} (\text{arc tang}\, ax - \text{arc tang}\, bx).$$

La formule de Frullani lui assigne une valeur nulle; mais elle est en défaut, parce que, pour des valeurs croissantes de h, l'intégrale

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\text{arc tang}\, bx}{x} dx$$

n'a pas pour limite zéro. On a, en effet, en intégrant par parties

$$\int \frac{\text{arc tang}\, bx\, dx}{x} = \text{arc tang}\, bx\, lx - b \int \frac{dx\, lx}{1 + b^2 x^2},$$

et

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\text{arc tang}\, bx\, dx}{x} = \text{arc tang}\, h\, l \frac{h}{b} - \text{arc tang} \frac{hb}{a} l \frac{h}{a} - b \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{dx\, lx}{1 + b^2 x^2}.$$

L'intégrale qui forme le dernier terme du second membre a évidemment pour limite zéro. Quant aux deux premiers termes, on peut les écrire

$$\operatorname{arc\,tang} h\left(l\frac{h}{b} - l\frac{h}{a}\right) + l\frac{h}{a}\left(\operatorname{arc\,tang} h - \operatorname{arc\,tang}\frac{hb}{a}\right),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{arc\,tang} h\, l\frac{a}{b} - l\frac{h}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{h\left(1-\frac{b}{a}\right)}{1+\frac{h^2 b}{a}}.$$

Le premier terme a pour limite $\frac{\pi}{2} l\frac{a}{b}$, et le second tend évidemment vers zéro lorsque h augmente.

On a donc enfin, en suivant la méthode et non la formule de Frullani,

$$(41)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x}(\operatorname{arc\,tang} ax - \operatorname{arc\,tang} bx) = \frac{\pi}{2} l\frac{a}{b}.$$

279. Le mode de démonstration de Frullani s'applique à des cas analogues. On peut, par exemple, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x^2}\,dx$$

dans le cas, bien entendu, où elle a une valeur finie.

Soit

$$u = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)}{x^2}\,dx.$$

On en conclut (**217**)

$$\frac{du}{da} = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi'(ax)}{x}\,dx - \frac{\varphi(h)}{h}.$$

Or, d'après la formule (36), dans laquelle on suppose $b = 1$,

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi'(ax)}{x}\,dx = \int_0^h \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx - \varphi'(0)\,la,$$

donc

$$\frac{du}{da} = \int_0^h \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx - \varphi'(0)\,la - \frac{\varphi(h)}{h};$$

et en intégrant par rapport à a

$$u = a\int_0^h \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx - \varphi'(0)(a\,la - a) - \frac{a\varphi(h)}{h} + C;$$

en changeant a en b et retranchant membre à membre les deux équations,

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)\,dx}{x^2} - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)\,dx}{x^2}$$
$$= (a-b)\int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{x} + \varphi'(0)(a\,la - b\,lb + b - a) + \frac{(b-a)\varphi(h)}{h}.$$

Le premier membre équivaut à

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x^2}\,dx - \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x^2}\,dx.$$

Si donc on suppose h infini, en admettant que la seconde de ces intégrales se réduise alors à zéro, on aura

$$(42)\qquad \int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x^2}\,dx$$
$$= (a-b)\int_0^\infty \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \varphi'(0)(a\,la - b\,lb + b - a) + (b-a)\lim.\frac{\varphi(h)}{h}.$$

280. Soit, par exemple, $\varphi(x) = \cos x$. On aura

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = (b-a)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{a+b}{2}x \sin\frac{b-a}{2}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(b-a);$$

et en posant $p = \frac{a+b}{2}$, $q = \frac{b-a}{2}$,

$$(43)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi q}{4},$$

q étant le plus petit des deux membres p et q, car a et b sont supposés positifs.

281. La formule (42) ne fait d'ailleurs que ramener une difficulté à une autre, et il est quelquefois plus aisé d'obtenir l'intégrale proposée par une recherche directe.

Soit, par exemple, à calculer

$$(44)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{\alpha}{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}-\frac{\beta}{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}\right)$$

que l'on obtient en faisant dans la formule (42)

$$\varphi(x)=\frac{x}{e^x-e^{-x}}.$$

L'expression (44) est finie et déterminée, quoique les deux intégrales dont elle est la différence soient l'une et l'autre infinies. Pour la calculer, cherchons d'abord

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right).$$

On a identiquement, comme on le vérifie aisément,

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right);$$

par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x}(e^{-x}-e^{-2x})+\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)-\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right).$$

En posant $2x=z$, la seconde et la troisième intégrale coïncident.

On a donc (241)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{dx}{x}(e^{-x}-e^{-2x})=-\frac{1}{2}l2;$$

par conséquent, en changeant successivement x en αz, puis en βz,

$$\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\frac{\alpha}{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}-\frac{1}{2z}\right)dz=-\frac{1}{2}\alpha l2,$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\frac{\beta}{e^{\beta z}-e^{-\beta z}}-\frac{1}{2z}\right)dz=-\frac{1}{2}\beta l2,$$

et, en retranchant les deux dernières équations l'une de l'autre,

$$(45)\qquad \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left(\frac{\alpha}{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}-\frac{\beta}{e^{\beta z}-e^{-\beta z}}\right)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,l2.$$

Théorème de Cauchy.

282. Si l'on connaît pour toute valeur entière de n l'intégrale

$$(46)\qquad \int_0^\infty x^{2n}\,F(x^2)\,dx=A_{2n},$$

on peut en déduire l'intégrale

$$(47)\qquad \int_0^\infty x^{2n}\,F\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]dx=C_{2n}.$$

On a en effet, d'après l'équation (46),

$$\int_{-\infty}^\infty z^{2n}\,F(z^2)\,dz=2A_{2n}.$$

Posons

$$z=x-\frac{1}{x}.$$

Aux limites $-\infty$ et ∞ de z correspondent les limites o et ∞ de x, et nous aurons

$$\int_0^\infty\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}\left(x+\frac{1}{x}\right)F\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x}=2A_{2n}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty\frac{1}{x^{2n+1}}F\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x}=\int_0^\infty x^{2n+1}F\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x}=C_{2n},$$

car le premier membre devient identique au second si l'on y remplace x par $\frac{1}{y}$, pour mettre ensuite x à la place de y. On en conclut

$$\int_0^\infty\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)F\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\frac{dx}{x}=2C_{2n}.$$

Mais on a

$$\cos(2n+1)u=\cos u\left[1+\frac{(2n+1)2n}{2}\sin^2 u+\frac{(2n+4)(2n+2)2n(2n-2)}{1.2.3.4}\sin^4 u+\cdots\right].$$

Si l'on fait

$$e^{u\sqrt{-1}} = x,$$

$$\sin u = \frac{x - \frac{1}{x}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos u = \frac{x + \frac{1}{x}}{2},$$

$$\cos(2n+1)u = \frac{x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}}{2},$$

on aura

$$x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[1 + \frac{(n+1)n}{1.2}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + \cdots\right].$$

Si l'on multiplie les deux membres par $F\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x}$ et que l'on intègre entre $x = 0$ et $x = \infty$, on aura

$$(48) \qquad C_{2n} = A_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}A_4 + \cdots + A_{2n}.$$

283. Soit, par exemple, $F(x) = e^{-\alpha x}$.

On aura

$$A_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}\alpha^{n+\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi},$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

et par conséquent

$$(49) \qquad \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\left[1 + \frac{(n+1)n}{1.2}\frac{1}{2\alpha} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \cdots\right].$$

Formule de Fourier.

284. L'intégrale

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\varphi(x)\,dx$$

se présente dans plusieurs théories importantes, et la limite vers laquelle elle tend

lorsque α augmente indéfiniment est remarquable à la fois par sa forme simple et par les conséquences qui s'en déduisent.

Si l'on pose $\alpha x = y$, l'intégrale proposée devient

$$\int_0^{\alpha h} \varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right) \frac{\sin y}{\sin \frac{y}{\alpha}} dy.$$

α augmentant indéfiniment, on peut remplacer $\sin \frac{y}{\alpha}$ par $\frac{y}{\alpha}$ et $\varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right)$ par $\varphi(0)$, et l'expression devient ainsi

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(0) \sin y \, dy}{y} = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

La démonstration précédente est loin d'être rigoureuse. Pour qu'il soit permis en effet de remplacer $\sin \frac{y}{\alpha}$ par $\frac{y}{\alpha}$, il faut que l'arc $\frac{y}{\alpha}$ soit très-petit, et, comme y varie entre les limites zéro et αh, $\frac{y}{\alpha}$ prend toutes les valeurs comprises entre zéro et h. En ne considérant que les éléments pour lesquels il est très-petit, on supprime une partie de l'intégrale sans avoir nullement prouvé qu'elle soit négligeable. La substitution de $\varphi(0)$ à $\varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right)$ repose sur une méprise toute semblable, et la démonstration, réduite aux termes simples adoptés plus haut, n'a par conséquent aucune force.

Le résultat est exact pourtant, pourvu que *h ne surpasse pas* $\frac{\pi}{2}$. Supposons d'abord avec Dirichlet, qui le premier a démontré ce théorème en toute rigueur, que la fonction $\varphi(x)$ soit continue, finie et constamment décroissante entre les limites de l'intégration.

Partageons l'intégrale proposée

$$\int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx$$

en plusieurs autres prises entre les limites zéro et $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{2\pi}{\alpha}$, ..., $\frac{(r-1)\pi}{\alpha}$ et $\frac{r\pi}{\alpha}$, $\frac{r\pi}{\alpha}$ et h; $\frac{r\pi}{\alpha}$ étant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{\alpha}$ contenu dans h, on aura évidemment

$$(50) \qquad \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx + \cdots$$

$$+ \int_{(r-1)\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{r\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx + \int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^{h} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x) \, dx.$$

Les intégrales qui forment les termes du second membre sont alternativement positives et négatives, car h étant moindre que $\frac{\pi}{2}$, et $\varphi(x)$ toujours positif par hypothèse, le facteur $\frac{\varphi(x)}{\sin x}$ reste constamment positif, et le signe est celui de $\sin \alpha x$ qui reste invariable et alternativement positif et négatif entre les limites de chaque intégrale; ces intégrales, de plus, vont en diminuant, et chaque terme du second membre de (50) est, en valeur absolue, moindre que le précédent. Considérons, en effet, deux termes consécutifs

$$(51) \qquad \int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx$$

et

$$(52) \qquad \int_{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+2)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx.$$

Posons dans le second

$$x = \frac{\pi}{\alpha} + y,$$

il deviendra

$$(53) \qquad \int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{(n+1)\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right)} \varphi\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right) dy = -\int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{(n+1)\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha y}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right)} \varphi\left(\frac{\pi}{\alpha} + y\right) dy,$$

où l'on peut remplacer y par x, et la proposition devient alors évidente, car les limites sont les mêmes, et la fonction φ ayant été supposée décroissante, pour une même valeur de la variable l'élément de l'intégrale (52) est plus petit que celui de (51).

Cela posé, si nous faisons

$$\int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx = \pm u_n,$$

on aura

$$(54) \qquad \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots - u_r + \int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx.$$

Dans la formule

$$\pm u_n = \int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx$$

posons $\alpha x = z$, nous aurons

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{\alpha}} \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) \frac{dz}{\alpha}.$$

α augmentant indéfiniment, $\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ a pour limite $\varphi(0)$, et $\alpha \sin \frac{z}{\alpha}$ peut être remplacé par z. Lorsque α augmente indéfiniment, u_n peut donc être remplacé par

$$\varphi(0) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin z\, dz}{z},$$

et l'erreur commise est une partie infiniment petite de sa valeur.

La somme des n premiers termes de (54) peut être remplacée par

$$\varphi(0) \int_0^{n\pi} \frac{\sin z\, dz}{z},$$

qui, lorsque n est très-grand, diffère aussi peu que l'on veut de $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$. Quant aux termes suivants

$$\int_{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+2)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx + \ldots,$$

comme ils sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils vont en diminuant, leur somme prolongée autant qu'on veut est moindre que le premier d'entre eux, qui étant égal à

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{\alpha}} \frac{dz}{\alpha},$$

diffère infiniment peu de

$$\varphi(0) \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin z\, dz}{z},$$

et tend vers zéro lorsque n augmente. Il en est de même du dernier terme de (54), et l'intégrale considérée a enfin pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$.

285. Le théorème étant démontré pour une fonction constamment décroissante et positive est vrai, par cela même, pour une fonction quelconque. Si la fonction $\varphi(x)$ en effet étant toujours décroissante cesse de rester constamment positive, on pourra trouver une constante C assez grande pour que $C+\varphi(x)$ soit toujours positive lorsque x varie de zéro à h; le théorème étant vrai pour cette fonction nouvelle ainsi que pour une fonction constante et égale à C l'est, par cela même, pour la fonction décroissante $\varphi(x)$ quel qu'en soit le signe. Si une fonction $\varphi(x)$ est constamment croissante, $-\varphi(x)$ sera une fonction décroissante à laquelle s'appliquera le théorème qui, évidemment alors, s'applique aussi à $\varphi(x)$.

Supposons actuellement que la fonction soit constamment croissante ou constamment décroissante entre deux limites g et h de la variable, comprises toutes deux entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, la limite de l'intégrale

$$\int_g^h \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\varphi(x)\,dx$$

sera nécessairement nulle. Si l'on forme en effet une fonction $F(x)$ égale à $\varphi(x)$ pour les valeurs de x comprises entre g et h et constamment croissante ou constamment décroissante depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, les deux intégrales

$$\int_0^h \frac{\sin\alpha x}{\sin x}F(x)\,dx,$$

$$\int_0^g \frac{\sin\alpha x}{\sin x}F(x)\,dx,$$

auront la même limite $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, et leur différence est par conséquent nulle.

Si l'on considère enfin une fonction quelconque alternativement croissante et décroissante, on partagera l'intervalle compris entre zéro et h en intervalles plus petits tels, que dans chacun d'eux la fonction varie dans le même sens, et l'application des théorèmes précédents donnera dans tous les cas

$$\lim.\int_0^h \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\varphi(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

286. Il est naturel de se demander ce que devient l'intégrale

$$(55)\qquad \int_0^h \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\varphi(x)\,dx,$$

lorsque, α croissant indéfiniment, h est une constante positive quelconque.

Soit $n\pi$ le plus grand multiple de π contenu dans h, l'intégrale proposée est la

somme de celles-ci

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\,dx + \int_{n\pi}^{h} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\,dx.$$

Décomposons la première en $2n$ autres prises entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et π, π et $\frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{2n-1}{2}\pi$ et $n\pi$, et dans ces intégrales posons successivement

$$x = y, \quad x = \pi - y, \quad x = \pi + y, \quad x = 2\pi - y, \ldots, \quad x = n\pi - y.$$

Les limites relatives à la nouvelle variable y seront alternativement zéro et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et zéro, de sorte qu'en changeant le signe de toutes celles d'ordre pair, on pourra les supposer toutes prises entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$. De plus, si α est un nombre entier impair, $\frac{\sin \alpha x}{\sin x}$ se change en $\frac{\sin \alpha y}{\sin y}$ et dx alternativement en $+dy$ et en $-dy$, en sorte que l'intégrale proposée devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha y}{\sin y} [\varphi(y) + \varphi(\pi - y) + \varphi(\pi + y) + \ldots + \varphi(n\pi - y)] + \int_{n\pi}^{h} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\,dx.$$

Le premier terme a pour limite (285)

$$\frac{\pi}{2} [\varphi(0) + 2\varphi(\pi) + 2\varphi(2\pi) + \ldots + 2\varphi(n-1)\pi + \varphi(n\pi)].$$

Quant au second, il devient, en posant $x = n\pi + y$,

$$\int_0^{h-n\pi} \frac{\sin \alpha y}{\sin y} \varphi(n\pi + y)\,dy.$$

Si $h - n\pi$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}\pi$, il a pour limite

$$\frac{\pi}{2} \varphi(n\pi).$$

Si $h - n\pi$ est compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et π, on décomposera l'intégrale en deux autres : l'une prise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, qui convergera vers $\frac{\pi}{2}\varphi(n\pi)$, et l'autre prise de $\frac{1}{2}\pi$ à

$h - n\pi$, qui devient, en posant $y = \pi - z$,

$$\int_{(n+1)\pi-h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha z}{\sin z} \varphi(n+1)\pi - z\, dz,$$

et elle a (285) pour limite zéro.

En résumé, on a

$$(56) \quad \lim. \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\sin x} \varphi(x)\, dx = \pi \left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(\pi) + \varphi(2\pi) + \ldots + \varphi(n-1)\pi + \varphi(n\pi)\right],$$

lorsque α est un nombre entier impair indéfiniment croissant, $n\pi$ étant le plus grand multiple de π inférieur à h.

287. On a (236)

$$\int_0^\infty \cos 2mx e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2}.$$

Si l'on fait successivement $m = 0$, $m = 1, \ldots, m = n$, et que l'on ajoute les équations ainsi obtenues après avoir multiplié la première par $\frac{1}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx\right) e^{-\alpha^2 x^2} dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} + \ldots + e^{-\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2}\right].$$

Le premier membre est évidemment égal à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} e^{-\alpha^2 x^2} dx;$$

et si l'on suppose que n augmente indéfiniment, il a pour limite (286)

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + e^{-(\pi\alpha)^2} + e^{-(2\pi\alpha)^2} + \ldots\right].$$

On a donc

$$\pi\left[\frac{1}{2} + e^{-(\alpha\pi)^2} + e^{-(2\alpha\pi)^2} + \ldots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\left[\frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{\alpha^2}} + e^{-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} + \ldots\right].$$

Si l'on pose $\alpha\pi = a$, $\frac{1}{\alpha} = b$, cette équation devient, en remplaçant π par sa valeur ab,

$$(57) \qquad \sqrt{a}\left(\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + \ldots\right) = \sqrt{b}\left(\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + \ldots\right),$$

a et b étant liés par la relation $ab = \pi$, formule remarquable donnée pour la première fois par Cauchy.

Supposons que a devienne très-petit. Représentons-le par dx, b sera égal à $\frac{\pi}{dx}$, e^{-b^2}, e^{-4b^2},... deviendront négligeables, et en multipliant les deux membres par $\sqrt{dx}$, on aura

$$dx\left[\frac{1}{2} + e^{-(dx)^2} + e^{-(2dx)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

ce qui équivaut évidemment à

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

formule bien connue, dont le théorème de Cauchy se trouve ainsi la généralisation.

288. On a identiquement

$$\int_0^h \frac{\sin\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx = \int_0^h \frac{\sin x}{x}\varphi(x)\frac{\sin\alpha x}{\sin x}\,dx,$$

et comme, pour $x = 0$, la fonction $\frac{\varphi(x)\sin x}{x}$ se réduit à $\varphi(0)$, on a, en supposant h plus petit que $\frac{\pi}{2}$,

$$(58) \qquad \lim.\int_0^h \frac{\sin\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

La formule s'étend d'ailleurs sans changement à toutes les valeurs de h, parce que la fonction $\frac{\sin x}{x}\varphi(x)$ étant nulle pour $x = \pi$, $x = 2\pi$,..., les termes qu'il faut ajouter en vertu de la formule (57) sont tous égaux à zéro. Si l'on substitue à zéro et h deux limites positives quelconques a et b, l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sin\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx = \int_0^b \frac{\sin 2\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx - \int_0^a \frac{\sin\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx$$

a évidemment pour limite zéro, quels que soient a et b. Mais il n'en est plus de même quand ils sont de signes contraires.

Considérons l'intégrale

$$\int_{-a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx.$$

a et b désignant deux nombres positifs, on a

$$(59) \qquad \int_{-a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx = \int_{-a}^{0} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx.$$

Mais on a, en posant $x = -y$,

$$\int_{-a}^{0} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{a} \frac{\sin \alpha y}{y} \varphi(-y)\, dy.$$

Lorsque α augmente indéfiniment, les deux termes de (59) ont donc la même limite $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, et par conséquent

$$\int_{-a}^{b} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx = \pi \varphi(0).$$

Si les deux limites sont négatives, on verra facilement, en changeant x en $-y$, que l'intégrale a pour valeur zéro, et que

$$\lim. \int_{-a}^{-b} \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx = 0,$$

quels que soient les nombres positifs a et b.

289. On a

$$\frac{\sin \alpha x}{x} = \int_{0}^{\alpha} \cos ux\, du,$$

et la formule (58) peut s'écrire par conséquent

$$\int_{0}^{h} \varphi(x)\, dx \int_{0}^{\alpha} \cos ux\, du = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

$$(60) \qquad \frac{\pi}{2} \varphi(0) = \int_{0}^{\alpha} du \int_{0}^{h} \varphi(x) \cos ux\, dx,$$

où h désigne un nombre positif quelconque et α un nombre indéfiniment croissant.

290. On peut déduire des résultats précédents, quels que soient la fonction $\varphi(x)$

et les nombres a et b, la limite de l'intégrale

$$(61)\qquad \int_0^\alpha \cos tu\,du \int_a^b \varphi(x)\cos ux\,dx.$$

Lorsque α augmente indéfiniment, elle devient en effet, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_0^\alpha \cos ux \cos ut\,du = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\sin\alpha(x-t)}{x-t}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\sin\alpha(x+t)}{x+t}\varphi(x)\,dx,$$

ou, en posant dans la première intégrale $x - t = z$, et dans la seconde $x + t = z$,

$$(62)\qquad \frac{1}{2}\int_{a-t}^{b-t} \frac{\sin\alpha z}{z}\varphi(z+t)\,dz + \frac{1}{2}\int_{a+t}^{b+t} \frac{\sin\alpha z}{z}\varphi(z-t)\,dz.$$

Lorsque α augmente indéfiniment, la limite de chacune de ces intégrales nous est connue; mais il importe de distinguer plusieurs cas.

Les deux intégrales (62) sont nulles lorsque les deux limites sont de même signe, et, dans le cas contraire, il suffit, pour les obtenir, de multiplier π par la valeur que prend la fonction φ lorsqu'on y fait $z = 0$.

Si donc a et b sont positifs et que t soit compris entre eux, on aura

$$(63)\quad \frac{\pi}{2}\varphi(t) = \lim.\int_0^\alpha \cos tu\,du \int_a^b \varphi(x)\cos ux\,dx = \int_0^\infty \cos tu\,du \int_a^b \varphi(x)\cos ux\,dx,$$

et si t n'est pas compris entre a et b, on a

$$0 = \int_0^\infty \cos tu\,du \int_a^b \varphi(x)\cos ux\,dx.$$

Si l'on suppose $a = t$, la première des intégrales (62) se réduit à $\frac{\pi}{2}\varphi(t)$, et l'on a

$$(64)\qquad \frac{\pi}{4}\varphi(t) = \int_0^\infty \cos tu\,du \int_t^b \varphi(x)\cos ux\,dx.$$

Les limites a et b dans la formule (63) étant assujetties à la seule condition de comprendre t entre elles, on peut, en supposant toujours t positif, les remplacer par zéro et ∞, et l'on a

$$(65)\qquad \frac{\pi}{2}\varphi(t) = \int_0^\infty \cos tu\,du \int_0^\infty \varphi(x)\cos ux\,dx.$$

Soit par exemple $\varphi(x) = e^{-ax}$, nous aurons

$$\frac{\pi}{2} e^{-at} = \int_0^\infty \cos tu\, du \int_0^\infty e^{-ax} \cos ux\, dx;$$

mais

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos ux\, dx = \frac{a}{a^2 + u^2};$$

donc

$$\frac{\pi}{2} e^{-at} = \int_0^\infty \frac{a \cos tu\, du}{a^2 + u^2},$$

formule déjà obtenue (**203**).

291. Des considérations toutes semblables aux précédentes fournissent la limite de l'intégrale

$$\int_0^\alpha \sin tu\, du \int_a^b \varphi(x) \sin ux\, dx,$$

lorsque α augmente indéfiniment. Elle devient en effet, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \int_0^\alpha \sin tu \sin ux\, du,$$

et, en remplaçant le produit des deux sinus par la différence de deux cosinus, on voit que l'expression ne diffère de (62) que par le signe de la seconde intégrale, qui est nulle lorsque a, b et t sont positifs. On a donc, en supposant toujours t compris entre a et b,

$$(66) \qquad \frac{\pi}{2} \varphi(t) = \int_0^\infty \sin tu\, du \int_a^b \varphi(x) \sin ux\, dx,$$

et, en prenant $a = 0$, $b = \infty$,

$$(67) \qquad \frac{\pi}{2} \varphi(t) = \int_0^\infty \sin tu\, du \int_0^\infty \varphi(x) \sin ux\, dx.$$

Les différentielles intégrées dans les formules (65) et (67) sont évidemment des fonctions paires de u; en étendant à $-\infty$ et ∞ les intégrations relatives à ces

variables, le résultat sera par conséquent doublé. On a ainsi

$$\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\, du \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos ux\, dx, \tag{68}$$

$$\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin tu\, du \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin ux\, dx, \tag{69}$$

et ces formules supposent seulement t positif.

Si l'on remplace $\varphi(x)$, qui est une fonction arbitraire de x, par $\varphi(-x)$, on aura

$$\pi\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\, du \int_0^{\infty} \varphi(-x) \cos ux\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\, du \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \cos ux\, dx,$$

et par conséquent

$$\pi[\varphi(t) - \varphi(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\, du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos ux\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos tu \cos ux\, du\, dx.$$

On trouvera de même, en partant de la formule (69),

$$\pi[\varphi(t) + \varphi(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin tu\, du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin ux\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin tu \sin ux\, du\, dx,$$

et, en ajoutant ces deux équations,

$$2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos u(t-x)\, du\, dx. \tag{70}$$

C'est sous cette forme que Fourier a donné sa formule.

CHAPITRE X.

THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

Définition de la fonction $\Gamma(n)$.

292. L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx, \tag{1}$$

dont la valeur dépend du seul nombre n, a été nommée par Legendre intégrale Eulérienne de seconde espèce, et les géomètres ont adopté presque unanimement la dénomination de $\Gamma(n)$ par laquelle il l'a représentée. Gauss, il est vrai, dans un de ses Mémoires a désigné la même intégrale par $\Pi(n-1)$, mais la notation de Legendre a généralement prévalu.

L'intégrale (1) devient infinie et n'a plus de sens lorsque n est négatif, l'équation de définition ne s'applique donc qu'aux valeurs réelles et positives de n; c'est l'étude des propriétés de la fonction Γ qui nous permettra d'étendre à d'autres cas la signification de $\Gamma(n)$.

Quelques propriétés de la fonction Γ.

293. On a, quel que soit n,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \tag{2}$$

En effet, par définition,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx,$$

et en intégrant par parties on en déduit, en remarquant que $e^{-x}x^n$ est nul aux deux limites,

$$\Gamma(n+1) = n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = n\Gamma(n).$$

L'intégration directe donne

$$\Gamma(1) = 1,$$

et par conséquent, à cause de l'équation (2), on a, en supposant n entier,

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3\ldots n.$$

294. L'équation (2) prise comme définition donne une signification à la fonction $\Gamma(n)$ lorsque la variable est négative. On a par exemple

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$
$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Les valeurs entières et négatives de n se rattachent par la formule (2) à la valeur zéro, et comme la formule (2), applicable quelque petit que soit n, donne

$$\Gamma(0) = \infty,$$

$\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$,..., $\Gamma(-p)$ sont aussi infinis quel que soit le nombre entier p.

295. On a

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}. \tag{3}$$

Cette formule est fondamentale dans la théorie des intégrales Eulériennes, et l'on en a donné un grand nombre de démonstrations.

On a

$$\int_0^\infty e^{-(1+\alpha)x}\,dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

En multipliant les deux membres par $\alpha^{n-1}\,d\alpha$ et en intégrant entre les limites zéro et ∞, on en déduit

$$\int_0^\infty \alpha^{n-1}\,d\alpha \int_0^\infty e^{-(1+\alpha)x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\alpha^{n-1}\,d\alpha}{1+\alpha}.$$

Le second membre est égal (141) à $\frac{\pi}{\sin n\pi}$; quant au premier, en lui appliquant la règle d'intégration sous le signe $\int$ et remarquant qu'en posant $\alpha x = \beta$ on a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}\,d\alpha = \int_0^\infty e^{-\beta}\,\beta^{n-1}\,\frac{d\beta}{x^n} = \frac{\Gamma(n)}{x^n},$$

il devient

$$\Gamma(n)\int_0^\infty x^{-n}\,e^{-x}\,dx = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n),$$

et l'on a, par conséquent,

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

296. Si dans cette formule on fait $n=\frac{1}{2}$, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}=\pi,$$

et par conséquent

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

La démonstration directe est facile; on a, par définition,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Posons

$$x=y^2,$$

l'intégrale deviendra

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}.$$

297. Le théorème précédent conduit à une formule célèbre donnée pour la première fois par Euler. On a, quel que soit l'entier n,

$$(4)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on renverse en effet l'ordre des facteurs dans le premier membre de cette équation, puis qu'on le multiplie par lui-même, on obtiendra son carré sous la forme

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

c'est-à-dire, d'après la formule (3),

$$(5)\qquad \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pour calculer cette expression, écrivons l'identité

$$\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\left(1-2x\cos\frac{2\pi}{2n}+x^2\right)\left(1-2x\cos\frac{4\pi}{2n}+x^2\right)\cdots\left(1-2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}+x^2\right).$$

En y faisant successivement $x = 1$ et $x = -1$ et remplaçant le premier membre par sa vraie valeur n, on trouve

$$n = \left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 \left(2 \sin \frac{2\pi}{2n}\right)^2 \cdots \left(2 \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

$$n = \left(2 \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 \left(2 \cos \frac{2\pi}{2n}\right)^2 \cdots \left(2 \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

et en multipliant ces deux équations membre à membre et extrayant la racine carrée,

$$n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

En déduisant de cette équation le dénominateur de (5), on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Valeur approchée de $\Gamma(n)$ lorsque n est très-grand.

298. Nous avons donné (I, **417**) la valeur approchée du produit $1.2.3 \ldots n$ pour de très-grandes valeurs de n, la formule s'applique, quel que soit n, à la fonction $\Gamma(n+1)$.

On a

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx.$$

Le maximum de $e^{-x} x^n$ correspond à la valeur $x = n$ et on peut poser par conséquent

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2}. \tag{6}$$

Aux limites zéro et ∞ de x correspondent les limites $-\infty$ et ∞ de t, et l'on aura

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dx.$$

Il reste à exprimer dx en fonction de t et de dt.

Posons

$$x = n + \theta :$$

l'équation (6) devient

$$\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^n e^{-\theta} = e^{-t^2},$$

et, en prenant les logarithmes,

$$t^2 = -nl\left(1+\frac{\theta}{n}\right)+\theta = \frac{\theta^2}{2n}-\frac{\theta^3}{3n^2}+\frac{\theta^4}{4n^3}-\cdots;$$

d'où, par la méthode des coefficients indéterminés,

$$\theta = t\sqrt{2n}+\frac{2}{3}t^2+\frac{t^3}{9\sqrt{2n}}+\cdots,$$

par conséquent

$$d\theta = dx = dt\sqrt{2n}\left(1+\frac{4t}{3\sqrt{2n}}+\frac{t^2}{6n}+\cdots\right),$$

et

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\sqrt{2n}\left(1+\frac{4t}{3\sqrt{2n}}+\frac{t^2}{6n}-\cdots\right),$$

c'est-à-dire (154)

$$(7)\qquad \Gamma(n+1) = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+\cdots\right),$$

et à cause de (2)

$$(8)\qquad \Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+\cdots\right).$$

On pourrait, en poussant plus loin le développement en série, obtenir un plus grand nombre de termes de (8) dont nous obtiendrons plus loin la loi générale.

299. Cauchy a rattaché élégamment à la formule d'approximation précédente la démonstration d'une formule remarquable qui peut être regardée comme une généralisation de (4) et qui a lieu rigoureusement pour toute valeur grande ou petite des variables qu'elle renferme. On a, quel que soit x et le nombre entier n,

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}\,n^{-nx}\,\Gamma(nx).$$

Pour démontrer cette formule, écrivons-la sous la forme

$$(9)\qquad n^{nx}\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

montre que le premier membre de (9) ne varie pas lorsqu'on fait croître x d'une unité; il ne variera donc pas non plus si l'on ajoute à x autant d'unités qu'on

voudra et si par ce moyen on fait croître x au delà de toute limite, on pourra alors remplacer chaque valeur de la fonction Γ par l'expression approchée réduite au premier terme de (8), et le premier membre de (9) deviendra, après des réductions évidentes,

$$(10)\qquad (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}} \left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait

$$P=\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}},$$

et si l'on a égard à la formule

$$l\left(1+\frac{m}{nx}\right)=\frac{m}{nx}-\cdots,$$

on trouvera, pour les valeurs infinies de x,

$$lP=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2},$$

et

$$P=e^{\frac{n-1}{2}}.$$

En substituant cette valeur de P dans l'expression (10), on obtiendra le second membre de la formule (9) qui se trouve ainsi démontrée.

300. La formule

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\Gamma(nx)\,n^{-nx}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}$$

permet, lorsqu'on y fait croître n indéfiniment, de calculer l'intégrale

$$\int_x^{x+1} l\,\Gamma(x)\,dx.$$

On a en effet (2), en posant $n\,dx=1$,

$$\int_x^{x+1} l\,\Gamma(x)\,dx=\lim.dx\left\{l\,\Gamma(x)+l\,\Gamma(x+dx)+\ldots+l\,\Gamma[x+(n-1)\,dx]\right\},$$

c'est-à-dire

$$\int_x^{x+1} l\,\Gamma(x)\,dx=\lim.dx\,l\left\{\Gamma(x)\,\Gamma(x+dx)+\ldots+\Gamma[x+(n-1)\,dx]\right\}.$$

Mais puisque $dx = \frac{1}{n}$, la formule (9) donne

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+dx)\ldots\Gamma[x+(n-1)\,dx] = \Gamma(nx)\,n^{-nx}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}},$$

par conséquent

$$\int_x^{x+1} l\,\Gamma(x)\,dx = \lim.dx\left[l\,\Gamma(nx) - nx\,ln + \frac{n-1}{2}\,l2\pi + \frac{1}{2}\,ln\right].$$

Mais on a, à cause de $n\,dx = 1$,

$$\lim.dx\,\frac{n-1}{2}\,l2\pi = \frac{1}{2}\,l2\pi,$$

$$\lim.\frac{1}{2}\,dx\,ln = 0;$$

d'ailleurs, n étant infini,

$$\Gamma(nx) = \sqrt{2\pi}\,e^{-nx}\,(nx)^{nx-\frac{1}{2}},$$

$$l\,\Gamma(nx) = l\sqrt{2\pi} - nx + \left(nx - \frac{1}{2}\right)l\,nx,$$

$$l\,\Gamma(nx) - nx\,ln = l\sqrt{2\pi} - nx + nx\,lx - \frac{1}{2}\,lx - \frac{1}{2}\,ln,$$

$$\lim.dx\,[l\,\Gamma(nx) - nx\,ln] = -x + x\,lx,$$

et par conséquent enfin

$$\int_x^{x+1} l\,\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\,l2\pi + x\,lx - x. \tag{11}$$

Expression de $\Gamma(n)$ sous forme de produit infini.

301. On a, par définition,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx.$$

Soit

$$x = l\left(\frac{1}{z}\right),$$

nous aurons

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

Mais $l\,\frac{1}{z}$ est, comme on le vérifie aisément, la limite de

$$\mu\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

lorsque μ croît indéfiniment; $\Gamma(n)$ est par conséquent celle de

$$\mu^{n-1}\int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz,$$

ou, en posant $z^{\frac{1}{\mu}} = y$, celle de

$$\mu^n \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^{\mu-1}\, dy,$$

c'est-à-dire (156), μ étant entier,

$$(12) \qquad \mu^n \frac{1.2.3\ldots\mu}{n(n+1)\ldots(n+\mu)} = \Gamma(n),$$

lorsque le nombre entier μ augmente indéfiniment. Cette expression, indiquée déjà par Euler comme une généralisation du produit $1.2.3\ldots(n-1)$, a été prise par Gauss comme définition de la fonction qui nous occupe; elle a l'avantage de présenter une signification déterminée, quelle que soit la valeur positive ou négative, réelle ou imaginaire de n. Si l'on fait par exemple $n = \frac{1}{2}$, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim. \sqrt{\mu}\, \frac{1.2.3\ldots\mu}{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\ldots\frac{2\mu+1}{2}} = \frac{2.4.6\ldots 2\mu.2\sqrt{\mu}}{1.3.5\ldots(2\mu+1)}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lim. \frac{2.2.4.4\ldots 2\mu.2\mu}{3.3.5\ldots(2\mu+1)(2\mu+1)}\, 4\mu,$$

où l'on reconnaît le produit de $\frac{4\mu}{2\mu+1}$ par l'expression connue dont la limite est $\frac{\pi}{2}$ (I, 416). On a donc, comme il a été dit (296),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

302. La formule plus générale

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

se démontre aisément de la même manière. Si l'on remplace en effet les deux

facteurs du premier membre par les produits dont ils sont les limites, on a

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{(1.2.3\ldots\mu)^2\,\mu}{n(n+1)\ldots(n+\mu)(1-n)(2-n)\ldots(\mu+1-n)},$$

où il faut faire croître μ indéfiniment. Le second membre peut s'écrire

$$\frac{\mu}{\mu+1-n}\,\frac{1}{n(1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\left(1-\frac{n^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{n^2}{\mu^2}\right)},$$

et, lorsque μ augmente indéfiniment, $\frac{\mu}{\mu+1-n}$ a pour limite l'unité, et cette expression devient (I, 404) $\frac{\pi}{\sin n\pi}$.

303. On peut déduire enfin de la même forme de la fonction Γ la démonstration de la formule déjà vérifiée (299).

Posons

$$\Pi(\mu, x)=\frac{1.2.3\ldots\mu}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\mu)}\,\mu^x;$$

en sorte que, d'après la formule (12),

$$\Pi(\infty, x)=x\Gamma(x)=\Gamma(x+1),$$

on vérifiera aisément l'identité

$$(13)\qquad \frac{n^{nx}\,\Pi(\mu, x)\,\Pi\left(\mu, x-\frac{1}{n}\right)\cdots\Pi\left(\mu, x-\frac{n-1}{n}\right)}{\Pi(n\mu, nx)}=\frac{(1.2.3\ldots\mu)^n\,n^{n\mu}}{(1.2.3\ldots n\mu)\,\mu^{\frac{n-1}{2}}};$$

en sorte que le premier membre est indépendant de x; et comme on a

$$\Pi(\mu, 0)=1,$$

il peut être remplacé, quel que soit x, par l'expression

$$(14)\qquad \Pi\left(\mu, -\frac{1}{n}\right)\Pi\left(\mu, -\frac{2}{n}\right)\cdots\Pi\left(\mu, -\frac{n-1}{n}\right),$$

à laquelle il se réduit pour $x=0$. Si donc on fait croître μ indéfiniment, la limite de (14), égale à celle du premier membre de (13), sera, d'après les formules (4) et (12),

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

et l'on a enfin

$$\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(x+1)}{\Gamma(nx+1)}n^{nx}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

ce qui, à cause de la formule

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

équivaut à la formule (9).

Développement de $l\Gamma(n+1)$ en série convergente.

304. L'expression de $\Gamma(n)$ sous forme de produits permet de calculer celle de $l\Gamma(n+1)$ en série ordonnée suivant les puissances de n. On a, en changeant n en $n+1$ dans la formule (12),

$$\Gamma(n+1)=\mu^{n+1}\frac{1.2.3\ldots\mu}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu+1)},$$

et comme, μ étant infini, $\frac{\mu}{n+\mu+1}$ a pour limite l'unité, on peut écrire

$$\Gamma(n+1)=\mu^{n}\frac{1.2.3\ldots\mu}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)};$$

d'où l'on déduit

$$(15)\qquad l\Gamma(n+1)=nl\mu-l(1+n)-l\left(1+\frac{n}{2}\right)-\cdots-l\left(1+\frac{n}{\mu}\right),$$

en supposant toujours, bien entendu, que le nombre entier μ augmente indéfiniment.

n étant supposé moindre que l'unité, on peut développer les logarithmes qui figurent au second membre en séries ordonnées suivant les puissances de n, et la formule devient

$$\begin{aligned}l\Gamma(n+1)=&-n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\mu}-l\mu\right)\\&+\frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\mu^2}\right)\\&-\frac{1}{3}n^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{\mu^3}\right)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

et en posant, pour une valeur infinie de μ,

$$S_n = \lim.\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{\mu^n}\right)$$

et

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mu} - l\mu,$$

on aura

$$(16) \qquad l\Gamma(1+n) = -Cn + \frac{1}{2}S_2 n^2 - \frac{1}{3}S_3 n^3 + \frac{1}{4}S_4 n^4 - \ldots.$$

Les premiers coefficients C, S_2, S_3,... ont été calculés très-exactement, et l'on a même donné (I, 411) l'expression exacte de S_2, S_4, S_6,....

On peut d'ailleurs éliminer les sommes dont l'indice est pair en remplaçant le développement par un autre plus convergent. On déduit de la formule (I, 404)

$$l\frac{n\pi}{\sin n\pi} = S_2 n^2 + \frac{1}{2}S_4 n^4 + \frac{1}{3}S_6 n^6 + \ldots,$$

et par suite l'équation (16) devient

$$l\Gamma(1+n) = \frac{1}{2}l\frac{n\pi}{\sin n\pi} - \left(Cn + \frac{1}{3}S_3 n^3 + \frac{1}{5}S_5 n^5 + \ldots\right).$$

La convergence augmente encore en ajoutant au second membre l'équation identique

$$0 = -\frac{1}{2}l\frac{1+n}{1-n} + n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{5}n^5 + \ldots,$$

et l'on a enfin

$$l\Gamma(1+n) = \frac{1}{2}l\frac{n\pi}{\sin n\pi} - \frac{1}{2}l\frac{1+n}{1-n} + n(1-C) + \frac{n^3}{3}(1-S_3) + \frac{n^5}{5}(1-S_5) + \ldots$$

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs numériques, on a enfin

$$(17) \qquad l\Gamma(1+n) = \frac{1}{2}l\frac{n\pi}{\sin n\pi} - \frac{1}{2}l\frac{1+n}{1-n} + 0{,}4227843n - 0{,}0673530n^3$$
$$- 0{,}0073855n^5 - 0{,}0011927n^7 - 0{,}0002231n^9,$$

série extrêmement convergente pour les petites valeurs de n. Il est clair d'ailleurs que la relation

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n$$

permet de ramener le calcul de toutes les valeurs de $\Gamma(n)$ à celles pour lesquelles n est moindre que 1.

Calcul numérique de la fonction Γ.

305. La formule

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \tag{1}$$

montre que, pour calculer la fonction Γ pour toute valeur de la variable, il suffit de la connaître lorsque celle-ci est comprise entre zéro et l'unité.

L'équation

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{2}$$

donnera d'ailleurs $\Gamma(x)$ pour toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 quand on le connaîtra pour celles qui seront comprises entre zéro et $\frac{1}{2}$.

Les autres relations entre diverses valeurs de la fonction Γ permettent de réduire plus encore l'intervalle dans lequel il est nécessaire de la calculer directement.

On a (299), en faisant $n = 2$,

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\Gamma(2x). \tag{18}$$

Si dans (2) on remplace x par $\frac{1}{2}(1+x)$, et dans (18) par $\frac{x}{2}$ en éliminant ensuite $\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)$, on trouve

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}x\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}. \tag{19}$$

Lorsque x varie de $\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{3}$, le second membre de (19) ne contient, sous le signe Γ, que des valeurs de la variable comprises entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$, auxquelles pourront par conséquent se ramener toutes celles qui sont comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Pour y ramener également celles qui sont comprises entre zéro et $\frac{1}{6}$, on fera usage de la formule (18),

$$\Gamma(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)},$$

x étant compris entre zéro et $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+x$ le sera entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$, et réductible par conséquent à l'intervalle considéré. Quant à $2x$, il peut se présenter deux cas : ou

bien il surpasse $\frac{1}{6}$, et alors le problème est résolu, ou il est moindre que $\frac{1}{6}$, et pour le calculer, on emploiera la même formule (18), en y remplaçant x par $2x$; si $4x$ est plus grand que $\frac{1}{6}$, le problème sera résolu, sinon la même formule ramènera $\Gamma(4x)$ à $\Gamma(8x)$, et ainsi de suite.

Il est donc prouvé que $\Gamma(x)$ étant connu pour les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$, on peut le calculer pour les valeurs comprises entre zéro et $\frac{1}{6}$, et pour celles comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, et la fonction sera connue pour les valeurs moindres que $\frac{1}{2}$, et par conséquent pour celles moindres que l'unité, dont on peut déduire toutes les autres.

Sur la fonction $\psi(x) = \frac{d}{dx} l\Gamma(x)$.

306. On a trouvé

$$\Gamma(x) = \mu^x \frac{1.2.3\ldots\mu}{x(x+1)\ldots(x+\mu)},$$

en supposant que, dans le second membre, le nombre entier μ augmente indéfiniment.

On en conclut

$$l\Gamma(x) = xl\mu + l(1.2.3\ldots\mu) - lx - l(x+1)\ldots - l(x+\mu),$$

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \psi(x) = l\mu - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \cdots - \frac{1}{x+\mu}.$$

Euler a calculé très-exactement la limite de

$$l\mu - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{\mu}.$$

Lorsque μ augmente indéfiniment, cette limite est égale à

$$-0,5772156649015328606o.$$

C'est la valeur de $\psi(1)$.

307. Gauss a montré très-élégamment que la fonction $\psi(x)$ peut se calculer sous forme finie toutes les fois que x est un nombre rationnel.

Remarquons d'abord que l'équation

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

donne

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l\pi - l\sin\pi x,$$

et, en différentiant,

$$\psi(x) - \psi(1-x) = -\pi \cot \pi x. \tag{20}$$

En prenant les logarithmes des deux membres et différentiant ensuite par rapport à x, la formule (9) donnera de même

$$\psi(x) + \psi\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \psi\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = n\psi(nx) - n\,ln. \tag{21}$$

Cela posé, considérons la fonction $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant deux nombres entiers et p plus petit que q.

$\psi(x)$ est la limite de l'expression

$$l\mu - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \cdots - \frac{1}{x+\mu}$$

lorsque μ croît indéfiniment. Or cette expression peut s'écrire de la manière suivante :

$$-\frac{1}{x} + l2 - \frac{1}{x+1} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{x+2} + l\frac{4}{3} - \cdots - \frac{1}{x+\mu} + l\frac{\mu+2}{\mu+1} + \cdots.$$

La série se prolongeant indéfiniment puisque μ doit croître sans limite, si l'on remplace x successivement par $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}, \frac{q}{q}$, on aura

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\psi\left(\frac{1}{q}\right) = -q + l2 - \frac{q}{q+1} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+1} + l\frac{4}{3} - \frac{q}{3q+1} + l\frac{5}{4} - \cdots,\\
&\psi\left(\frac{2}{q}\right) = -\frac{q}{2} + l2 - \frac{q}{q+2} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+2} + l\frac{4}{3} - \frac{q}{3q+2} + l\frac{5}{4} - \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) = -\frac{q}{q-1} + l2 - \frac{q}{q+q-1} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+q-1}\\
&\qquad\qquad + l\frac{4}{3} - \frac{q}{3q+q-1} + l\frac{5}{4} - \cdots,\\
&\psi(1) = -1 + l2 - \frac{1}{2} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \cdots.
\end{aligned}\right.$$

Posons $\frac{2\pi}{q} = \omega$, et soit φ l'un quelconque des angles ω, $2\omega, \ldots, (q-1)\omega$, on aura

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&1 = \cos q\varphi = \cos 2q\varphi = \cos 3q\varphi = \ldots,\\
&\cos\varphi = \cos(q+1)\varphi = \cos(2q+1)\varphi = \ldots,\\
&\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(q-1)\varphi + 1 = 0,
\end{aligned}\right.$$

et les équations (22) peuvent d'après cela s'écrire de la manière suivante :

$$\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) = -q\cos\varphi + \cos\varphi\, l2 - \frac{q}{q+1}\cos(q+1)\varphi + \cos\varphi\, l\frac{3}{2} - \cdots,$$

$$\cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) = -\frac{q}{2}\cos 2\varphi + \cos 2\varphi\, l2 - \frac{q}{q+2}\cos(q+2)\varphi + \cos 2\varphi\, l\frac{3}{2} - \cdots,$$

$$\cos 3\varphi\,\psi\left(\frac{3}{q}\right) = -\frac{q}{3}\cos 3\varphi + \cos 3\varphi\, l2 - \frac{q}{q+3}\cos(q+3)\varphi + \cos 3\varphi\, l\frac{3}{2} - \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)$$
$$= -\frac{q}{q-1}\cos(q-1)\varphi + \cos(q-1)\varphi\, l2 - \frac{q}{2q-1}\cos(2q-1)\varphi + \cos(q-1)\varphi\, l\frac{3}{2} - \cdots,$$

$$\psi(1) = -1 + l2 - \frac{1}{2} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \cdots,$$

et en ajoutant toutes ces équations membre à membre :

$$\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) + \cdots + \cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) + \psi(1)$$
$$= -q\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \cdots\right).$$

Il est clair en effet que tous les logarithmes disparaissent dans la sommation, et que les termes de la forme $\frac{q}{k}\cos k\varphi$ se trouvent une fois chacun, quel que soit le nombre entier désigné par k; la première équation contenant ceux pour lesquels k est un multiple de q augmenté d'une unité; la seconde, ceux pour lesquels il est de la forme $mq + 2$, et la dernière, à cause de $\cos q\varphi = 1$, ceux pour lesquels k est un multiple de q.

Mais on a (I, 382)

$$l(1 - 2x\cos\varphi + x^2) = -2\left(x\cos\varphi + \frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \cdots\right);$$

par conséquent

$$\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right) + \cdots + \cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) = -\psi(1) + \frac{1}{2}q\, l(2 - 2\cos\varphi).$$

Si dans cette équation on fait successivement, comme on en a le droit, $\varphi = \omega$, $\varphi = 2\omega, \ldots, \varphi = (q-1)\omega$, on obtiendra $q - 1$ équations du premier degré entre les inconnues $\psi\left(\frac{1}{q}\right), \psi\left(\frac{2}{q}\right), \ldots, \psi\left(\frac{q-1}{q}\right)$; ces équations sont faciles à résoudre.

Pour calculer $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, il suffira de multiplier ces équations respectivement par $\cos p\omega$, $\cos 2p\omega, \ldots, \cos(q-1)p\omega$, et de les ajouter ensuite en leur adjoignant l'équation (21), dans laquelle on fait $x = \frac{1}{q}$, $n = q$, remarquant enfin que l'on déduit aisément de la troisième équation (23)

$$1 + \cos p\omega \cos k\omega + \cos 2q\omega \cos 2k\omega + \ldots + \cos(q-1)p\omega \cos(q-1)k\omega = 0.$$

k désignant un des nombres $1, 2, 3, \ldots, q-1$, à l'exception de p et de $q-p$, pour lesquelles la somme est $\frac{1}{2}q$, on trouve, après avoir divisé par $\frac{q}{2}$,

$$(24)\quad \psi\left(\frac{q-p}{q}\right) + \psi\left(\frac{p}{q}\right) = 2\psi(1) - 2lq + \cos p\omega\, l(2 - 2\cos\omega) + \cos 2p\omega\, l(2 - 2\cos 2\omega) + \ldots$$
$$+ \cos(q-1)p\omega\, l[2 - 2\cos(q-1)\omega].$$

Le dernier terme du second membre est égal à $\cos p\omega\, l(2 - 2\cos\omega)$, l'avant-dernier à $\cos 2p\omega\, l(2 - 2\cos 2\omega)$, en sorte que les termes sont égaux deux à deux, excepté le terme du milieu si q est pair; ce terme

$$\cos\frac{q}{2}p\omega\, l\left(2 - 2\cos\frac{q}{2}\omega\right)$$

est égal à $2l2$ ou $-2l2$, suivant que p est pair ou impair.

L'équation (24), jointe à celle que l'on déduit de (20) en y faisant $x = \frac{p}{q}$,

$$(25)\qquad \psi\left(\frac{q-p}{q}\right) - \psi\left(\frac{p}{q}\right) = \pi\cot\frac{p}{q}\pi,$$

permettra de calculer $\psi\left(\frac{q-p}{q}\right)$ et $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, dont on connait ainsi la somme et la différence.

On trouve de cette manière

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = \psi(1) + \frac{1}{2}\pi - 3l2,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = \psi(1) - \frac{1}{2}\pi - 3l2,$$

$$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \psi(1) + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3,$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = \psi(1) - \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3.$$

Développement en série de la fonction $\psi(x)$.

308. En posant

$$\psi(a+x)=\alpha+\beta x+\gamma x(x-1)+\delta x(x-1)(x-2)+\ldots,$$

on peut déterminer α, β, γ,..., par la méthode des coefficients indéterminés. En changeant x en $x+1$, et désignant par le signe $\Delta\varphi(x)$ l'accroissement qui en résulte pour une fonction quelconque $\varphi(x)$, on a

$$\Delta\psi(a+x)=\psi(a+x+1)-\psi(a+x)=\frac{d}{dx}l\Gamma(a+x+1)-l\Gamma(a+x)=\frac{d}{dx}l(a+x)=\frac{1}{a+x},$$

$$\Delta x=1,\quad \Delta x(x-1)=2x,\quad \Delta x(x-1)(x-2)=3x(x-1),\ldots;$$

par conséquent

$$\frac{1}{a+x}=\beta+2\gamma x+3\delta x(x-1)+4\varepsilon x(x-1)(x-2)+\ldots.$$

En faisant $x=0$, on en déduit

$$\beta=\frac{1}{a}.$$

En prenant de nouveau les accroissements des deux membres, on aura

$$\Delta\frac{1}{a+x}=2\gamma+2.3\delta x+3.4\varepsilon x(x-1)+\ldots,$$

$$\Delta^2\frac{1}{a+x}=2.3\delta+2.3.4\varepsilon x+\ldots,$$

$$\Delta^3\frac{1}{a+x}=2.3.4\varepsilon+2.3.4.5\eta x+\ldots,$$

et, en faisant $x=0$,

$$2\gamma=\Delta\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a(a+1)},$$

$$2.3\delta=\Delta^2\frac{1}{a}=\Delta\frac{-1}{a(a+1)}=\frac{2}{a(a+1)(a+2)},$$

$$2.3.4\varepsilon=\Delta^3\frac{1}{a}=\Delta\frac{2}{a(a+1)(a+2)}=\frac{-2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)};$$

la loi est évidente, et l'on a

$$\psi(a+x)=\psi(a)+\frac{x}{a}-\frac{x(x-1)}{2a(a+1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)}-\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)}+\ldots.$$

Si l'on donne à n une valeur entière et positive, le second membre ne contient qu'un nombre limité de termes, et la formule permet, connaissant $\psi(a)$, de calculer $\psi(a+n)$, quel que soit l'entier n. Le problème est d'ailleurs bien facile à résoudre *à priori*, car l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

donne

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\ldots(a+n-1)\Gamma(x),$$

et, en prenant les logarithmes, puis les dérivées par rapport à a,

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a+n-1}.$$

La comparaison des deux formules donne un théorème d'algèbre aisé à vérifier.

309. La fonction $\psi(x)$ peut servir à sommer plusieurs suites remarquables. Considérons la somme

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \cdots + \frac{a}{b+nc}.$$

On a évidemment

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left(\frac{1}{\frac{b}{c}+1} + \frac{1}{\frac{b}{c}+2} + \cdots + \frac{1}{\frac{b}{c}+n}\right),$$

et par conséquent

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+n+1} = \frac{a}{c}\left[\psi\left(\frac{b}{c}+n+2\right) - \psi\left(\frac{b}{c}+n+1\right)\right]$$

ou

$$S_{n+1} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+n+2\right) = S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+n+1\right).$$

La différence

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+n+1\right),$$

ne changeant pas d'après cette équation quand on y change n en $n+1$, est indépendante de n, on a donc

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+n+1\right) = S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+1\right) = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+1\right),$$

et par conséquent

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+n+1\right) - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c}+1\right).$$

On aura, par exemple,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2x+1}=1+\frac{1}{2}\psi\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right).$$

310. Soit encore

$$\sigma_x=\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+2c}-\frac{a}{b+3c}+\cdots-\frac{a}{b+(2x+1)c}.$$

On a

$$\sigma_x=\frac{a}{b}+\frac{a}{b+2c}+\frac{a}{b+4c}+\cdots+\frac{a}{b+2xc}-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+c+2c}-\cdots-\frac{a}{b+c+2xc}\right),$$

et par conséquent

$$\sigma_x=\frac{a}{b}+\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b}{2c}+x+1\right)-\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b}{2c}+1\right)-\frac{a}{b+c}-\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b}{2c}+\frac{3}{2}+x\right)+\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b}{2c}+\frac{3}{2}\right),$$

ou, en réduisant,

$$\sigma_x=\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b+3c}{2c}\right)-\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b+2c}{2c}\right)+\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b+2c}{2c}+x\right)-\frac{a}{2c}\psi\left(\frac{b+3c}{2c}+x\right).$$

En supposant x infini, on aura

$$\psi\left(\frac{b+2c}{2c}+x\right)=\psi\left(\frac{b+3c}{2c}+x\right),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+2c}-\cdots=\frac{c}{b(b+c)}+\frac{1}{2c}\left[\psi\left(\frac{b+3c}{2c}\right)-\psi\left(\frac{b+2c}{2c}\right)\right].$$

Soit $b=1$, $c=1$,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\psi(2)-\psi\left(\frac{3}{2}\right)\right]=l2.$$

Soit $b=1$, $c=2$,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\psi\left(\frac{7}{4}\right)-\frac{1}{4}\psi\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{\pi}{4},$$

$$\pi=\frac{8}{3}+\psi\left(\frac{7}{4}\right)-\psi\left(\frac{5}{4}\right).$$

On a enfin (I, 409)

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} + \frac{1}{\varphi+2\pi} - \frac{1}{\varphi-3\pi} - \cdots,$$
$$= \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} - \cdots - \left(\frac{1}{\varphi+\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi+\pi} + \frac{1}{\varphi+\pi+2\pi} - \cdots\right).$$

Or en faisant $b=\varphi$, $c=-\pi$, puis $b=\varphi+\pi$, $c=\pi$, on peut calculer, par les formules précédentes, les deux sommes dont la différence figure au second membre, et l'on a

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{\varphi(\pi-\varphi)} - \frac{\pi}{(\varphi+\pi)(\varphi+2\pi)}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\left[\psi\left(\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}\right) + \psi\left(\frac{3\pi+\varphi}{2\pi}\right) - \psi\left(\frac{3\pi-\varphi}{2\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi+\varphi}{2\pi}\right)\right].$$

Soit $\varphi = m\pi$.

$$\frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{1}{m(1-m)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\psi\left(1-\frac{m}{2}\right) - \psi\left(2+\frac{m}{2}\right) + \psi\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{2}\right)\right],$$

ou, en posant $\frac{m}{2} = x$ et remarquant que $\psi(1+x) = \frac{1}{x} + \psi(x)$,

$$\psi(1-x) - \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{2}+x\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{2\pi}{\sin 2\pi x},$$

théorème facile à vérifier. On a, en effet,

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+x\right)} = \frac{\pi}{\cos\pi x};$$

par conséquent

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l\pi - l\sin\pi x,$$
$$l\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) + l\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = l\pi - l\cos\pi x,$$

et en prenant les dérivées

$$\psi(x) - \psi(1-x) = -\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x},$$
$$\psi\left(\frac{1}{2}+x\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi\sin\pi x}{\cos\pi x},$$

et par conséquent

$$\psi(1-x)-\psi(x)+\psi\left(\frac{1}{2}+x\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi\sin\pi x}{\cos\pi x}+\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{2\pi}{\sin 2\pi x}.$$

311. La formule démontrée (**308**) donne

$$\psi(1+a)=\psi(1)+a-\frac{1}{2}\frac{a(a-1)}{2}+\frac{1}{3}\frac{a(a-1)(a-2)}{2.3}-\frac{1}{4}\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3.4}+\cdots;$$

mais.

$$(1-x)^a=1-ax+\frac{a(a-1)}{1.2}x^2-\frac{a(a-1)(a-2)}{2.3}x^3+\cdots,$$

donc

$$\frac{1-(1-x)^a}{x}=a-\frac{a(a-1)}{1.2}x+\frac{a(a-1)(a-2)}{2.3}x^2-\cdots,$$

et par conséquent

$$\psi(1+a)=\int_0^1\frac{1-(1-x)^a}{x}dx+\psi(1).$$

Posant $1-x=y$,

(26) $$\psi(1+a)=\int_0^1\frac{y^a-1}{y-1}dy+\psi(1).$$

Cette formule peut se vérifier plus directement. On a (**306**)

$$\psi(x)=l\mu-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\cdots-\frac{1}{x+\mu-1},$$

en supposant que dans le second membre μ désigne un nombre indéfiniment croissant.

Mais on trouve, en effectuant la division,

$$\int_0^1\frac{z^{x-1}-z^{x+\mu-1}}{1-z}dz=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+\mu-1},$$

et l'on a (**274**)

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1-z}-\frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^\mu}\right)dz=l\mu,$$

donc

$$\psi(x)=\int_0^1\frac{1-z^{x-1}}{1-z}dz+\lim.\int_0^1\left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z}-\frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^\mu}\right)dz.$$

Le second terme est indépendant de x. Si l'on y change, en effet, x en $x+\alpha$,

l'accroissement qui en résulte est

$$\int_0^1 \frac{z^{x+\alpha+\mu-1} - z^{x+\mu-1}}{1-z}\,dz = \int_0^1 \frac{z^{x+\mu-1}(z^\alpha - 1)}{z-1}\,dz,$$

dont la valeur est nulle évidemment lorsque μ est infini.

On a donc enfin

$$\psi(x) = C + \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1-z}\,dz.$$

En faisant $x = 1$, on aura

$$C = \psi(1),$$

et l'identité avec la formule (26) est évidente.

On reconnait d'une seconde manière que si x est rationnel, $\psi(x) - \psi(1)$ peut se calculer sous forme finie. On a, par exemple,

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{\sqrt{y}-1}{y-1}\,dy = \psi(1) + \int_0^1 \frac{dy}{1+\sqrt{y}} = 2 - l2 + \psi(1),$$

$$\psi\left(\frac{4}{3}\right) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{3}}-1}{y-1}\,dy,$$

et en posant $y = z^3$,

$$\psi\left(\frac{4}{3}\right) = \psi(1) + 3\int_0^1 \frac{z-1}{z^3-1}\,z^2\,dz = 3\int_0^1 \frac{z^2}{z^2+z+1}\,dz = \psi(1) + 3 - \frac{3}{2}\,l3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

312. On déduit de la formule (26)

$$(27) \qquad \int_0^1 \frac{z^a - z^b}{1-z}\,dz = \psi(1+b) - \psi(1+a);$$

par conséquent

$$\int_0^1 \frac{z^{-a} - z^a}{1-z}\,dz = \psi(1+a) - \psi(1-a) = \frac{1}{a} + \psi(a) - \psi(1-a),$$

c'est-à-dire (**307**)

$$(28) \qquad \int_0^1 \frac{z^{-a} - z^a}{1-z}\,dz = \frac{1}{a} - \pi\cot a\pi.$$

En multipliant les deux membres par da et intégrant à partir de $a = 0$, on

aura

$$(29)\qquad \int_0^1 \frac{z^a + z^{-a} - 2}{1-z}\,\frac{dz}{lz} = l\frac{a}{\sin a\pi} - l\frac{1}{\pi} = l\frac{a\pi}{\sin a\pi}.$$

Soit $a = \frac{1}{2}$,

$$(30)\qquad \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} - 2}{1-z}\,\frac{dz}{lz} = l\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = l\frac{\pi}{2}.$$

En posant $z = x^2$,

$$(31)\qquad \int_0^1 \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{1-x^2}\,\frac{x}{lx}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,\frac{dx}{lx} = l\frac{\pi}{2}.$$

Soit encore $a = \frac{1}{4}$,

$$(32)\qquad \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{4}} + z^{-\frac{1}{4}} - 2}{1-z}\,\frac{dz}{lz} = l\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = l\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

En posant $z = y^4$,

$$(33)\qquad \int_0^1 \frac{(1-y)y^2}{(1+y)(1+y^2)\,ly}\,dy = l\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

313. On peut enfin exprimer $\psi(x)$ par une intégrale sans introduire la transcendante numérique $\psi(1)$.

On a trouvé (**311**)

$$(34)\qquad \psi(x) = \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz + \lim.\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^\mu}\right)dz,$$

lorsque μ augmente indéfiniment. Faisons dans la première intégrale $z = y^\mu$, elle devient

$$\int_0^1 \mu\,\frac{1-y^{\mu x-\mu}}{1-y^\mu}\,y^{\mu-1}\,dy = \mu\int_0^1 \frac{y^{\mu-1} - y^{\mu x-1}}{1-y^\mu}\,dy,$$

et en remplaçant y par z, ce qui ne change rien, et supprimant le terme commun avec la seconde intégrale de (34),

$$\psi(x) = \lim.\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu x-1}}{1-z^\mu}\right)dz.$$

Posons encore $z^\mu = u$, il viendra

$$\psi(x) = \lim. \int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{x+\mu-1}{\mu}}}{1-u^{\frac{1}{\mu}}} - \frac{\mu u^{x-\frac{1}{\mu}}}{1-u} \right) \frac{1}{\mu} u^{\frac{1}{\mu}-1} du,$$

c'est-à-dire

$$\psi(x) = \lim. \int_0^1 \left[\frac{u^{\frac{x}{\mu}}}{\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)} - \frac{u^{x-1}}{1-u} \right] du.$$

Mais lorsque μ croît indéfiniment, le produit $\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)$ a pour limite $-lu$, $u^{\frac{x}{\mu}}$ devient égal à l'unité, et par conséquent

$$(35) \qquad \psi(x) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{lu} + \frac{u^{x-1}}{1-u} \right) du.$$

314. Nous ferons connaître une autre expression souvent utilisée de la fonction $\psi(x)$.

On a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz,$$

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} lz\, dz;$$

mais (**241**),

$$lz = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha z}}{\alpha} d\alpha,$$

donc

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha z}}{\alpha} d\alpha.$$

En changeant l'ordre des intégrations

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \left[e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz - \int_0^\infty e^{-(1+\alpha)z} z^{x-1} dz \right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \Gamma(x) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \left[e^{-\alpha} - \frac{1}{(1+\alpha)^x} \right],$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left[e^{-\alpha} - \frac{1}{(1+\alpha)^x} \right] \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

En intégrant les deux membres par rapport à x entre les limites 1 et x, on en

déduit, en remarquant que $l\Gamma(1) = 0$,

$$l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-\alpha} - \frac{(1+\alpha)^{-1} - (1+\alpha)^{-x}}{l(1+\alpha)}\right]\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Si l'on fait $x = 2$, on a

$$\Gamma(2) = 1, \quad l\Gamma(2) = 0, \quad \frac{(1+\alpha)^{-1} - (1+\alpha)^{-2}}{\alpha} = (1+\alpha)^{-2},$$

et par conséquent

$$0 = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(1+\alpha)^{-2}}{l(1+\alpha)}\right] d\alpha,$$

et, en retranchant cette équation de la précédente, après l'avoir multipliée par $x - 1$,

$$l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)(1+\alpha)^{-2} - \frac{(1+\alpha)^{-1} - (1+\alpha)^{-x}}{\alpha}\right]\frac{d\alpha}{l(1+\alpha)}.$$

En posant

$$l(1+\alpha) = v,$$
$$1+\alpha = e^v,$$
$$\alpha = e^v - 1,$$
$$d\alpha = e^v\, dv,$$

cette équation devient

$$(36) \qquad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-v} - \frac{e^{-v} - e^{-xv}}{1-e^{-v}}\right]\frac{dv}{v},$$

et l'on en déduit, en différentiant par rapport à x,

$$(37) \qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{e^{-xv}}{1-e^{-v}}\right) dv.$$

En posant $e^{-v} = z$, l'expression (36) devient

$$(38) \qquad l\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right)\frac{dz}{lz}.$$

315. En remplaçant v par α, ce qui est évidemment permis, on a

$$l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right]\frac{d\alpha}{\alpha},$$

le second membre peut se partager en deux parties, dont l'une se calcule sous forme finie et l'autre tend vers zéro avec x.

Si l'on pose

$$P = \left(x - 1 - \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}\right)\frac{e^{-\alpha}}{\alpha},$$

$$Q = \frac{1}{\alpha(1 - e^{-\alpha})},$$

on aura

$$(39) \qquad l\Gamma(x) = \int_0^\infty (P + Qe^{-\alpha x})\,d\alpha.$$

Si l'on développe Q suivant les puissances ascendantes de α, les termes qui renferment des exposants négatifs sont

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} = R.$$

Posons

$$(40) \quad F(x) = \int_0^\infty (P + Re^{-\alpha x})\,d\alpha = \int_0^\infty \left[\left(x - 1 - \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}\right)e^{-\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)e^{-\alpha x}\right]\frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$(41) \quad \varpi(x) = \int_0^\infty (Q - R)e^{-\alpha x}\,d\alpha = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)e^{-\alpha x}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

on aura

$$l\Gamma(x) = F(x) + \varpi(x).$$

Or, on peut aisément calculer $F(x)$ sous forme finie et s'assurer que $\varpi(x)$ tend vers zéro lorsque x augmente.

Montrons d'abord que $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ peuvent se calculer exactement. Il suffit évidemment de calculer $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$, puisque leur somme qui représente $l\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale (296) à $\frac{1}{2}l\pi$.

On a

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

et, en remplaçant α par 2α,

$$(42) \qquad \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} - \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}\left(1 - \frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}}\right) = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{e^{-2\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}};$$

mais, en posant $x = 1$ dans la formule (41),

$$(43)\qquad \varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

et en remplaçant α par 2α

$$(44)\qquad \varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha}} - \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) e^{-2\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha};$$

par conséquent, en retranchant les deux équations (43) et (44) l'une de l'autre,

$$(45)\qquad 0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha}} - \frac{2-e^{-\alpha}}{2\alpha} - \frac{1-e^{-\alpha}}{2}\right) e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

et en retranchant (45) de (42)

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}}{\alpha^2} - \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}\right) d\alpha,$$

c'est-à-dire (241)

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{l2}{2}.$$

On en conclut

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,l(2\pi) - \frac{1}{2}.$$

$F\left(\frac{1}{2}\right)$ étant connu, on peut obtenir $F(x)$, en calculant la différence $F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right)$: on a

$$F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\alpha x} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)\right]\frac{d\alpha}{\alpha},$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\frac{1}{2}\alpha} + \alpha\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-\alpha}}{\alpha^2}\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}\,d\alpha,$$

et, par conséquent (241),

$$F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right) = -x + \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)lx;$$

par conséquent

$$(46)\qquad l\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) lx - x + \frac{1}{2} l2\pi + \varpi(x),$$

et l'on en déduit

$$(47)\qquad \Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{\varpi(x)}.$$

Lorsque x est très-grand, $e^{\varpi(x)}$ diffère fort peu de l'unité, car on a (298) pour valeur approchée de $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi},$$

et $\varpi(x)$ a par conséquent pour limite zéro.

316. En remplaçant dans l'équation (46) $\varpi(x)$ par sa valeur et remarquant que l'on a

$$l\Gamma(x+1) = lx + l\Gamma(x),$$

on trouve

$$(48)\qquad l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2} l2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) lx - x + \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}.$$

Cette formule peut être transformée en une série fort importante dans la théorie qui nous occupe.

On a (I, 413), en désignant comme d'habitude les nombres de Bernoulli par $B_1, B_2, \ldots$,

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2 + \cdots + \frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n}\alpha^{2n-2} - \frac{\theta B_{n+1}\alpha^{2n}}{1.2.3\ldots(2n+2)},$$

θ étant un facteur moindre que l'unité.

D'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2\mu} d\alpha = \frac{1.2.3\ldots 2\mu}{x^{2\mu+1}},$$

$$\int_0^\infty \theta e^{-\alpha x}\alpha^{2n} d\alpha = \theta_1 \frac{1.2.3\ldots 2n}{x^{2n+1}},$$

et l'équation (48) donne par conséquent

$$l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2} l2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) lx + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \cdots - \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}.$$

Cette série présente une particularité extrêmement remarquable. Elle est diver-

gente, et le terme complémentaire augmente sans limite, les termes de la série augmentant eux-mêmes indéfiniment, comme il est aisé de s'en assurer en remplaçant les nombres de Bernoulli par leurs valeurs approchées (I, 412). Le développement est cependant fort utile et peut servir au calcul numérique de $l\Gamma(x+1)$, parce que le terme complémentaire, quoique très-grand avec n, est extrêmement petit pour des valeurs peu considérables de ce nombre.

Soit, par exemple, $x=10$, on aura, en se bornant aux trois premiers termes,

$$l\Gamma(11)=16,090820096,$$

aux quatre premiers,

$$l\Gamma(11)=16,1044153430,$$

aux cinq premiers,

$$l\Gamma(11)=16,1044125652,$$

et aux six premiers,

$$l\Gamma(11)=16,1041125631,$$

exact à dix décimales.

Théorème de Bernoulli.

317. Le terme général de développement du binôme $(p+q)^\mu$ est, comme on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots m}p^n q^m$$

ou

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}p^n q^m,$$

m et n étant deux nombres entiers dont la somme est égale à μ.

Lorsque m, n et μ sont fort grands, le calcul d'un tel terme serait en quelque sorte impossible, même avec l'aide des logarithmes. La substitution des valeurs approchées de chacune des fonctions Γ donne au contraire un résultat fort simple. En posant

$$\Gamma(\mu+1)=e^{-\mu}\mu^\mu\sqrt{2\mu\pi},$$
$$\Gamma(n+1)=e^{-n}n^n\sqrt{2n\pi},$$
$$\Gamma(m+1)=e^{-m}m^m\sqrt{2m\pi},$$

la formule devient

$$\frac{e^{-\mu}\mu^\mu\sqrt{2\mu\pi}}{e^{-n}n^n\sqrt{2n\pi}\,e^{-m}m^m\sqrt{2m\pi}}p^n q^m,$$

c'est-à-dire, à cause de $m + n = \mu$,

$$\frac{\mu^\mu \sqrt{\mu}}{n^n m^m \sqrt{2mn}} \frac{p^n q^m}{\sqrt{\pi}}.$$

Si l'on pose $n = \alpha\mu$, $m = \beta\mu$, α et β étant deux fractions dont la somme est l'unité, cette expression devient

$$(49) \qquad \frac{p^n q^m}{\alpha^n \beta^m \sqrt{2\alpha\beta}} \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}.$$

318. Le rapport d'un terme au précédent est, comme on sait,

$$\frac{q}{p} \frac{\mu - n}{n + 1}.$$

Le plus grand terme de développement est évidemment celui qui est à la fois plus grand que celui qui le précède et que celui qui le suit; on déterminera donc son rang n par les deux inégalités

$$\frac{q}{p} \frac{\mu - n + 1}{n} > 1,$$

$$\frac{q}{p} \frac{\mu - n}{n + 1} < 1,$$

c'est-à-dire

$$(\mu + 1) q > n(p + q),$$

$$(\mu + 1) q < (n + 1)(p + q).$$

n doit donc être la partie entière du quotient de $(\mu + 1) q$ par $(p + q)$; l'exposant m serait de même la partie entière du quotient $\frac{(\mu + 1) p}{p + q}$, et, par conséquent, lorsque μ est très-grand, les exposants de p et de q, dans le terme le plus grand, sont à très-peu près dans le rapport même de p à q. Si donc on veut que l'expression (49) représente la valeur approchée du plus grand terme, il faut y supposer $\alpha = \frac{p}{p + q}$, $\beta = \frac{q}{p + q}$, et elle deviendra

$$(50) \qquad \frac{(p + q)^{\mu + 1}}{\sqrt{\pi\mu} \sqrt{2pq}}.$$

319. Lorsque p et q représentent les probabilités de deux événements contraires, la somme $p + q$ est égale à l'unité, les termes du développement de $(p + q)^\mu$ représentent les probabilités respectives des diverses combinaisons qui peuvent survenir sur μ épreuves dans la succession des événements considérés. L'événement le plus probable est celui dont la probabilité est représentée par la formule (50);

c'est celui pour lequel les deux événements arrivent un nombre de fois proportionnel à leurs chances respectives. La probabilité, quoique la plus grande de toutes, tend évidemment vers zéro avec le nombre μ des épreuves.

320. Les formules d'approximation qui nous occupent permettent d'exprimer simplement la valeur approchée du groupe de termes qui, dans le développement, suivent et précèdent le terme le plus grand, c'est-à-dire la probabilité pour que les nombres d'arrivées des deux événements contraires ne s'écartent pas au delà d'une limite donnée du nombre correspondant au maximum.

Soit

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots m}p^n q^m \tag{51}$$

le terme maximum;

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots(n-k).1.2.3\ldots(m+k)}p^{n-k}q^{m+k} \tag{52}$$

le terme placé k rangs avant lui.

On aura approximativement

$$1.2.3\ldots\mu = e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\pi\mu},$$
$$1.2.3\ldots(n-k) = e^{-n+k}(n-k)^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)},$$
$$1.2.3\ldots(m+k) = e^{-m-k}(m+k)^{m+k}\sqrt{2\pi(m+k)},$$

et le terme (52) devient

$$\frac{\mu^{\mu}\sqrt{\mu}}{(n-k)^{n-k}(m+k)^{m+k}}\,\frac{p^{n-k}q^{m+k}}{\sqrt{2\pi(n-k)(m+k)}}. \tag{53}$$

On peut poser, puisque le terme (51) est le plus grand,

$$n = p\mu,$$
$$m = q\mu,$$

et la formule (53) devient par cette substitution

$$\left(1-\frac{k}{p\mu}\right)^{k-n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{k}{q\mu}\right)^{-k-m-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}\sqrt{p}\sqrt{q}}. \tag{54}$$

Posons

$$\left(1-\frac{k}{p\mu}\right)^{k-n-\frac{1}{2}} = z,$$
$$lz = \left(k-n-\frac{1}{2}\right)l\left(1-\frac{k}{p\mu}\right).$$

On a

$$lz = -\left(k - n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{p\mu} + \frac{k^2}{2p^2\mu^2} + \frac{k^3}{3p^3\mu^3} + \cdots\right).$$

Supposons μ très-grand par rapport à k^2, on aura, en négligeant $\frac{k^3}{\mu^2}$ et $\frac{k^4}{\mu^3}$,

$$lz = -\frac{k^2}{p\mu} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{k}{p\mu} + \frac{nk^2}{2p^2\mu^2},$$

ou, à cause de $n = p\mu$,

$$lz = -\frac{k^2}{2\mu p} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)k,$$

$$z = e^{-\frac{k^2}{2\mu p}} e^{k\left(1+\frac{1}{2n}\right)}.$$

On trouvera au même ordre d'approximation

$$\left(1 + \frac{k}{\mu q}\right)^{-k-m-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{k^2}{2q\mu}} e^{-\left(1+\frac{1}{2m}\right)k},$$

et, à cause de $p + q = 1$, la formule (54) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}\sqrt{p}\sqrt{q}} e^{-\frac{k^2}{2\mu}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{k\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}\sqrt{p}\sqrt{q}} e^{-\frac{k^2}{2\mu pq}}\left[1 + k\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right) + \cdots\right].$$

Le terme placé à égale distance du terme maximum s'obtiendrait en changeant dans celui-ci k en $-k$; leur somme est par conséquent

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\mu}\sqrt{p}\sqrt{q}} e^{-\frac{k^2}{2\mu pq}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{k^2}{2\mu pq} = t^2,$$

on a

$$k = t\sqrt{2\mu pq}.$$

μ étant très-grand, la variation d'une unité sur le nombre k correspondra à une variation très-petite de t, égale à $\frac{1}{\sqrt{2\mu pq}}$. La somme des termes compris entre le plus grand et ceux qui dans un sens ou dans l'autre sont placés à k rangs de lui

pourra être remplacé par l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{k}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2}\,dt,$$

expression très-simple de la somme demandée qui tend vers l'unité (**153**) lorsque μ augmente indéfiniment.

Intégrales Eulériennes de première espèce.

321. Legendre a nommé l'intégrale

$$(1)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

intégrale Eulérienne de première espèce. Suivant une notation adoptée par plusieurs auteurs, nous la désignerons par $B(p, q)$.

La fonction $B(p, q)$ se ramène aisément, nous allons le montrer, aux intégrales de seconde espèce désignées par Γ.

Remarquons d'abord que $B(p, q)$ est une fonction symétrique des deux variables p et q. Si l'on pose en effet $x = 1 - y$, l'intégrale (1) devient

$$\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy = B(q, p),$$

et l'on a, par conséquent,

$$B(q, p) = B(p, q).$$

Si l'on pose dans (1)

$$x = \frac{z}{1+z},$$

on a

$$(2)\qquad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz,$$

et par conséquent aussi, à cause de la symétrie démontrée,

$$(3)\qquad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

On déduit des formules (2) et (3)

$$(4)\quad B(p, q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

Si dans la seconde intégrale, on fait $z = \frac{1}{y}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

Les deux termes du second membre de (4) sont donc égaux, et l'on a

$$(5)\qquad \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

322. On a

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

On a en effet

$$\int_0^\infty \alpha^{p-1}e^{-\alpha x}\,d\alpha=\frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

comme on s'en assure aisément en posant $\alpha x = z$.

Par conséquent

$$(6)\qquad \frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \alpha^{p-1}e^{-\alpha x}\,d\alpha;$$

mais

$$\Gamma(q)=\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}\,dx=\int_0^\infty x^{q+p-1}e^{-x}\frac{dx}{x^p},$$

et, en remplaçant $\frac{1}{x^p}$ par sa valeur déduite de (6),

$$\Gamma(q)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty \alpha^{p-1}e^{-\alpha x}\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, en chassant le dénominateur et changeant l'ordre des intégrations,

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty \alpha^{p-1}\,d\alpha\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-(\alpha+1)x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+q}}\,d\alpha\,\Gamma(p+q),$$

et enfin

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+q}}\,d\alpha=\mathrm{B}(p,q).$$

323. On peut ramener aux intégrales Eulériennes de première espèce et par conséquent aux fonctions Γ l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx.$$

Si l'on pose en effet

$$x^m = y,$$

elle devient

$$\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

On a, par exemple,

$$(7)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$(8)\qquad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 x^2(1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)},$$

et, en multipliant ces deux équations, on en conclut cette relation due à Euler

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{16\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{16}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

324. L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\,dx$$

se ramène à la fonction Eulérienne. En posant en effet

$$\sin x = y,$$

on trouve

$$(9)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\,dx = \int_0^1 y^{m-1}(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \int_0^1 y^{m-1}(1-y^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

En faisant $m = n$, on en déduit

$$\frac{1}{2^{m-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}2x\,dx = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi} \sin^{m-1}z\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2\Gamma(m)},$$

et comme on a évidemment, à cause de $\sin(\pi - z) = \sin z$,

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1} z\, dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} z\, dz,$$

on en conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} z\, dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}{\Gamma(m)}\, 2^{m-2}.$$

Mais la formule (9) donne, en faisant $n = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)};$$

par conséquent, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par la valeur

$$2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m),$$

ce qui s'accorde avec la formule (299), dans laquelle on suppose $x = \frac{m}{2}$, $n = 2$.

325. Les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^n}\, dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx$$

se ramènent aussi aux intégrales Eulériennes.

On a

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-xz}\, dz;$$

par conséquent

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} \cos bx \int_0^{\infty} e^{-xz} z^{n-1}\, dz,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} \sin bx \int_0^{\infty} e^{-xz} z^{n-1}\, dz,$$

et, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} z^{n-1}\, dz \int_0^{\infty} e^{-xz} \cos bx\, dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} z^{n-1}\, dz \int_0^{\infty} e^{-xz} \sin bx\, dx,$$

c'est-à-dire (138)

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^n}{b^2+z^2}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{bz^{n-1}}{b^2+z^2}\,dz.$$

Mais on déduit de la formule démontrée (144), en posant $z^2 = b^2 u$,

$$\int_0^\infty \frac{z^n}{b^2+z^2}\,dz = \frac{\pi b^{n-1}}{2\cos\frac{n\pi}{2}}, \quad n \text{ compris entre } 0 \text{ et } 1,$$

$$\int_0^\infty \frac{bz^{n-1}}{b^2+z^2}\,dz = \frac{\pi b^{n-1}}{2\sin\frac{n\pi}{2}}, \quad n \text{ compris entre } 0 \text{ et } 2.$$

Donc

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},$$

$$(11) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}}.$$

La première de ces formules suppose n compris entre 0 et 1 et la seconde le suppose compris entre 0 et 2. Pour toute autre hypothèse les intégrales seraient infinies.

Si dans la formule (11) on suppose $n = 1$, on a la formule tant de fois démontrée

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

En faisant $n = \frac{1}{2}$, on trouve les formules déjà obtenues (249)

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

326. Les intégrales (10) et (11) sont comprises dans les expressions plus générales

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \cos bx\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \sin bx\,dx,$$

obtenues par Euler de la manière suivante. On a

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

Posons $\alpha = a + b\sqrt{-1}$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{\mu-1} (\cos bx - \sqrt{-1}\sin bx)\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+b\sqrt{-1})^\mu} = \frac{\Gamma(\mu)(a-b\sqrt{-1})^\mu}{(a^2+b^2)^\mu}.$$

Soit $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$, cette formule donne, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$(12) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu}\cos\mu\theta,$$

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu}\sin\mu\theta,$$

Si l'on fait $a = 0$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\rho = b$,

$$(14) \qquad \int_0^\infty \cos bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\cos\mu\frac{\pi}{2},$$

$$(15) \qquad \int_0^\infty \sin bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin\mu\frac{\pi}{2},$$

ce qui, en ayant égard à (295), s'accorde avec les formules (10) et (11).

Comme on a

$$b = a\,\mathrm{tang}\,\theta,$$
$$\rho^2 = b^2(1+\cot^2\theta) = \frac{b^2}{\sin^2\theta},$$

les formules (12) et (13) peuvent s'écrire

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin^\mu\theta\cos\mu\theta = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos^\mu\theta\cos\mu\theta,$$

$$(17) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin^\mu\theta\sin\mu\theta = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos^\mu\theta\sin\mu\theta.$$

327. Soit n un nombre positif moindre que l'unité et plus petit en même temps que μ. Multiplions les deux équations précédentes par

$$b^{n-1}\, db = a^n\,\mathrm{tang}^{n-1}\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

et intégrons depuis $b = 0$ jusqu'à $b = \infty$, et par conséquent de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$,

on aura, en changeant l'ordre des intégrations dans le premier membre,

$$(18)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\,dx \int_0^\infty b^{n-1}\cos bx\,db = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \cos\mu\theta\,d\theta,$$

$$(19)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\,dx \int_0^\infty b^{n-1}\sin bx\,db = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \sin\mu\theta\,d\theta.$$

Mais on a (326)

$$\int_0^\infty b^{n-1}\cos bx\,db = \frac{\Gamma(n)}{x^n}\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty b^{n-1}\sin bx\,db = \frac{\Gamma(n)}{x^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Les premiers membres de (18) et (19) sont donc respectivement

$$\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty x^{\mu-n-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\mu-n)\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}},$$

$$\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty x^{\mu-n-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\mu-n)\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}},$$

et par conséquent

$$(20)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \cos\mu\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$(21)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \sin\mu\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Si l'on suppose $n=\mu-1$, $\Gamma(\mu-n)=1$, $\Gamma(n)=\frac{\Gamma(\mu)}{\mu-1}$, on aura

$$(22)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-2}\theta \cos\mu\theta\,d\theta = \frac{1}{\mu-1}\sin\frac{\mu\pi}{2};$$

$$(23)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-2}\theta \sin\mu\theta\,d\theta = -\frac{1}{\mu-1}\cos\frac{\mu\pi}{2}.$$

n dans les formules (20) et (21) est moindre que l'unité; si on le suppose égal à la

limite 1, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-2}\theta \cos\mu\theta \, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-2}\theta \sin\mu\theta \, d\theta = \frac{1}{\mu-1}.$$

328. On peut également ramener à la fonction $B(p, q)$, et par conséquent à la fonction Γ, l'intégrale plus générale

$$(24) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx.$$

Que l'on pose en effet

$$\frac{x}{1-x} = y,$$

celle-ci devient

$$\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{[(1+a)y+a]^{\alpha+\beta}} dy;$$

et en posant

$$(1+a)y = az,$$

l'intégrale (24) devient

$$(25) \qquad \frac{1}{a^\beta}\left(\frac{1}{1+a}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}} dz = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Si l'on suppose $\alpha+\beta=1$, on a

$$(26) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin a\pi \, a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha}.$$

En posant enfin, dans (24), $x = \cos^2\theta$, elle devient

$$(27) \qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta}{(a+\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}} d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}.$$

Si l'on remplace $a+\cos^2\theta$ par $(a+1)\cos^2\theta + a\sin^2\theta$ et que l'on pose $a+1=mk$, $a=nk$, m et n étant deux nombres arbitraires, on trouvera

$$(28) \qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^{\alpha+\beta}} d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{m^\alpha n^\beta}.$$

329. Nous terminerons ce chapitre en indiquant une méthode très-élégante due

à Cauchy pour le calcul des intégrales de la forme

$$(29)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos 2\alpha x \sin^m x}{x^{a+1}}\,dx,$$

où m désigne un nombre entier et a et α deux nombres arbitraires dont le premier doit être plus petit que m.

En suivant la marche adoptée (253), mais en ne supposant plus que l'exposant de $\frac{1}{x}$ soit entier, on remplacera $\frac{1}{x^{a+1}}$ par la valeur

$$\frac{1}{x^{a+1}} = \frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty e^{-xz} z^a\,dz.$$

L'intégrale (29) devient par suite

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty \cos 2\alpha x \sin^m x\,dx \int_0^\infty e^{-xz} z^a\,dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^a\,dz \int_0^\infty e^{-xz}\cos 2\alpha x \sin^m x\,dx. \end{aligned}$$

Mais on a (220), lorsque m est pair,

$$\cos 2\alpha x \sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\Delta^m \cos(2\alpha - m)x,$$

et, lorsque m est impair,

$$\cos 2\alpha x \sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m}\Delta^m \sin(2\alpha - m)x,$$

la différence étant prise par rapport à α et correspondant à un accroissement égal à l'unité.

On peut, d'après cela, remplacer la formule (30) par l'expression équivalente

$$(31)\qquad \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^a\,dz \int_0^\infty e^{-xz}\Delta^m \cos(2\alpha - m)x\,dx$$

si m est pair, et

$$(32)\qquad \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^a\,dz \int_0^\infty e^{-xz}\Delta^m \sin(2\alpha - m)x\,dx$$

si m est impair.

Nous supposerons, pour achever le calcul, m pair et $\alpha > \frac{m}{2}$, renvoyant au Mémoire de Cauchy l'étude plus complète du problème (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XVII).

On a évidemment

$$\int_0^\infty e^{-zx}\Delta^m \cos(2\alpha - m)x\,dx = \Delta^m \int_0^\infty e^{-zx}\cos(2\alpha - m)x\,dx = \Delta^m \frac{z}{(2\alpha - m)^2 + z^2},$$

et, par conséquent, l'expression (31) devient, en remarquant que z^a peut entrer sous le signe Δ^m,

$$\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\int_0^\infty \Delta^m \frac{z^{a+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2}\,dz.$$

Soit maintenant $a = \lambda + \frac{\mu}{\nu}$, λ étant le plus grand nombre entier contenu dans a, les fonctions

$$\frac{z^{\lambda+2} - (-1)^{\frac{\lambda+2}{2}}(2\alpha - m)^{\lambda+2}}{(2\alpha - m)^2 + z^2}$$

et

$$\frac{z^{\lambda+1} - (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}(2\alpha - m)^{\lambda+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2}$$

étant entières, la première lorsque λ est pair, et la seconde quand λ est impair, on a, dans le premier cas, à cause de $m > \lambda$,

$$\Delta^m \frac{z^{\lambda+2}}{(2\alpha - m)^2 + z^2} = (-1)^{\frac{\lambda+2}{2}}\Delta^m \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+2}}{(2\alpha - m)^2 + z^2},$$

et, dans le second cas,

$$\Delta^m \frac{z^{\lambda+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2} = (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}\Delta^m \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2},$$

et par conséquent l'intégrale (29) devient, lorsque λ est pair,

$$(33)\qquad \frac{(-1)^{\frac{m+\lambda+2}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^{\frac{\mu}{\nu}-1}\Delta^m \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+2}}{(2\alpha - m)^2 + z^2}\,dz,$$

et si λ est impair,

$$(34)\qquad \frac{(-1)^{\frac{m+\lambda+1}{2}}}{2^m\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^{\frac{\mu}{\nu}}\Delta^m \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2}\,dz.$$

On déduit d'ailleurs de (144), en posant $z^2 = (2\alpha - m)^2 u$,

$$\int_0^\infty \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+2}}{(2\alpha - m)^2 + z^2} z^{\frac{\mu}{\nu}-1} dz = \frac{\pi}{2\sin\frac{\mu\pi}{2\nu}} (2\alpha - m)^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}},$$

$$\int_0^\infty \frac{(2\alpha - m)^{\lambda+1}}{(2\alpha - m)^2 + z^2} z^{\frac{\mu}{\nu}} dz = \frac{\pi}{\cos\frac{\mu\pi}{2\nu}} (2\alpha - m)^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}};$$

en remplaçant $\lambda + \frac{\mu}{\nu}$ par a et remarquant que

$$\sin\frac{a\pi}{2} = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \sin\frac{\mu\pi}{2\nu}$$

quand λ est pair, et

$$\sin\frac{a\pi}{2} = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cos\frac{\mu\pi}{2\nu}$$

dans le cas contraire, les formules (33) et (34) se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{2^{m+1}} \frac{\pi}{\Gamma(a+1)\sin\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2\alpha - m)^a,$$

et l'on a par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\alpha x \sin^m x}{x^{a+1}} dx = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{\pi}{2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a\pi}{2}} \Delta^m (2\alpha - m)^a,$$

et cette formule suppose seulement que le nombre entier m soit pair et que α soit plus grand que $\frac{m}{2}$.

Soit, par exemple, $\alpha = 2$, $m = 2$ et $a = \frac{1}{3}$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\cos 4x \sin^2 x}{x^{\frac{4}{3}}} dx = \frac{\pi}{16\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}} \Delta^2 (2\alpha - 2)^{\frac{4}{3}}.$$

On a, d'après la définition des différences, et α étant égal à 2,

$$\Delta^2(2\alpha - 2)^{\frac{4}{3}} = (8-2)^{\frac{4}{3}} - 2(6-2)^{\frac{4}{3}} + (4-2)^{\frac{4}{3}} = (6)^{\frac{4}{3}} - 2(4)^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} = 6\sqrt[3]{6} - 8\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}.$$

Calcul numérique des intégrales Eulériennes.

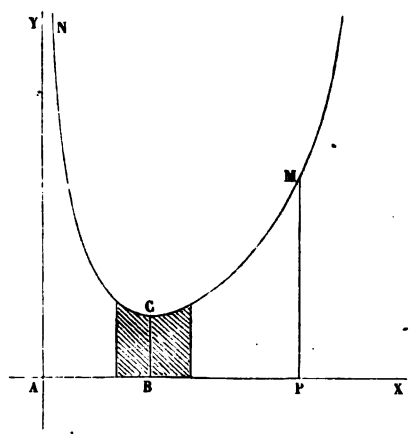
330. Soit donnée l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes a et y :

$$y = \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx,$$

les abscisses représentant la variable a et les ordonnées l'intégrale Γ correspondant à l'argument a.

Si a est positif, la fonction $\Gamma(a)$ est également positive; par conséquent la courbe n'a que des ordonnées positives depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \infty$.

La courbe est formée par deux branches infinies dont l'une CN a pour asymptote l'axe des ordonnées et dont l'autre CM a pour asymptote la courbe transcendante dont l'équation est $y = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.



Le *minimum* de $\Gamma(a)$ a lieu pour $a = 1,4616321$ et est égal à $0,8556032$. A partir de ce minimum, si a diminue, la valeur de $\Gamma(a)$ augmente et devient infinie pour $a = 0$; si a augmente, la valeur de $\Gamma(a)$ augmente également et devient infinie pour $a = \infty$.

La Table qui suit donne les logarithmes vulgaires à sept décimales de l'intégrale $\Gamma(a)$ pour toutes les valeurs de l'argument a, depuis $a = 1$ jusqu'à $a = 2$. Comme à l'aide de la formule $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ on peut ramener toutes les intégrales Γ à des fonctions de même nature dont l'argument soit compris entre 1 et 2, on pourra évaluer toutes les intégrales Eulériennes de la première et de la seconde espèce, ainsi que toutes les intégrales définies que l'on peut ramener aux fonctions Eulériennes.

Entre les limites $a = 1$ et $a = 2$, la valeur de la fonction Γ est comprise entre 1 et 0,8556032; par conséquent les logarithmes de Γ contenus dans la Table seront négatifs et compris entre 0 et 9,9472392.

Tous les logarithmes de la Table correspondent à des ordonnées contenues dans la partie ombrée de la figure; cette partie est comprise entre les ordonnées $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$ et forme un quadrilatère mixtiligne ayant trois côtés égaux entre eux et égaux à l'unité; l'ordonnée BC correspond au minimum de $\Gamma(a)$.

La *différence première* est d'abord *négative* et va en diminuant depuis 2503 pour $a = 1$ jusqu'à zéro pour $a = 1,4616\ldots$, puis elle devient *positive* et va en augmentant jusqu'à $a = 2$ où elle est égale à 1835.

La *différence seconde* est toujours *positive* entre $a = 1$ et $a = 2$ et va en diminuant depuis $a = 1$ où elle est égale à 7 jusqu'à $a = 2$ où elle est égale à 2 ou 3.

Il en résulte que l'erreur provenant de l'interpolation par parties proportionnelles sera au plus d'une unité du septième chiffre décimal.

Table des logarithmes de $\Gamma(a)$.

a	Log $\Gamma(a)$. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.										a
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,00	9,99	97497	95001	92512	90030	87555	85087	82627	80173	77727	1,00
1,01	75287	72855	70430	68011	65600	63196	60798	58408	56025	53648	1,01
1,02	51279	48916	46561	44212	41870	39535	37207	34886	32572	30265	1,02
1,03	27964	25671	23384	21104	18831	16564	14305	12052	09806	07567	1,03
1,04	05334	03108	00889	*98677	*96471	*94273	*92080	*89895	*87716	*85544	1,04
1,05	9,98 88379	81220	79068	76922	74783	72651	70525	68406	66294	64188	1,05
1,06	62089	59996	57910	55830	53757	51690	49630	47577	45530	43489	1,06
1,07	41455	39428	37407	35392	33384	31382	29387	27398	25415	23439	1,07
1,08	21469	19506	17549	15599	13655	11717	09785	07860	05941	04029	1,08
1,09	02123	00223	*98329	*96442	*94561	*92686	*90818	*88956	*87100	*85250	1,09
1,10	9,97 83407	81570	79738	77914	76095	74283	72476	70676	68882	67095	1,10
1,11	65313	63538	61768	60005	58248	56497	54753	53014	51281	49555	1,11
1,12	47834	46120	44411	42709	41013	39323	37638	35960	34288	32622	1,12
1,13	30962	29308	27659	26017	24381	22751	21126	19508	17896	16289	1,13
1,14	14689	13094	11505	09922	08345	06774	05209	03650	02096	00549	1,14
1,15	9,96 99007	97471	95941	94417	92898	91386	89879	88378	86883	85393	1,15
1,16	83910	82432	80960	79493	78033	76578	75129	73686	72248	70816	1,16
1,17	69390	67969	66554	65145	63742	62344	60952	59566	58185	56810	1,17
1,18	55440	54076	52718	51366	50019	48677	47341	46011	44687	43368	1,18
1,19	42054	40746	39444	38147	36856	35570	34290	33016	31747	30483	1,19
1,20	9,96 29225	27973	26725	25484	24248	23017	21792	20573	19358	18150	1,20
1,21	16946	15748	14556	13369	12188	11011	09841	08675	07515	06361	1,21
1,22	05212	04068	02930	01796	00669	*99546	*98430	*97318	*96212	*95111	1,22
1,23	9,95 94015	92925	91840	90760	89685	88616	87553	86494	85441	84393	1,23
1,24	83350	82313	81280	80253	79232	78215	77204	76198	75197	74201	1,24
1,25	9,95 73211	72226	71246	70271	69301	68337	67377	66423	65474	64530	1,25
1,26	63592	62658	61730	60806	59888	58975	58067	57165	56267	55374	1,26
1,27	54487	53604	52727	51855	50988	50126	49268	48416	47570	46728	1,27
1,28	45891	45059	44232	43410	42593	41782	40975	40173	39376	38585	1,28
1,29	37798	37016	36239	35467	34700	33938	33181	32429	31682	30940	1,29
1,30	9,95 30203	29470	28743	28021	27303	26590	25883	25180	24482	23789	1,30
1,31	23100	22417	21739	21065	20396	19732	19073	18419	17770	17125	1,31
1,32	16485	15850	15220	14595	13975	13359	12748	12142	11541	10944	1,32
1,33	10353	09766	09184	08606	08034	07466	06903	06344	05791	05242	1,33
1,34	04698	04158	03624	03094	02568	02048	01532	01021	00514	00012	1,34
1,35	9,94 99515	99023	98535	98052	97573	97100	96630	96166	95706	95251	1,35
1,36	94800	94355	93913	93477	93044	92617	92194	91776	91362	90953	1,36
1,37	90549	90149	89754	89363	88977	88595	88218	87846	87478	87115	1,37
1,38	86756	86402	86052	85707	85366	85030	84698	84371	84049	83731	1,38
1,39	83417	83108	82803	82503	82208	81916	81630	81348	81070	80797	1,39
1,40	9,94 80528	80263	80003	79748	79497	79250	79008	78770	78537	78308	1,40
1,41	78084	77864	77648	77437	77230	77027	76829	76636	76446	76261	1,41
1,42	76081	75905	75733	75565	75402	75243	75089	74939	74793	74652	1,42
1,43	74515	74382	74254	74130	74010	73894	73783	73676	73574	73476	1,43
1,44	73382	73292	73207	73125	73049	72976	72908	72844	72784	72728	1,44
1,45	9,94 72677	72630	72587	72549	72514	72484	72459	72437	72419	72406	1,45
1,46	72397	72393	72392	72396	72404	72416	72432	72452	72477	72506	1,46
1,47	72539	72576	72617	72662	72712	72766	72824	72886	72952	73022	1,47
1,48	73097	73175	73258	73345	73436	73531	73630	73734	73841	73953	1,48
1,49	74068	74188	74312	74440	74572	74708	74848	74992	75141	75293	1,49

Table des logarithmes de $\Gamma(a)$.

a	Log $\Gamma(a)$. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(1\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.										a
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,50	9,94 75449	75610	75774	75943	76116	76292	76473	76658	76847	77040	1,50
1,51	77237	77437	77642	77851	78064	78281	78502	78727	78956	79189	1,51
1,52	79426	79667	79912	80161	80414	80671	80932	81196	81465	81738	1,52
1,53	82015	82295	82580	82868	83161	83457	83758	84062	84370	84682	1,53
1,54	84998	85318	85642	85970	86302	86638	86977	87321	87668	88019	1,54
1,55	9,94 88374	88733	89096	89463	89834	90208	90587	90969	91355	91745	1,55
1,56	92139	92537	92938	93344	93753	94166	94583	95004	95429	95857	1,56
1,57	96289	96725	97165	97609	98056	98508	98963	99422	99885	*00351	1,57
1,58	9,95 00822	01296	01774	02255	02741	03230	03723	04220	04720	05225	1,58
1,59	05733	06245	06760	07280	07803	08330	08860	09395	09933	10475	1,59
1,60	9,95 11020	11569	12122	12679	13240	13804	14372	14943	15519	16098	1,60
1,61	16680	17267	17857	18451	19048	19649	20254	20862	21475	22091	1,61
1,62	22710	23333	23960	24591	25225	25863	26504	27149	27798	28451	1,62
1,63	29107	29766	30430	31097	31767	32442	33120	33801	34486	35175	1,63
1,64	35867	36563	37263	37966	38673	39383	40097	40815	41536	42260	1,64
1,65	9,95 42989	43721	44456	45195	45938	46684	47434	48187	48944	49704	1,65
1,66	50468	51236	52007	52782	53560	54342	55127	55916	56708	57504	1,66
1,67	58303	59106	59913	60723	61536	62353	63174	63998	64825	65656	1,67
1,68	66491	67329	68170	69015	69864	70716	71571	72430	73293	74159	1,68
1,69	75028	75901	76777	77657	78540	79427	80317	81211	82108	83009	1,69
1,70	9,95 83912	84820	85731	86645	87563	88484	89409	90337	91268	92203	1,70
1,71	93141	94083	95028	95977	96929	97884	98843	99805	*00771	*01740	1,71
1,72	9,96 02712	03688	04667	05650	06636	07625	08618	09614	10613	11616	1,72
1,73	12622	13632	14645	15661	16681	17704	18730	19760	20793	21830	1,73
1,74	22869	23912	24959	26009	27062	28118	29178	30241	31308	32377	1,74
1,75	9,96 33451	34527	35607	36690	37776	38866	39959	41055	42155	43258	1,75
1,76	44364	45473	46586	47702	48821	49944	51070	52199	53331	54467	1,76
1,77	55606	56749	57894	59043	60195	61350	62509	63671	64836	66004	1,77
1,78	67176	68351	69529	70710	71895	73082	74274	75468	76665	77866	1,78
1,79	79070	80277	81488	82701	83918	85138	86361	87588	88818	90051	1,79
1,80	9,96 91287	92526	93768	95014	96263	97515	98770	*00029	*01291	*02555	1,80
1,81	9,97 03823	05095	06369	07646	08927	10211	11498	12788	14082	15378	1,81
1,82	16678	17981	19287	20596	21908	23224	24542	25864	27189	28517	1,82
1,83	29848	31182	32520	33860	35204	36551	37900	39254	40610	41969	1,83
1,84	43331	44697	46065	47437	48812	50190	51571	52955	54342	55733	1,84
1,85	9,97 57126	58522	59922	61325	62730	64139	65551	66966	68384	69805	1,85
1,86	71230	72657	74087	75521	76957	78397	79839	81285	82734	84186	1,86
1,87	85640	87098	88559	90023	91490	92960	94433	95909	97389	98871	1,87
1,88	9,98 00356	01844	03335	04830	06327	07827	09331	10837	12346	13859	1,88
1,89	15374	16893	18414	19939	21466	22996	24530	26066	27606	29148	1,89
1,90	9,98 30693	32242	33793	35348	36905	38465	40028	41595	43164	44736	1,90
1,91	46311	47890	49471	51055	52642	54232	55825	57421	59020	60621	1,91
1,92	62226	63834	65445	67058	68675	70294	71917	73542	75170	76802	1,92
1,93	78436	80073	81713	83356	85002	86651	88302	89957	91614	93275	1,93
1,94	94938	96605	98274	99946	*01621	*03300	*04980	*06663	*08350	*10039	1,94
1,95	9,99 11732	13427	15125	16826	18530	20237	21947	23659	25375	27093	1,95
1,96	28815	30539	32266	33995	35728	37464	39202	40943	42688	44435	1,96
1,97	46185	47937	49693	51451	53213	54977	56744	58513	60286	62062	1,97
1,98	63840	65621	67405	69192	70982	72774	74569	76368	78169	79972	1,98
1,99	81779	83588	85401	87216	89034	90854	92678	94504	96333	98165	1,99

Application de la Table.

Si l'argument a se trouve exactement dans la Table, celle-ci donne directement le logarithme de l'intégrale.

Par exemple :

$$\log\Gamma(1,614) = 9,951\,9048$$
$$\Gamma(1,614) = 0,895\,1685$$

Si l'argument a est compris entre 1 et 2 et qu'il contienne plus de quatre chiffres, on détermine le logarithme de l'intégrale par interpolations par parties proportionnelles.

Par exemple, $\log\Gamma(1,61486)$:

$$\Delta\Gamma = 601 \qquad 0,86 \times 601 \qquad = 516,9$$
$$\Delta^2\Gamma = -4 \qquad 0,86 \times \frac{0,86-1}{2} \times 4 = 0,2$$

donc

$$\log\Gamma(1,61486) = 9,951\,9565$$

et

$$\Gamma(1,61486) = 0,895\,2751.$$

On voit que l'intervention de la différence seconde ne modifie en rien le résultat.

Enfin si l'argument n'est pas compris entre les limites 1 et 2, on trouve le logarithme au moyen de la formule

$$\Gamma(1+a) = a\Gamma(a).$$

Exemple I. On demande $\Gamma(4,61486)$:

$$\Gamma(4,61486) = 3,61486 \times 2,61486 \times 1,61486 \times \Gamma(1,61486).$$

$$\begin{aligned} & 0,558\,0915 \\ & 0,417\,4485 \\ & 0,208\,1348 \\ & \underline{9,951\,9565} \\ \log\Gamma(4,61486) = {} & 1,135\,6313 \\ \Gamma(4,61486) = {} & 13,66568 \end{aligned}$$

Exemple II. On demande $\Gamma(0,61486)$:

$$\Gamma(1,61486) = 0,61486 \times \Gamma(0,61486).$$

$$\begin{aligned} \log\Gamma(1,61486) &= 9,951\,9565 \\ \log 0,61486 &= \underline{9,788\,7762} \\ \log\Gamma(0,61486) &= \bar{0},163\,1803 \\ \Gamma(0,61486) &= 1,456063 \end{aligned}$$

EXEMPLE III. $z = \int_0^\infty e^{-3x} x^{0,563}\, dx = \frac{\Gamma(1,563)}{3^{1,563}}$:

$$\begin{aligned} \log\Gamma(1,563) &= 9,949\ 3344 \\ 1,563 \times \log 3 &= 0,745\ 7405 \\ \hline \log z &= 9,203\ 5939 \\ z &= 0,159\ 8063 \end{aligned}$$

EXEMPLE IV. $z = \int_0^1 x^{0,678} (1-x)^{1,359}\, dx = \frac{\Gamma(1,678) \times \Gamma(2,359)}{\Gamma(4,037)}$:

$$\begin{aligned} \log\Gamma(1,678) &= 9,956\ 4825 \\ \log\Gamma(2,359) &= 0,082\ 7446 \\ \mathrm{C}^t \log\Gamma(4,037) &= 9,201\ 5802 \\ \hline \log z &= 9,240\ 8073 \\ z &= 0,174\ 1034 \end{aligned}$$

EXEMPLE V. $z = \int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}\,.\,dx}{(1+x)^{\frac{11}{4}}} = \frac{\Gamma(1,2) \times \Gamma(1,55)}{\Gamma 2,75}$:

$$\begin{aligned} \log\Gamma(1,2) &= 9,962\ 9225 \\ \log\Gamma(1,55) &= 9,948\ 8374 \\ \mathrm{C}^t \log 1,75 &= 9,756\ 9620 \\ \mathrm{C}^t \log\Gamma(1,75) &= 0,036\ 6549 \\ \hline \log z &= 9,705\ 3768 \\ z &= 0,507\ 4308 \end{aligned}$$

EXEMPLE VI. $z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{5}{4}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{5}{4}} dx,$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(1,125)}{\Gamma(1,625)} :$$

$$\begin{aligned} \log\sqrt{\pi} &= 0,248\ 5749 \\ \mathrm{C}^t \log 2 &= 9,698\ 9700 \\ \log\Gamma(1,125) &= 9,973\ 9323 \\ \mathrm{C}^t \log\Gamma(1,625) &= 0,047\ 4137 \\ \hline \log z &= 9,968\ 8909 \\ z &= 0,930\ 8740 \end{aligned}$$

Exemple VII. $z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x^{\frac{3}{4}}\, dx,$

$$z = \frac{\Gamma(1,5) \times \Gamma(0,875)}{2\,\Gamma(2,375)} = \frac{\Gamma(1,5) \times \Gamma(1,875)}{1,75 \times 1,375 \times \Gamma(1,375)}:$$

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(1,5) &= 9,947\ 5449\\
\log\Gamma(1,875) &= 9,979\ 2960\\
\mathrm{C}^t \log 1,76 &= 9,756\ 9620\\
\mathrm{C}^t \log 1,375 &= 9,861\ 6973\\
\mathrm{C}^t \log\Gamma(1,375) &= 0,051\ 1405\\
\hline
\log z &= 9,596\ 6407\\
z &= 0,395\ 0396
\end{aligned}$$

Exemple VIII. Déterminer la surface totale de la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho^4 = \sin^3\omega \cos\omega.$$

Cette courbe présente la forme d'un chiffre 8 incliné, composé de deux boucles parfaitement égales et placées l'une dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant; le rayon vecteur atteint son maximum à 60 et à 240 degrés.

La partie de la surface d'une courbe comprise entre l'axe polaire et un rayon vecteur quelconque étant déterminée par l'expression

$$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega,$$

la surface du premier quadrant sera

$$z = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega^{\frac{3}{2}} \cos\omega^{\frac{1}{2}}\, d\omega = \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\,\Gamma(2)};$$

par conséquent la surface totale de la courbe sera égale à $\frac{2}{3}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)$:

On a

$$\begin{aligned}
\log\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) &= 9,957\ 3211\\
\log\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) &= 9,963\ 3451\\
\log\frac{2}{3} &= 9,823\ 9087\\
\hline
\text{donc}\qquad \log 2z &= 9,744\ 5749\\
\text{et}\qquad 2z &= 0,555\ 3604 \text{ surface totale de la courbe.}
\end{aligned}$$

Exemple IX. $z = \int_0^\infty x^{0,37} e^{-\frac{x}{4}} \cos \frac{x}{7}\, dx,$

$$z = \Gamma(1,37) \cos\left(1,37 \text{ arc tang } \frac{4}{7}\right)\left(\frac{784}{65}\right)^{0,685}:$$

$$\begin{aligned}
\log \frac{4}{7} = \log \operatorname{tang} \varphi &= 9,756\,9620 \\
\varphi &= 29^\circ 44' 41'',58 \\
1,37\,\varphi &= 40^\circ 45' \ 1'',76 \\
\log \cos(1,37\,\varphi) &= 9,879\,4163 \\
\log \Gamma(1,37) &= 9,949\,0549 \\
0,685 \log\left(\frac{784}{65}\right) &= 0,740\,7608 \\
\hline
\log z &= 0,569\,2324 \\
z &= 3,708791
\end{aligned}$$

Exemple X. $z = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)^2}{6\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}:$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,301\,0300 \\
2 \log \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) &= 9,934\,8333 \\
C^t \log \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) &= 0,049\,1585 \\
\hline
\log z &= 0,285\,0218 \\
z &= 1,927622
\end{aligned}$$

CHAPITRE XI.

INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES.

Définitions.

331. L'introduction des expressions imaginaires dans le calcul intégral est déjà fort ancienne. Euler et Laplace, invoquant seulement la généralité de l'analyse, ont souvent remplacé par des valeurs imaginaires des constantes supposées d'abord réelles, et obtenu ainsi des formules importantes dont la démonstration plus rigoureuse n'était pas parfois sans difficulté. Nous avons rencontré déjà (**326**) et (**240**) quelques exemples de ce genre de considérations, en les présentant seulement comme un précieux moyen d'induction. Cette théorie n'a pris une forme rigoureuse que depuis les travaux de Cauchy, où, pour la première fois, le sens précis des intégrales imaginaires a été nettement fixé.

L'extension pure et simple de la définition des intégrales réelles au cas des fonctions et des limites imaginaires conduirait très-souvent à un résultat mal déterminé.

Si l'on pose en effet, comme définition,

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} \varphi'(z)\,dz = \varphi(c+d\sqrt{-1}) - \varphi(a+b\sqrt{-1}),$$

le second membre de cette formule représentera en général plusieurs expressions distinctes, entre lesquelles rien n'indique la manière de choisir. On a vu (I, 373) que la plupart des fonctions imaginaires ont, en effet, plusieurs valeurs différentes, qui ne peuvent être distinguées qu'en faisant croître la variable d'une manière continue et suivant une loi déterminée.

Écrivons par exemple

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} \frac{dz}{z} = l(c+d\sqrt{-1}) - l(a+b\sqrt{-1});$$

chacun des logarithmes qui forment le second membre est indéterminé, et l'on peut ajouter à l'intégrale, définie de cette manière, un multiple arbitraire de

$2\pi\sqrt{-1}$. Une remarque semblable s'applique à l'équation

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \sqrt{c+d\sqrt{-1}} - \sqrt{a+b\sqrt{-1}},$$

dont le second membre représente quatre valeurs entre lesquelles on reste indécis. L'indétermination, il est vrai, ne se présente pas toujours. On a, par exemple,

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} e^{mz}\,dz = \frac{1}{m}\left[e^{m(c+d\sqrt{-1})} - e^{m(a+b\sqrt{-1})}\right],$$

et le second membre est parfaitement déterminé; mais de tels cas sont exceptionnels, et une définition générale et précise est indispensable.

332. Poisson, dans un Mémoire publié en 1811, avait rencontré cette difficulté et fait un pas vers la solution. En appliquant à l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$$

la formule générale qui sert de définition, il avait trouvé

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}^{+1} = -2,$$

et cependant l'élément $\frac{dx}{x^2}$ est constamment positif!

La même difficulté se présente pour toute intégrale de la forme $\int \frac{dx}{x^m}$, dans laquelle m est un nombre pair. En calculant de même $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, les éléments passent, dit-il, du positif au négatif et les parties infinies peuvent se détruire; mais alors il semblerait que l'intégrale devrait être nulle, et, au contraire, elle est égale à la quantité imaginaire $l(-1)$; ce logarithme a, comme on sait, une infinité de valeurs comprises sous la forme $(2n+1)\pi\sqrt{-1}$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et π représentant toujours le rapport de la circonférence au diamètre. On ne voit pas d'abord, dit Poisson, comment la somme des éléments qui sont tous réels peut avoir plusieurs valeurs, et encore moins comment ces valeurs sont imaginaires.

Nous avons rencontré la même difficulté (4), et pour l'écarter, il nous a suffi de remarquer que la définition des intégrales définies considérées comme sommes de leurs éléments, suppose essentiellement que ceux-ci ne deviennent pas infinis,

et que, par conséquent, les formules employées ne sont pas applicables aux cas dont il s'agit.

Poisson ne s'en tient pas à cette raison sommaire qui supprime la difficulté. $f(x)$ étant la dérivée de $F(x)$, on a, dit-il,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dès la naissance du calcul intégral on a regardé l'intégrale définie comme exprimant la somme des valeurs de la différentielle et ces valeurs comme les éléments de l'intégrale; et c'est pour cette raison que l'on a indiqué les intégrales par la lettre $\int$, initiale du mot somme. Depuis, on a senti que cette notion de l'intégrale était un véritable théorème qui a besoin d'être démontré. On prouve donc maintenant, dans le calcul intégral, que la quantité $F(b) - F(a)$ est la somme des valeurs de $f(x)\,dx$, lorsque x va de $x = a$ à $x = b$ par degrés infiniment petits, chacun de ces degrés étant exprimé par dx. Cette proposition a lieu quels que soient les changements de signe de $f(x)\,dx$ entre les limites a et b. Elle subsiste aussi lors même que *cette différentielle passe par des valeurs imaginaires;* mais la démonstration qu'on en donne suppose essentiellement qu'entre les mêmes limites, $f(x)$ demeure une quantité finie, et quand, au contraire, elle passe une ou plusieurs fois par l'infini, il y a des cas dans lesquels cette proposition cesse d'avoir lieu. Dans ces sortes de cas, l'intégrale définie n'a plus aucun rapport nécessaire avec la somme des valeurs de la différentielle comme le prouvent les exemples cités plus haut, de $\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{x^2}$.

Nous allons faire voir, ajoute Poisson, que l'on peut ramener ces cas d'exception à la notion ordinaire des intégrales regardées comme les sommes de leurs éléments, ce qui fera disparaître l'espèce d'anomalie qu'elles présentent.

Il suffit, pour cela, de faire en sorte que la variable x passe de la limite a à la limite b par une série de valeurs imaginaires. Alors $f(x)$ ne deviendra plus infinie pour aucune de ces valeurs intermédiaires, et l'intégrale définie reprendra sa signification ordinaire. Ainsi, relativement à l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, je fais

$$x = -(\cos z + \sqrt{-1}\sin z),$$

et j'intègre par rapport à z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = (2n+1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Les valeurs extrêmes de x seront toujours

$$x = -1, \quad x = +1;$$

mais en allant d'une limite à l'autre, cette variable ne passera plus par la valeur $x = 0$, qui rendait infinie la quantité $\frac{1}{x}$. Nous aurons alors

$$dx = (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)\,dz = -\sqrt{-1}(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\,dz,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \sqrt{-1}\,dz = z\sqrt{-1} + c,$$

et l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_0^{(2n+1)\pi} \sqrt{-1}\,dz = (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ce passage très-remarquable de Poisson contient la définition précise des intégrales imaginaires, qui ont joué depuis un rôle si important; mais satisfait d'avoir écarté une difficulté singulière qui l'avait un instant étonné, il n'a suivi aucune des conséquences de son ingénieuse explication, en laissant à Cauchy l'honneur de créer la théorie nouvelle.

333. La définition de Cauchy est conforme à celle de Poisson. L'intégrale

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} \varphi(z)\,dz$$

est la limite de la somme des valeurs que prend la différentielle $\varphi(z)\,dz$, lorsque z passe de $a + b\sqrt{-1}$ à $c + d\sqrt{-1}$, en recevant des valeurs intermédiaires qui se succèdent suivant une loi continue. C'est précisément d'ailleurs, on le voit, la définition donnée pour les intégrales réelles, lorsque la variable, sans cesser d'être réelle, passe de la limite inférieure à la limite supérieure. On voit que l'intégrale change de signe, comme dans le cas des limites réelles, lorsque, les deux limites se changeant l'une dans l'autre, la série des valeurs intermédiaires reste la même, et est représentée par la même courbe parcourue en sens inverse.

Mais sous l'identité apparente des deux définitions, subsiste une différence essentielle : lorsque z passe de la valeur réelle a à la valeur réelle b, les valeurs intermédiaires réelles qu'elle doit prendre sont entièrement déterminées; il n'en est pas de même lorsqu'une variable imaginaire doit passer de la valeur initiale $a + b\sqrt{-1}$ à la valeur finale $c + d\sqrt{-1}$. Les expressions imaginaires étant représentées, comme on l'a dit, par les points d'un plan, si P et Q sont les points correspondants aux limites de l'intégrale, on peut les réunir par une courbe quelconque et attribuer successivement à z les valeurs représentées par les points de cette courbe, dont la orme arbitraire introduit dans la définition une indétermination réelle, mais beau-

coup moindre cependant que l'on ne serait porté à le croire à première vue. Si la courbe, en effet, se déforme d'une manière continue en conservant les mêmes points extrêmes qui représentent les limites données, l'intégrale ne varie pas continuellement avec elle, et c'est seulement lorsque la courbe franchit certains points particuliers, nommés *points critiques*, qu'elle change brusquement de valeur.

334. Considérons, en effet, l'intégrale

$$\int_{a+b\sqrt{-1}}^{c+d\sqrt{-1}} \varphi(z)\,dz.$$

Si la définition de $\varphi(z)$ la rend susceptible de plusieurs valeurs, on doit se donner celle qui correspond au point P, et la loi de continuité suffit alors, comme on l'a expliqué (I, 373), pour déterminer celles que prend ensuite successivement la fonction. Soit

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1},$$

M et N étant des fonctions données de x et de y. On aura, en posant $z = x + y\sqrt{-1}$,

$$\varphi(z)\,dz = (\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}) = \mathrm{M}\,dx - \mathrm{N}\,dy + \sqrt{-1}\,(\mathrm{M}\,dy + \mathrm{N}\,dx),$$

et

$$(1)\qquad \int \varphi(z)\,dz = \int (\mathrm{M}\,dx - \mathrm{N}\,dy) + \sqrt{-1}\int (\mathrm{M}\,dy + \mathrm{N}\,dx).$$

La lettre y représente, dans le second membre, une fonction arbitraire de x, et la courbe dont les points ont pour coordonnées les valeurs successives de x et de y est entièrement arbitraire; les points extrêmes seuls sont donnés par les limites de l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$. Supposons que cette courbe, le long de laquelle on intègre, se déplace infiniment peu, et que la fonction y subisse un petit changement et devienne $y + y_1$, y_1 étant nul aux deux limites, le second membre de (1) changera de forme; mais nous allons prouver qu'*en général* il ne change pas de valeur.

En désignant par y' la dérivée de y, le second membre de (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad \int (\mathrm{M} - \mathrm{N}y')\,dx + \sqrt{-1}\int (\mathrm{M}y' + \mathrm{N})\,dx.$$

Si l'on remplace y par $y + y_1$, y_1 étant infiniment petit, l'accroissement de (2) est évidemment

$$(3)\qquad \int \left(\frac{d\mathrm{M}}{dy}y_1 - \frac{d\mathrm{N}}{dy}y'y_1 - \mathrm{N}y'_1\right)dx + \sqrt{-1}\int \left(\frac{d\mathrm{M}}{dy}y_1y' + \mathrm{M}y'_1 + \frac{d\mathrm{N}}{dy}y_1\right)dx;$$

mais on a, y étant une fonction de x,

$$\int \mathrm{N} y'_1\, dx = \mathrm{N} y_1 - \int y_1 \left(\frac{d\mathrm{N}}{dx} + \frac{d\mathrm{N}}{dy} y'\right) dx,$$

$$\int \mathrm{M} y'_1\, dx = \mathrm{M} y_1 - \int y_1 \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy} y'\right) dx,$$

et l'expression (3) devient, en remarquant que y_1 est nul aux deux limites,

$$\int y_1 \left(\frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dx}\right) dx + \sqrt{-1} \int y_1 \left(\frac{d\mathrm{N}}{dy} - \frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) dx;$$

et comme on a (I, 360)

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{N}}{dy} - \frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0,$$

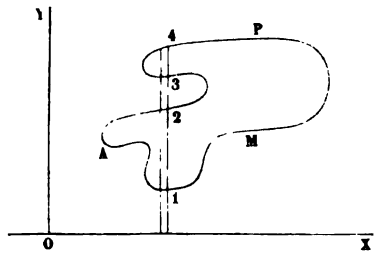
on voit que le changement de l'intégrale (2) est égal à zéro.

Plusieurs remarques sont nécessaires. En calculant le changement de l'intégrale (2), nous avons négligé les infiniment petits du second ordre, et par conséquent la démonstration précédente prouve seulement que y recevant une variation infiniment petite du premier ordre, la variation correspondante de l'intégrale (2) est du second ordre, tout au plus. Mais on sait qu'alors (I, 2) cette variation est rigoureusement nulle, et qu'un changement fini apporté à la fonction y n'en peut apporter aucun dans l'intégrale.

La démonstration reste soumise cependant à une restriction importante; elle suppose évidemment la continuité des fonctions M et N, et par conséquent celle de la fonction $\varphi(z)$. S'il en était autrement le résultat ne serait plus exact, et l'intégrale $\int \varphi(z)\, dz$ pourrait changer de valeur. Si donc la courbe qui dirige l'intégration se déforme d'une manière continue, l'intégrale reste, en général, invariable; mais il peut arriver qu'elle change brusquement de valeur si la fonction $\varphi(z)$ devient infinie ou acquiert plusieurs valeurs égales pour une certaine valeur de z, lorsque la courbe le long de laquelle on intègre, en se déformant d'une manière continue, franchit le point qui correspond à cette valeur de z.

335. Le théorème précédent servant de base à toute la théorie, il ne sera pas superflu d'en donner une seconde démonstration, qui conduira d'ailleurs à des conséquences un peu plus étendues.

Considérons sur le plan un contour fermé quelconque AMPA, et une fonction



continue $\varphi(z)$ déterminée pour chaque valeur de la variable z, représentée par un point intérieur au contour. Je dis que l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ étendue à la circonférence AMP est égale à zéro.

Soit, comme plus haut,

$$\varphi(z) = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}.$$

Décomposons la surface AMPA en éléments infiniment petits, compris entre des parallèles aux axes des coordonnées; multiplions chaque élément $dx\,dy$ par

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dx} - \sqrt{-1}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} - \frac{d\mathrm{N}}{dy}\right).$$

La somme des produits ainsi obtenus, c'est-à-dire

$$(4) \qquad \int\int dx\,dy\left(\frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dx}\right) - \sqrt{-1}\int\int\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} - \frac{d\mathrm{N}}{dy}\right)dx\,dy,$$

est évidemment nulle en vertu des deux équations (I, 360)

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} - \frac{d\mathrm{N}}{dy} = 0.$$

On peut décomposer la première intégrale de la manière suivante :

$$\int\int \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,dx\,dy + \int\int \frac{d\mathrm{N}}{dx}\,dx\,dy;$$

mais on a

$$\int\int \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,dx\,dy = \int dx \int \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,dy.$$

En supposant que, pour la valeur considérée de x, la parallèle à l'axe des y coupe le contour aux points 1, 2, 3, 4, et nommant M_1, M_2, M_3, M_4 les valeurs de M qui y correspondent, on aura

$$\int \frac{d\mathrm{M}}{dy}\,dy = \mathrm{M}_4 - \mathrm{M}_3 + \mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1,$$

et par conséquent

$$\int\int \frac{dM}{dy}\,dx\,dy = \int dx\,(M_4 - M_3 + M_2 - M_1);$$

mais si l'on étend l'intégrale $\int M\,dx$ à la circonférence entière du contour APMA, on verra que pour une même valeur de dx, cette intégrale comprend précisément les quatre éléments $M_4\,dx$, $-M_3\,dx$, $M_2\,dx$, $-M_1\,dx$, en sorte que l'équation peut s'écrire

$$\int\int \frac{dM}{dy}\,dx\,dy = \int M\,dx;$$

l'intégration étant étendue au contour entier.

On verra, de même, que

$$\int\int \frac{dN}{dx}\,dx\,dy = -\int N\,dy,$$

$$\int\int \frac{dM}{dx}\,dx\,dy = -\int M\,dy,$$

$$\int\int \frac{dN}{dy}\,dx\,dy = \int N\,dx;$$

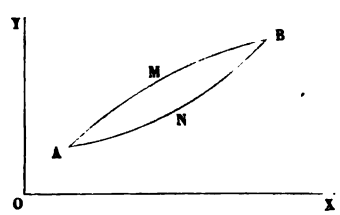
et par conséquent l'expression (4) qui est nulle se réduit à l'intégrale

$$\int (M\,dx - N\,dy) + \sqrt{-1}\int (M\,dy + N\,dx),$$

c'est-à-dire à $\int \varphi(z)\,dz$ étendue à la circonférence du contour proposé.

La démonstration suppose, il ne faut pas l'oublier, que la fonction $\varphi(z)$ soit finie, continue et bien déterminée par les points qui correspondent à l'intérieur du contour.

336. Le résultat précédent ne diffère pas essentiellement de celui que nous avons démontré (334). Si l'on considère en effet deux lignes AMB, ANB, réunissant

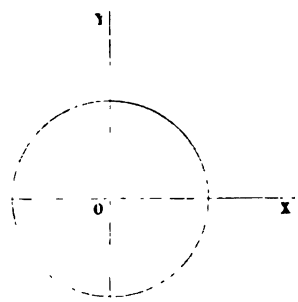


les points A et B, l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prise le long du chemin AMB, sera égale

et de signe contraire à la même intégrale prise le long du chemin BMA, et par conséquent l'intégrale prise pour le contour entier ANBMA est égale à la différence des deux intégrales prises le long de ANB et de AMB; cette différence est donc égale à zéro et les deux intégrales sont égales, comme nous l'avions prouvé (334).

337. Les deux démonstrations supposent essentiellement que, dans l'intérieur du contour considéré ou dans l'espace contenu entre les deux chemins qui dirigent l'intégration, la fonction $\varphi(z)$ soit finie et continue. Si cette condition n'est pas remplie, le théorème cesse d'être exact, ainsi que nous pouvons dès à présent nous en assurer sur un exemple fort simple.

Soit $\varphi(z) = \frac{1}{z}$.



Calculons l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$ autour d'un cercle de rayon R, ayant pour centre l'origine des coordonnées. C'est l'exemple choisi par Poisson (332).

Les coordonnées d'un point de ce cercle sont

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi,$$
$$y = \mathrm{R}\sin\varphi;$$

et l'on a

$$z = x + y\sqrt{-1} = \mathrm{R}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$
$$dz = \mathrm{R}(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\,d\varphi,$$
$$\frac{dz}{z} = \frac{d\varphi(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)}{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)} = \sqrt{-1}\,d\varphi.$$

Si l'on parcourt la circonférence de cercle dans le sens où les valeurs de φ sont croissantes, φ varie de zéro à 2π, et l'on a par conséquent

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1},$$

valeur différente de zéro, et le théorème démontré (335) se trouve en défaut, parce que la fonction $\frac{1}{z}$ devient infinie pour $z = 0$.

338. Supposons en second lieu $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, et cherchons l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

En étendant l'intégration à la circonférence de cercle de rayon R, décrit de l'origine comme centre, on aura

$$z = R(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{R}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$dz = R(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\,d\varphi = R\sqrt{-1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\,d\varphi,$$

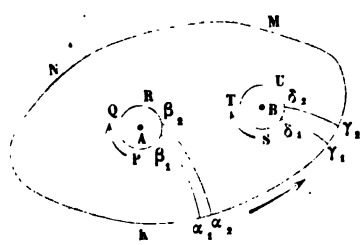
$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{R}\sqrt{-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi,$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{R}\sqrt{-1}\left[(2\sin\pi - 2\sin 0) - 2\sqrt{-1}(\cos\pi - \cos 0)\right] = -4\sqrt{R};$$

et le théorème est ici en défaut, non plus parce que la fonction intégrée devient infinie, mais (I, 375) parce qu'elle n'est pas et ne peut pas être bien déterminée dans l'intérieur du contour.

339. Lorsque la fonction $\varphi(z)$ n'est pas continue, finie et déterminée dans l'intérieur du contour considéré, on peut quelquefois la rendre telle en entourant chaque point critique d'un contour fermé, et adjoignant alors la circonférence de chacun de ces contours à celle de la figure primitive.

Soit par exemple le contour KMN, dans l'intérieur duquel se trouvent, pour



la fonction $\varphi(z)$, deux points critiques A et B. Entourons ces points par les contours PQR, STU, et l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prise le long des trois contours KMN, PQR, STU, parcourus dans le sens indiqué par les flèches, sera dans le cas supposé égale à zéro. Il suffit, pour le démontrer, de réunir chacun des contours intérieurs à la circonférence KMN, par deux traits parallèles infiniment voisins $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_1\delta_1$,

$\gamma_2 \delta_2$. On peut alors considérer le contour continu $\alpha_1 \beta_1 PQR \beta_2 \alpha_2 \gamma_1 \delta_1 STU \delta_2 \gamma_2 MN \alpha_1$ comme renfermant une portion déterminée du plan, dans l'intérieur de laquelle ne se trouve aucun point critique. L'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prise le long de ce contour, est donc égale à zéro; mais les éléments relatifs à $\alpha_1 \beta_1$, $\beta_2 \alpha_2$, $\gamma_1 \delta_1$, $\delta_2 \gamma_2$ se détruisent évidemment, et le théorème est par conséquent démontré.

340. Nous pouvons, dès à présent, justifier par les considérations précédentes quelques démonstrations dans lesquelles les intégrales imaginaires ont souvent été introduites sans examen suffisant.

Nous avons trouvé (**153**)

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}.$$

Si dans cette formule on pose

$$z = x + \alpha\sqrt{-1},$$

elle devient

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2\alpha x\sqrt{-1}+\alpha^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

c'est-à-dire

$$e^{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos 2\alpha x - \sqrt{-1}\sin 2\alpha x)\,dx = \sqrt{\pi},$$

et par conséquent

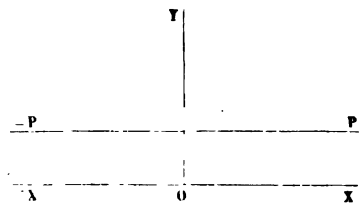
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx = 0.$$

Ces formules sont-elles suffisamment démontrées?

Pour nous en assurer, remarquons que supposer $z = x + \alpha\sqrt{-1}$, puis faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$, c'est tout simplement faire mouvoir le point représenté par z sur la parallèle à l'axe des X menée à la distance α; et qu'en admettant la transformation de l'intégrale (5), où z est réelle, en l'expression (6), nous admettons simplement que l'intégrale $\int e^{-z^2}\,dz$ reste la même lorsque l'on dirige l'intégration suivant l'une ou l'autre des lignes indéfinies — XX, — PP. Or il est clair que si l'on adjoint à ces lignes deux parallèles à l'axe des y, situées de part

et d'autre à une distance infinie, on obtiendra un contour fermé, dans l'intérieur duquel la fonction e^{-z^2} est continue et bien déterminée. L'intégrale totale relative à



ce contour est donc nulle, mais les portions relatives aux deux parallèles à l'axe des y sont évidemment nulles; car en posant

$$z = x_1 + y_1\sqrt{-1},$$

on a

$$e^{-z^2} = e^{-x_1^2} e^{-2x_1y_1\sqrt{-1}} e^{y_1^2} = e^{-x_1^2+y_1^2}(\cos 2x_1y_1 - \sqrt{-1}\sin 2x_1y_1),$$

qui est évidemment nulle lorsque, x_1 étant infini, y_1 est compris entre o et α. On peut donc dire que l'intégrale relative à — XX, ajoutée à celle relative à — PP, donne une somme nulle, et que par conséquent les deux intégrales relatives à — XX et à — PP sont égales entre elles.

341. Dans l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

supposons

$$z = u\sqrt[4]{-1} = u\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

nous aurons

$$(8)\qquad \int_0^\infty e^{-u^2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)}du\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \int_0^\infty e^{-u^2\sqrt{-1}}du(1+\sqrt{-1})\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

d'où, en remplaçant $e^{-u^2\sqrt{-1}}$ par $\cos u^2 - \sqrt{-1}\sin u^2$, nous conclurons

$$\int_0^\infty \cos u^2\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
$$\int_0^\infty \sin u^2\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cette démonstration manque évidemment de rigueur, est-il possible de la rendre exacte?

Remarquons, pour nous en assurer, qu'en posant

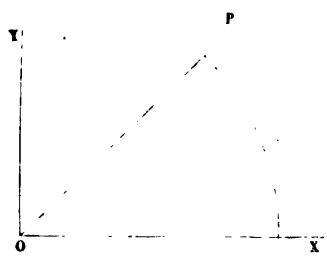
$$z = x + y\sqrt{-1} = u\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

on a

$$x = u\cos\frac{\pi}{4},$$

$$y = u\sin\frac{\pi}{4};$$

et par conséquent le point dont les coordonnées sont x et y décrit une ligne droite issue de l'origine, et inclinée à 45 degrés sur l'axe des X.



Transformer l'intégrale (7) en (8), c'est donc admettre que l'intégrale prise le long de OP soit égale à celle prise le long de OX. Si du point O comme centre, avec un rayon infiniment grand, on décrit un arc de cercle PX, on verra (334) que l'intégrale prise le long de OPX est égale à celle prise le long de OX; car, pour tous les points du plan la fonction e^{-z^2} est continue et bien déterminée. Or on a pour un point de PX, en nommant R le rayon OP,

$$z = x + y\sqrt{-1} = \mathrm{R}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$e^{-z^2} = e^{-\mathrm{R}^2(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)},$$

$$e^{-z^2}dz = \mathrm{R}\sqrt{-1}\,e^{-\mathrm{R}^2(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)}\,d\varphi\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et comme le produit $\mathrm{R}\,e^{-\mathrm{R}^2\cos 2\varphi}$ est infiniment petit lorsque R devient infini, pour toutes les valeurs de φ comprises entre o et $\frac{\pi}{4}$, l'intégrale prise le long de XP est nulle. La transformation se trouve donc légitime à cause de deux circonstances fortuites en quelque sorte, et auxquelles on n'avait nullement songé en la faisant.

342 Considérons enfin la formule

$$(9)\qquad \int_0^\infty e^{-z} z^{n-1}\, dz = \Gamma(n).$$

Nous avons posé (**326**)

$$z = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\, u,$$

et elle est devenue

$$(10)\qquad \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta\sqrt{-1})u} (\alpha + \beta\sqrt{-1})^n u^{n-1}\, du = \Gamma(n),$$

c'est-à-dire, en posant

$$\alpha = \rho\cos\theta,$$
$$\beta = \rho\sin\theta,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u}(\cos\beta u - \sqrt{-1}\sin\beta u)\, u^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(n)}{\rho^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta)},$$

d'où l'on a conclu

$$(11)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha u}\cos\beta u\, u^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(n)\cos n\theta}{\rho^n},$$

$$(12)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha u}\sin\beta u\, u^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(n)\sin n\theta}{\rho^n};$$

où n désigne un nombre positif quelconque entier ou fractionnaire. Pour savoir si la transformation est légitime, remarquons qu'en posant

$$z = x + y\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\, u = \rho u(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

le point dont les coordonnées sont x et y est assujetti à parcourir une ligne droite partant de l'origine, et faisant avec l'axe des X un angle θ.

Soit OP cette ligne. Notre transformation revient à admettre que l'intégrale prise le long de OP est égale à celle prise le long de OX; il suffit, comme dans le cas précédent, que l'intégrale prise le long d'un arc de cercle PX, de rayon infiniment grand, qui réunit les deux lignes soit égale à zéro; or sur les points de cet arc on a

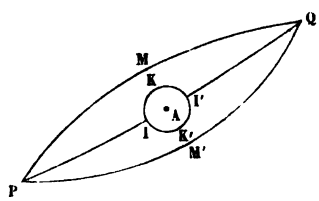
$$x = \mathrm{R}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et la différentielle à intégrer contient le facteur $e^{-\mathrm{R}\cos\varphi}$ qui la rend nulle lorsque R est infini, pourvu que θ, qui est la limite de φ, soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pourvu que α et β soient positifs.

Variation brusque d'une intégrale imaginaire.

343. Cherchons la variation de l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ lorsque, les limites restant les mêmes, la courbe le long de laquelle on intègre franchit, en se déformant, un point auquel correspond pour $\varphi(z)$ une valeur infinie. Soit A ce point; comparons les valeurs de l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prises successivement le long des contours PMQ, PM'Q, qui comprennent entre eux le point critique A.

Considérons les deux chemins PIKI'Q et PIK'I'Q, qui réunissent l'un et l'autre les points extrêmes P et Q en présentant deux parties communes PI, I'Q, et ne diffé-



rant l'un de l'autre qu'en ce que, dans le premier chemin ces deux parties sont réunies par la demi-circonférence infiniment petite IKI' qui a son centre en A, et qui se trouve remplacée dans le second par l'autre moitié IK'I' de la même circonférence.

L'intégrale prise le long du chemin PMQ est la même que le long du chemin PIKI'Q, car le premier peut se déformer et coïncider avec le second sans traverser le point A. De même l'intégrale prise le long de PM'Q est égale à celle qui correspond au chemin PIK'I'Q; la variation cherchée est donc la différence entre les valeurs de l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prise le long des chemins PIKI'Q, PIK'I'Q. Ces deux chemins ont les parties communes PI, I'Q; si donc la fonction $\varphi(z)$ ne change pas de forme quand on passe de l'un à l'autre, les deux intégrales ne diffèrent que par la substitution de la partie relative à IKI' à celle relative à IK'I'; et comme les intégrales relatives à une même ligne parcourue dans les deux sens sont évidemment égales et de signes contraires, cette différence est la *somme* des valeurs de l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ prise le long de ces deux demi-circonférences parcourues successivement dans le même sens, c'est-à-dire tout autour du cercle infiniment petit IK'I'K.

344. On peut, dans un cas très-général, calculer cette intégrale qui, d'après les explications qui précèdent, représente le changement brusque de $\int \varphi(z)\,dz$.

Soient en effet α et β les coordonnées du point A, et par conséquent $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ la valeur de z qui rend $\varphi(z)$ infinie. Supposons qu'il existe un nombre entier n tel, que le produit

$$(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n\varphi(z)$$

ne soit ni nul ni infini quand on y suppose $z=\alpha+\beta\sqrt{-1}$; posons

$$F(z)=(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n\varphi(z),$$

et admettons enfin que $F(z)$ soit développable en série ordonnée suivant les puissances de $z-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, en sorte que l'on ait

$$\varphi(z)=\frac{1}{(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n}[A_0+A_1(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})+A_2(z-\alpha+\beta\sqrt{-1})^2+\ldots];$$

on en conclut

$$\int\varphi(z)\,dz=A_0\int\frac{dz}{(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n}+A_1\int\frac{dz}{(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{n-1}}+\ldots,$$

toutes les intégrales étant supposées prises autour du cercle infiniment petit décrit du point A comme centre. Toutes celles dont l'élément ne contient pas $z-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ en dénominateur sont évidemment iufiniment petites, car la différentielle ne devient pas infinie. Bornons-nous donc à calculer les intégrales de la forme

$$\int\frac{dz}{(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})^k}.$$

En nommant ρ le rayon du cercle, la valeur de z relative à l'un des points du cercle est évidemment

$$z=\alpha+\beta\sqrt{-1}+\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et pour faire décrire au point correspondant la circonférence du cercle, il faut faire varier φ de zéro à 2π; l'intégrale est donc égale à

$$\int_0^{2\pi}\frac{\rho(-\sin\varphi+\sqrt{-1}\cos\varphi)}{\rho^k(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^k}\,d\varphi=\frac{1}{\rho^{k-1}}\int_0^{2\pi}\sqrt{-1}\,[\cos(k-1)\varphi-\sqrt{-1}\sin(k-1)\varphi]\,d\varphi.$$

Lorsque k est différent de l'unité, cette intégrale est nulle, mais, en supposant

$k = 1$, elle se réduit à

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \sqrt{-1}\, d\varphi = 2\pi\sqrt{-1}.$$

On a donc

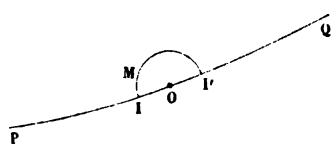
$$(2) \qquad \int \varphi(z)\, dz = 2\pi A_{n-1}\sqrt{-1},$$

A_{n-1} étant le coefficient de $\dfrac{1}{z - \alpha - \beta\sqrt{-1}}$ dans le développement de la fonction $\varphi(z)$, c'est-à-dire (I, 434) le résidu de $\varphi(z)$ relatif à $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

Si le point qui représente z parcourait la circonférence en sens inverse, l'intégrale (1) serait égale à $-2\pi\sqrt{-1}$. Dans chaque application du théorème précédent, il faut tenir compte de cette remarque en examinant dans quel sens doit se faire l'intégration qui représente la différence cherchée.

345. Nous avons exclu, dans la démonstration précédente, le cas où le contour qui dirige l'intégration passe par l'un des points critiques pour lesquels la fonction est infinie. L'intégrale, dans ce cas, n'a pas en général de valeur déterminée, Cauchy y applique néanmoins ses théorèmes en remplaçant l'intégrale par la valeur qu'il a nommée (130) la *valeur principale*.

Soit O le point critique; la valeur principale de l'intégrale prise le long du contour POQ est, d'après la définition de Cauchy, la limite de la somme des deux



intégrales prises le long de PI et le long de I'Q, lorsque les arcs égaux IO, OI' décroissent indéfiniment. Elle diffère donc de l'intégrale prise le long du contour PIMI'Q par l'intégrale prise sur la demi-circonférence IMI', c'est-à-dire (344) $\pi A\sqrt{-1}$, moitié de la variation totale $2\pi A\sqrt{-1}$, qui se produit quand le contour en se déformant traverse le point critique.

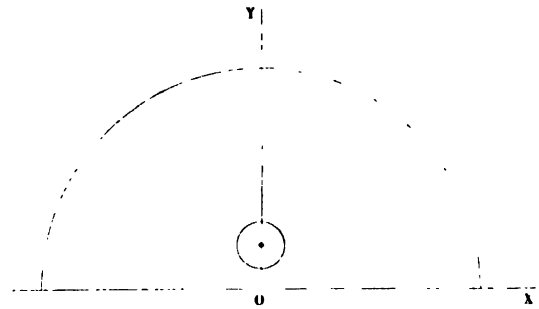
Détermination de quelques intégrales définies.

346. Considérons, pour appliquer les résultats précédents, la différentielle

$$(1) \qquad \frac{e^{az\sqrt{-1}}\, dz}{b^2 + z^2},$$

où a désigne un nombre réel et positif.

Intégrons d'abord entre les limites $z = -\infty$, $z = +\infty$, le long d'un cercle de



rayon infiniment grand ayant pour centre l'origine des coordonnées. Il faut poser

$$z = x + y\sqrt{-1},$$
$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi,$$

et faire varier φ de la valeur π à la valeur zéro. L'intégrale sera

$$(2) \qquad \int_{\pi}^{0} \frac{e^{aR\cos\varphi\sqrt{-1}}\, e^{-aR\sin\varphi}\, R\sqrt{-1}\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{b^2 + R^2(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)}\, d\varphi :$$

a étant positif ainsi que $\sin\varphi$, l'exponentielle $e^{-aR\sin\varphi}$ devient nulle pour les valeurs infiniment grandes de R. Le module du produit des fractions qui le multiplient n'étant pas infini, l'intégrale est évidemment nulle.

L'intégrale prise pour les valeurs réelles de z, c'est-à-dire le long de l'axe des X, est égale par conséquent à l'intégrale prise autour du cercle infiniment petit décrit autour du point qui correspond à la valeur

$$z = b\sqrt{-1},$$

pour laquelle la différentielle est infinie. Or on a

$$\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{b^2 + z^2} = \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{(z + b\sqrt{-1})(z - b\sqrt{-1})};$$

le résidu correspondant à la valeur $b\sqrt{-1}$ de z est ici

$$\frac{e^{-ab}}{2b\sqrt{-1}},$$

et l'intégrale égale (344) à $2\pi A\sqrt{-1}$ est

$$\frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

On a donc

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{b^2+z^2}\,dz = \frac{\pi e^{-ab}}{b},$$

et, en séparant dans le premier membre la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos az}{b^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab},$$

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin az}{b^2+z^2}\,dz = 0.$$

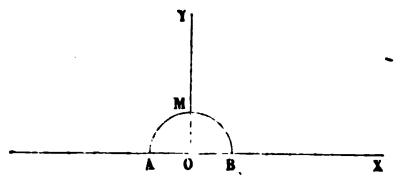
La seconde de ces formules est évidente et la première a été démontrée (250).

347. Considérons en second lieu la différentielle

$$\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z}\,dz,$$

on verra, comme dans le cas précédent, que a étant positif l'intégrale est nulle le long de la demi-circonférence de rayon infiniment grand décrite de l'origine comme centre et du côté des y positifs. Si l'on intègre le long de l'axe des X, en remplaçant seulement par une demi-circonférence infiniment petite la partie qui contient le point critique placé à l'origine, on aura donc le même résultat, et l'on peut écrire

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{A} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx + \int^{AMB} \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} + \int_{B}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx = \sigma.$$



Remplaçons dans la première et la troisième intégrale $e^{ax\sqrt{-1}}$ par la valeur $\cos ax + \sqrt{-1}\sin ax$; remarquons que les deux intégrales réelles sont évidemment

égales et de signes contraires, et que $\frac{\sin ax}{x}$ n'étant pas infini avec x, la suppression de l'intégrale $\int \frac{\sin ax}{x} dx$ le long du diamètre infiniment petit AB est insignifiante, et nous aurons

$$(7) \qquad \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx + \int^{\mathrm{AMB}} \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} dz = 0.$$

Mais pour les points du cercle AMB on peut écrire $e^{az\sqrt{-1}} = 1$, et par conséquent (334)

$$(8) \qquad \int^{\mathrm{AMB}} \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} dz = -\pi\sqrt{-1};$$

donc enfin

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi,$$

comme il a été précédemment trouvé.

348. La méthode précédente, qui est extrêmement féconde, constitue une des belles découvertes de Cauchy. Donnons-en encore une application.

Considérons la différentielle $\frac{z^{a-1}dz}{1+z}$, a désignant un nombre positif moindre que l'unité. La valeur initiale de z étant réelle et infiniment grande $-\mathrm{R}$, prenons

$$(-\mathrm{R})^{a-1} = \mathrm{R}^{a-1}[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi],$$

R^{a-1} étant réel. Si le contour suivi ne pénètre pas au-dessous de l'axe des x, on verra aisément que, pour les valeurs réelles et positives de z, z^{a-1} sera réel.

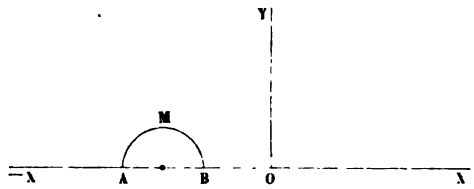
L'intégrale prise le long de la demi-circonférence de rayon infiniment grand R sera, cette fois encore, égale à zéro.

La différentielle présente deux points critiques qui correspondent à $z = -1$ et à $z = 0$, mais il nous sera inutile d'avoir égard au second qui ne sera pas franchi, parce que l'intégrale relative à un demi-cercle infiniment petit qui serait décrit autour de lui pour l'éviter est évidemment infiniment petite. Le demi-cercle de rayon infini peut donc être réduit à l'axe des X, dont une portion infiniment petite seulement sera remplacée par un demi-cercle décrit autour du point dont l'abscisse est -1.

L'intégrale

$$\int \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz,$$

prise le long de la ligne —XAMBX, qui se compose de la portion XA de l'axe



des X, du demi-cercle infiniment petit AMB décrit autour du point dont l'abscisse est -1 et de la ligne BX prolongée jusqu'à un point infiniment éloigné X, est donc aussi égale à zéro, et l'on a

$$(12)\qquad \int_{-\infty}^{A} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int^{AMB} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \int_{B}^{0} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = 0.$$

Si dans les intégrales $\int_{-\infty}^{A}$ et $\int_{B}^{0}$ on remplace x qui est négatif par $-x$, et x^{a-1} par

$$x^{a-1}[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi],$$

la somme de ces intégrales prendra la forme

$$k[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi],$$

k étant un facteur réel que nous n'avons pas besoin de connaître.

L'intégrale

$$\int^{AMB} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz$$

est égale (345) à

$$-\pi\sqrt{-1}\,[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi],$$

et l'on a par conséquent

$$(13)\qquad k[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi]$$
$$-\pi\sqrt{-1}\,[\cos(a-1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)\pi] + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = 0.$$

Multiplions par $[\cos(-a\pi) + \sqrt{-1}\sin(-a\pi)]$, il viendra

$$-k + \pi\sqrt{-1} + [\cos(-a\pi) + \sqrt{-1}\sin(-a\pi)]\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = 0,$$

et, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$(14)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$-k + \pi\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} = 0,$$

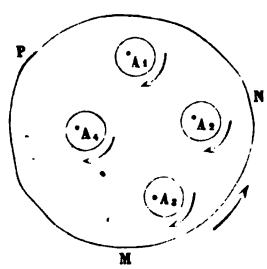
$$(15)\qquad k = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi};$$

k est, on le voit aisément, la *valeur principale* (130) de l'intégrale infinie

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx.$$

Nombre des racines d'une équation dans l'intérieur d'un contour donné.

349. Soit $\varphi(z)$ une fonction bien définie de la variable z qui devienne infinie pour n valeurs de z correspondant aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ intérieurs au contour fermé MNP. On a vu (339) que si l'on calcule l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ le long du contour MNP, puis le long de n contours de forme et de dimensions arbitraires décrits autour de chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et n'en contenant chacun qu'un seul, la somme de toutes ces intégrales sera nulle, pourvu que les contours intérieurs soient parcourus, comme l'indiquent les flèches de la figure, dans un sens opposé à celui du contour total qui les contient.



Les intégrales relatives à deux contours parcourus en sens opposé étant égales et de signes contraires, on peut énoncer le théorème en disant que l'intégrale relative au contour MNP est égale à la somme des intégrales relatives aux contours intérieurs pris dans le même sens que lui.

Appliquons le théorème à l'intégrale $\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$, $F(z)$ étant le premier membre de l'équation

$$F(z) = 0,$$

dont nous voulons compter les racines et que nous supposerons seulement bien déterminée, finie et continue ainsi que sa dérivée pour toute valeur de z. Les seuls points pour lesquels la fonction $\frac{F'(z)}{F(z)}$ peut devenir infinie sont ceux qui correspondent aux racines de $F(z) = 0$, et réciproquement à chaque racine correspond un tel point. Soit en effet $z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ une racine de degré de multiplicité p, *c'est-à-dire* supposons que l'on ait

$$F(z) = (z - \alpha - \beta\sqrt{-1})^p \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction finie et continue, ainsi que sa dérivée, pour la valeur $z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, nous aurons

$$F'(z) = p(z - \alpha - \beta\sqrt{-1})^{p-1}\varphi(z) + (z - \alpha - \beta\sqrt{-1})^p \varphi'(z),$$

et, en divisant le premier membre par $F(z)$ et le second par le produit qui lui est égal,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{p}{z - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Pour calculer l'intégrale autour d'un cercle infiniment petit ayant pour centre le point qui correspond à $z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on peut négliger la fonction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ qui est finie, et l'intégrale est par conséquent (344) égale à $2\pi p\sqrt{-1}$; la somme des intégrales prises le long des petits cercles qui entourent les points correspondants aux racines est par conséquent égale au produit de $2\pi\sqrt{-1}$ par le nombre total des racines, dans lequel la racine de degré de multiplicité p est comptée p fois; et par conséquent enfin le nombre des racines correspondant à des points intérieurs au contour est représenté par

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour MNP.

Pour faire usage de ce théorème très-remarquable dû à Cauchy, il nous reste à examiner le moyen de calculer cette intégrale.

On a

$$\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = lF(z),$$

et en posant

$$F(z) = P + Q\sqrt{-1},$$

$$lF(z) = \frac{1}{2}l(P^2 + Q^2) + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\frac{P}{Q}.$$

Le terme $\frac{1}{2} l(P^2 + Q^2)$ étant bien déterminé pour chaque point du contour, et reprenant la même valeur après un tour accompli, donnera évidemment zéro pour résultat. Pour calculer la portion de l'intégrale qui correspond au terme $\sqrt{-1}$ arc tang $\frac{P}{Q}$, partageons le contour total en un certain nombre d'arcs dans l'intérieur de chacun desquels $\frac{P}{Q}$ ne devienne pas infini, en prenant pour points de division ceux pour lesquels on a $Q = 0$. $\frac{P}{Q}$, dans chacun de ces intervalles, passera de $+\infty$ à $+\infty$, de $-\infty$ à $-\infty$, de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$; dans les deux premiers cas, l'accroissement de arc tang $\frac{P}{Q}$ est évidemment nul; il est π dans le troisième et $-\pi$ dans le quatrième. La moitié de l'excès du nombre des arcs de la troisième espèce sur ceux de la quatrième représente donc le nombre des racines.

350. Supposons, par exemple, que le contour soit un cercle de rayon infiniment grand ρ décrit de l'origine comme centre, et soit

$$F(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_m,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des constantes réelles.

On a

$$P = \rho^m \cos m\omega + A_1 \rho^{m-1} \cos(m-1)\omega + \ldots + A_m,$$
$$Q = \rho^m \sin m\omega + A_1 \rho^{m-1} \sin(m-1)\omega + \ldots + A_{m-1} \rho \sin\omega,$$

et ρ étant infiniment grand, les deux seconds membres peuvent être réduits à leurs premiers termes, et par conséquent Q est nul pour les valeurs de ω infiniment peu différentes de $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\pi, \ldots, \frac{(2m-1)}{m}\pi$; et l'on a ainsi $2m$ intervalles dans chacun desquels $\frac{P}{Q}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$. Le nombre des racines est par conséquent égal à m.

Intégrales des fonctions susceptibles de plusieurs valeurs.

351. Les différentielles considérées dans les exemples précédents n'avaient qu'une seule valeur possible pour chaque valeur de la variable, et lorsque le chemin qui règle l'intégration en se déformant d'une manière continue franchit un point critique, la variation de l'intégrale, due tout entière aux éléments qui dans

un intervalle infiniment petit ont acquis une valeur infinie, est égale (344) à l'intégrale relative à un cercle infiniment petit décrit autour du point. Mais les choses, dans certains cas, se passent tout autrement. Soit l'intégrale

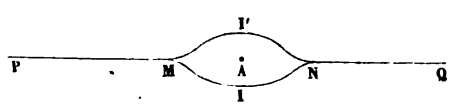
$$\int_a^b \varphi(z)\,dz,$$

les limites a et b correspondant aux points P et Q. Supposons que la courbe le long de laquelle on intègre traverse en se déformant un des points critiques relatifs à la fonction $\varphi(z)$, et cherchons quelle variation en résultera pour l'intégrale.

Le problème est très-différent de celui qui a été résolu (344). La valeur de $\varphi(z)$ n'étant plus pour chaque valeur de z unique et indépendante de la route suivie par le point qui représente z, une cause nouvelle de changement se produit pour altérer bien plus profondément le résultat. Dans le cas traité (344), l'intégrale

$$\int_a^z \varphi(z)\,dz$$

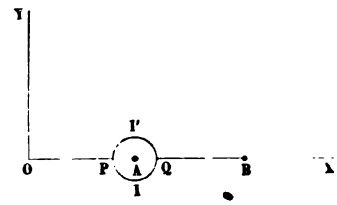
pouvait, par un choix nouveau de la courbe le long de laquelle se fait l'intégration, recevoir un accroissement constant dont nous avons calculé l'expression, mais la forme de la fonction reste, à cela près, toujours la même. Les éléments des intégrales correspondant à deux contours voisins diffèrent infiniment peu les uns des autres, et si les contours, après s'être séparés, se réunissent dans une portion de leur cours, les éléments relatifs à la portion commune sont les mêmes dans les deux cas. Il en est tout autrement dans l'hypothèse actuelle. Si l'on considère deux contours infiniment voisins, tels que PMINQ, PMI'NQ, comprenant entre



eux le point critique A, les deux intégrales, identiques pour la portion qui correspond à PM, diffèrent non-seulement parce que dans l'une les éléments relatifs au contour MIN remplacent ceux qui dans l'autre sont relatifs à MI'N, mais encore parce que, entre les points N et Q, les valeurs de la différentielle $\varphi(z)\,dz$ sont, dans les deux cas, très-différentes.

352. Considérons, par exemple, l'intégrale $\int \sqrt{1-z^2}\,dz$, et soit A le point critique correspondant à $z=1$, pour lequel les deux valeurs de la fonction $\sqrt{1-z^2}$

sont égales et peuvent se changer l'une dans l'autre. Soit B le point correspondant



à $z = 2$, et considérons les deux intégrales relatives aux deux contours OPIQB, OPI'QB; elles ont la partie commune

$$\int_{O}^{OP} \sqrt{1 - z^2}\, dz.$$

Mais il résulte des explications données (I, 373) qu'en suivant à partir de P les deux chemins PIQ et PI'Q pour parvenir en Q, on y trouvera pour le radical deux valeurs égales et de signes contraires, en sorte que l'intégrale

$$\int_{OQ}^{OB} \sqrt{1 - z^2}\, dz,$$

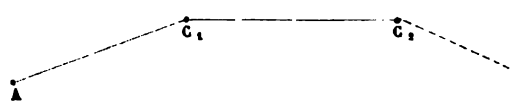
qui forme la partie imaginaire des deux expressions considérées, aura dans l'une et dans l'autre des valeurs égales et de signes contraires. Quant aux portions relatives aux contours PIQ, PI'Q, elles sont infiniment petites et négligeables si le cercle PIQI' est infiniment petit.

353. Pour étudier les valeurs diverses de l'intégrale $\int_a^z \varphi(z)\, dz$ dans le cas où la fonction $\varphi(z)$ est mal déterminée, M. Puiseux a proposé une classification ingénieuse et fort utile des divers chemins qui, entre les deux points qui représentent les limites a et z, peuvent donner lieu à des intégrales distinctes.

Soient A et Z les points extrêmes qui représentent les limites de l'intégrale et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les points critiques dont la rencontre peut faire naître un changement dans l'intégrale, lorsque le contour qui réunit A à Z franchit l'un d'entre eux en se déformant. M. Puiseux nomme *contour élémentaire* le contour parcouru par un point qui, partant de A, se dirige vers un des points critiques, décrit autour de lui un cercle infiniment petit, et revient en A en suivant la ligne qui l'a amené. Il est aisé de voir que tout contour commençant en A et finissant en Z peut être remplacé par la réunion de plusieurs contours élémentaires successivement parcourus, auxquels on adjoindra, pour terminer, la droite OZ, et qu'une telle substitution peut se faire sans qu'il en résulte de changement pour l'integrale.

Considérons en effet un fil flexible dont une extrémité soit fixée en A, et qui, plié suivant la ligne qui dirige l'intégration, aille passer dans un anneau placé en Z. On peut, on le sait, changer la forme de ce fil sans altérer l'intégrale, pourvu que, conservant les mêmes extrémités A et Z, il ne franchisse en se déformant aucun des points critiques. On peut aussi adjoindre au chemin considéré, quel qu'il soit, un chemin quelconque deux fois parcouru en sens opposé partant de l'un quelconque des points du contour et y revenant, *pourvu* qu'il introduise dans l'intégrale des éléments qui se détruisent deux à deux.

Ceci étant rappelé, supposons que l'on implante sur chacun des points critiques $C_1, C_2, \ldots, C_n$ une tige matérielle qui empêche le fil de la franchir, et que l'on tire ensuite celui-ci à travers l'anneau Z, de manière à le raccourcir autant que possible en le réduisant à une série de lignes droites réunissant les points critiques ou seulement quelques-uns d'entre eux, autour desquels il pourra faire un nombre quelconque de circonvolutions. Supposons qu'à partir de A le chemin ainsi réduit se dirige d'abord vers le point critique C_1; deux cas peuvent se présenter : ou il s'appuie sur lui simplement, ou bien, avant de le quitter, il fait autour de lui un ou plusieurs tours. Dans le premier cas, le chemin ayant la forme AC_1C_2 peut être



remplacé par un contour élémentaire décrit autour du point C_1, suivi d'un chemin direct dirigé vers C_2 et laissant C_1 à sa gauche. Si le fil avant de quitter C_1 fait autour de lui n circonvolutions, on peut remplacer la portion AC_1C_2 par $n+1$ contours élémentaires, suivis d'un chemin direct qui va de A vers C_2 en laissant C_1 à sa gauche. Et j'entends par là que ces deux chemins peuvent être réduits l'un à l'autre, comme l'on s'en assure à la simple vue, sans qu'il y ait nécessité de faire franchir à l'un d'eux, en le déformant d'une manière continue, aucun des points critiques C_1 et C_2, et en évitant, bien entendu, la rencontre des autres points critiques qui peuvent se trouver sur le plan.

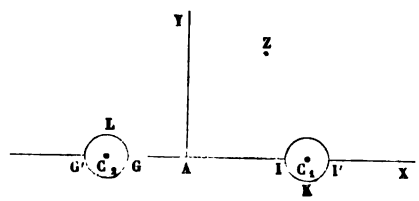
Le fil, se dirigeant ensuite vers un troisième point C_3, pourra être remplacé de même, dans la portion AC_2C_3, par un certain nombre de contours élémentaires décrits autour de C_2, suivi d'une ligne se rendant directement vers C_3 et laissant C_1 et C_2 à la gauche, sans comprendre entre elle et $AC_1C_2C_3$ aucun autre point critique.

L'application répétée de cette méthode permettra, comme on l'a annoncé, de remplacer le chemin proposé, quel qu'il soit, par une série de contours élémentaires auxquels on adjoindra un dernier chemin allant directement de A en Z.

354. Suivons les conséquences des considérations précédentes dans l'étude de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z.$$

Admettons que pour la valeur initiale $z = 0$ on prenne $\sqrt{1-z^2} = +1$; si, partant de l'origine des coordonnées, le point qui représente z suit une courbe donnée quelconque, les valeurs successives des radicaux sont déterminées (I, 373) par la loi de continuité. Les points critiques correspondent ici aux valeurs $z = \pm 1$ et sont tous deux situés sur l'axe des X de part et d'autre de l'origine.



Les contours élémentaires sont AIKI'IA et AGLG'GA. Un chemin quelconque partant de A et se terminant en Z peut être remplacé par une série de contours élémentaires successivement parcourus, auxquels on adjoint, pour terminer, la droite AZ. Lorsque, partant du point A, en adoptant pour le radical la valeur $+1$, le point qui représente z parcourt la droite AI, si l'on nomme ε le rayon de cercle C_1I, la valeur du radical lorsqu'on arrive en I est évidemment $+\sqrt{1-\varepsilon^2}$; mais quand en faisant tourner le point directeur autour du petit cercle on l'aura ramené en I, le radical aura pris la valeur $-\sqrt{1-\varepsilon^2}$. On a, en effet,

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-z}\,\sqrt{1+z};$$

les deux valeurs de $\sqrt{1+z}$ n'étant pas infiniment voisines ne peuvent évidemment pas s'échanger l'une dans l'autre par suite du chemin infiniment petit qui a été parcouru; mais celles de $\sqrt{1-z}$ au contraire s'échangent à la suite de la rotation du point qui représente z autour du point critique C_1. Le point directeur partant de I pour revenir en A et achever le contour élémentaire, le radical ayant pour valeur initiale $-\sqrt{1-\varepsilon^2}$ et variant d'une manière continue, sera constamment négatif et aura pris, lors du retour en A, la valeur -1, égale et de signe contraire à celle qu'il avait au départ. Le parcours du contour élémentaire correspondant au point C_2 change également et pour les mêmes raisons le signe de la fonction. Il résulte de là qu'un même contour, parcouru successivement un nombre pair de fois, n'amènera dans l'intégrale que des éléments qui se détruisent deux à deux,

et comme la fonction retrouvera en A la valeur primitive, les autres éléments resteront les mêmes et ces contours élémentaires pourront être supprimés.

Dans le chemin le long duquel on intègre, on doit, d'après cela, supposer que les deux chemins élémentaires soient toujours alternativement parcourus, chacun d'eux pouvant l'être un nombre quelconque de fois, mais jamais deux fois de suite.

Cherchons la portion de l'intégrale relative à l'un de ces contours. La portion relative à AI est évidemment

$$\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0;$$

elle diffère infiniment peu de $\frac{\pi}{2}$; celle qui se rapporte au contour du cercle infiniment petit est elle-même infiniment petite. On a, en effet, pour un point de cercle

$$z = 1 + \varepsilon(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi), \quad dz = \varepsilon\sqrt{-1}\,d\varphi(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\varepsilon\sqrt{-1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{\sqrt{[2+\varepsilon(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)](-\varepsilon)(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}}\,d\varphi,$$

et l'on voit que l'élément de l'intégrale contient $\sqrt{\varepsilon}$ en facteur.

L'intégrale relative à IA est égale enfin à celle qui se rapporte à AI et de même signe, puisque les facteurs dz et $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ changent de signe en même temps quand on passe de l'une des intégrales à l'autre.

L'intégrale relative au premier contour élémentaire est, d'après cela, égale à π, lorsque la valeur initiale du radical est $+1$; elle serait $-\pi$ dans le cas contraire. L'intégrale relative au second contour est $-\pi$ dans le premier cas et $+\pi$ dans le second.

Cela posé, si l'on commence à faire parcourir, au point qui représente z, n fois chacun des deux contours élémentaires, en passant alternativement de l'un à l'autre, l'intégrale relative à l'un de ces contours sera $\pm 2n\pi$, selon qu'on aura commencé par celui de droite ou par celui de gauche; et si l'on prend $n+1$ fois le premier et n fois seulement le second, elle sera $\pm(2n+1)\pi$. En nommant u l'intégrale prise le long de AZ, lorsque la valeur initiale du radical est $+1$, et $-u$, par conséquent, lorsque cette valeur est -1, ce qui aura lieu après le parcours de $2n+1$ contours, les valeurs que peut prendre l'intégrale sont

$$\pm 2n\pi + u,$$
$$\pm(2n+1)\pi - u,$$

ce qui est précisément l'expression générale des arcs, dont le sinus est égal à $\sin u$.

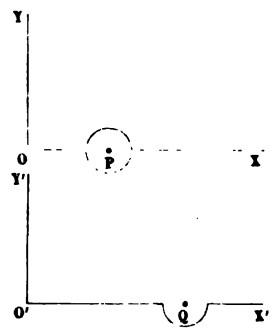
355. La fonction $\operatorname{arc}\sin z$, considérée comme l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = u,$$

est, on vient de le voir, une fonction mal définie qui, pour chaque valeur de z, peut acquérir une infinité de valeurs distinctes. Mais si l'on considère u comme la variable, la fonction inverse

$$z = \sin u$$

est au contraire bien définie. Il importe d'en expliquer la raison. Les variables z et u recevant simultanément des valeurs représentées par deux points du plan, il faut, pour étudier leur dépendance, suivre leurs mouvements simultanés. Rappor-



tons-les, pour plus de simplicité, à des axes différents OY, OX pour z, O'Y', O'X' pour u. L'équation

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1-z^2}$$

montre que les points critiques de la fonction z, s'ils existent, doivent correspondre à $z = \pm 1$, et par conséquent, d'après l'étude faite précédemment, à $u = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Soit, par exemple,

$$z = 1,$$

$$u = \frac{\pi}{2},$$

représentés respectivement sur la figure par les points P et Q. Supposons que le point qui représente z tourne autour de P sur un cercle infiniment petit de rayon ρ; cherchons le mouvement correspondant du point qui représente u. Nous devons

poser

$$z = 1 + \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$
$$dz = \rho\sqrt{-1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\,d\varphi,$$

et, puisque ρ est infiniment petit, en remplaçant $1 + z$ par 2,

$$1 - z^2 = (1 - z)(1 + z) = -2\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = 2\rho[\cos(\varphi + \pi) + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \pi)],$$
$$du = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right)\right]d\varphi,$$

et par conséquent

$$u = \sqrt{2\rho}\left[\sin\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) - \sqrt{-1}\cos\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right)\right] + C;$$

la constante C est évidemment égale à $\frac{\pi}{2}$. Il est clair que φ, variant de zéro à 2π, le point qui représente u décrit une demi-circonférence de rayon $\sqrt{2\rho}$ autour du point Q; et l'on voit que z reprenant sa valeur primitive après avoir fait un tour entier, u ne reprend pas la sienne, et c'est pour cela que u est une fonction mal définie. Mais si, au contraire, u fait un tour entier sur le cercle de rayon $\sqrt{2\rho}$, le point qui représente z fera deux tours sur le cercle de rayon ρ, et z, considéré comme fonction de u, reprend sa valeur primitive lorsque u tourne autour du point Q, qui, par conséquent, n'est pas un point critique.

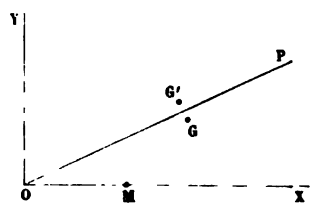
Système de représentation de Riemann.

356. L'étude des fonctions imaginaires et de l'influence du contour adopté sur le résultat de l'intégration est fondée tout entière, comme on l'a vu, sur l'examen des diverses valeurs qu'une même fonction peut acquérir pour une valeur donnée de la variable. Le système adopté par Cauchy et les développements de M. Puiseux sur les contours élémentaires forment un ensemble aussi clair que satisfaisant. Un géomètre d'un rare mérite, trop tôt enlevé à la science, M. Riemann, a proposé cependant un mode de représentation nouveau, qui, dans plusieurs recherches importantes, a été préféré depuis et dont nous devons faire connaître le principe.

La représentation d'une fonction $\varphi(z)$ doit fournir pour chaque valeur de z la valeur correspondante de la fonction, et comme, d'après les conventions de Gauss et de Cauchy adoptées aussi par Riemann, chaque valeur $a + b\sqrt{-1}$ de z est représentée sur un plan par le point dont a et b sont les coordonnées rectangulaires, on doit concevoir qu'à chaque point du plan soit attachée en quelque sorte la valeur correspondante de la fonction. Si cette valeur est unique et bien déter-

minée, il n'y a aucune difficulté, mais si la fonction par sa définition comporte plusieurs valeurs, leur application pure et simple à chaque point du plan ne donne plus un renseignement suffisant, car il reste à décider dans chaque cas quelle est celle qu'on doit choisir pour ne pas rompre la continuité. Les méthodes de Cauchy et de M. Puiseux donnent pour chaque chemin adopté le moyen simple et élégant de résoudre le problème. Riemann a voulu faire un pas de plus en représentant d'avance, et matériellement en quelque sorte, la solution relative à chaque cas.

Considérons, pour prendre l'exemple le plus simple, la fonction $\sqrt{z}$, qui, pour chaque valeur de z, peut recevoir comme on sait deux valeurs. Concevons, pour la représenter, qu'un plan dont les points sont rapportés à deux axes de coordonnées rectangulaires soit recouvert par un second plan identique, dont chaque point reste cependant distinct de celui qu'il recouvre, sans qu'on puisse regarder comme possible le passage direct de l'un à l'autre. Les deux surfaces planes ne sont pas pour cela complétement séparées; elles sont réunies tout le long d'une ligne arbitraire OP passant par l'origine et s'étendant indéfiniment, en se croisant en quelque sorte, de telle façon qu'un point qui, se mouvant sur la surface supérieure, rencontre la ligne OP doit, en la franchissant, passer sur la surface inférieure, et réciproquement.



La ligne OP forme, on le voit, comme un pont entre les deux surfaces. Il est aisé de voir qu'en choisissant arbitrairement en un point quelconque, en M par exemple, qui correspond à $z = 1$, la valeur attachée au plan inférieur, qui sera par exemple -1, et celle qui répond au plan supérieur qui sera $+1$, la continuité donnera, pour un point quelconque de l'un des deux plans, une valeur unique et déterminée qui pourra y être attachée d'avance, indépendamment de la route suivie pour y parvenir, le problème à résoudre dans chaque cas n'étant plus de savoir quelle valeur on doit prendre, mais quel est celui des deux plans sur lequel on se trouve, c'est-à-dire si l'on a traversé la ligne OP en nombre pair ou impair de fois. Il est clair en effet que si l'on reste sur le même plan, c'est-à-dire si l'on ne franchit pas la ligne OP, les contours suivis ne pouvant envelopper le point critique O sont transformables les uns dans les autres sans avoir à le franchir et sont par conséquent équivalents. Il est clair aussi que dans cette même hypothèse, à deux points infiniment voisins du même plan pris de part et d'autre de OP, G et G'

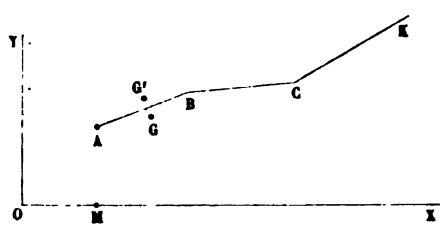
par exemple, correspondent deux valeurs égales et de signes contraires de $\sqrt{z}$, car sans cela, en adoptant en M une valeur de $\sqrt{z}$ allant de M en G sans franchir OP, puis directement de G en G′ et revenant de là en M, encore sans franchir OP, on retrouverait en M la valeur primitive de $\sqrt{z}$, ce qui ne peut pas être puisque le contour ainsi défini enveloppe une fois le point O. Il est évident enfin que pour les points superposés des deux plans les valeurs sont égales et de signes contraires; elles le sont en effet au point de départ M, et si deux points partent ensemble de M, l'un sur le plan supérieur, l'autre sur le plan inférieur, en suivant d'ailleurs la même route, il est clair que les valeurs de la fonction correspondant à leurs positions successives resteront comme au départ égales et de signes contraires. Cela posé, si un point part de M sur le plan inférieur par exemple, la valeur correspondante de $\sqrt{z}$ étant $+1$, tant qu'il restera sur ce plan, c'est-à-dire tant qu'il ne franchira pas OP, les valeurs de la fonction correspondant à ses positions successives se succéderont d'une manière continue, et, si la route suivie vient traverser OP, il faudra d'une part, d'après notre convention, que le point passe d'une surface dans l'autre, et d'autre part, pour la continuité, que l'on adopte précisément pour $\sqrt{z}$ la valeur relative à la surface nouvelle sur laquelle le point a passé. Les mêmes changements se faisant en même temps à chaque fois que la ligne OP est franchie, il y aura toujours harmonie entre la situation du point, celle des deux surfaces sur laquelle il se trouve et la valeur correspondante de la fonction.

357. Considérons en second lieu la fonction

$$u = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)},$$

a, b, c étant trois constantes correspondant aux points A, B, C du plan.

Nous supposerons encore deux plans superposés dont les points correspondants sont considérés comme entièrement séparés. On suppose de plus une ligne arbi-



traire allant de A en B, puis de B en C, et se prolongeant indéfiniment à partir de C. Commençons par étudier les valeurs de la fonction u, lorsque le point qui représente z parcourt un des deux plans sans franchir cette ligne ABCK. Comme il est impossible, en s'imposant cette restriction, de décrire un contour qui enve-

loppe un des points critiques A, B, C, les chemins possibles pour parvenir d'un point donné à un autre sont tous équivalents, et en prenant en un point arbitraire de l'un des deux plans une valeur déterminée de u et la valeur égale et de signe contraire pour le point superposé, on aura pour chaque point de chaque plan une valeur unique et déterminée de la fonction, les valeurs qui correspondent aux points superposés étant évidemment toujours inégales. Il est aisé de voir de plus, d'après les explications données (356), que, pour un même plan, les valeurs relatives à deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la ligne de séparation sont égales et de signes contraires sur AB, égales au contraire et de même signe sur BC, et égales et de signe contraire au delà de C. Si deux chemins partant de M conduisent par exemple, l'un en G, l'autre en G′ sans quitter l'un des plans, et par conséquent sans franchir ABCK, ils ne peuvent faire prendre à la fonction des valeurs infiniment voisines, car sans cela, en partant de M, suivant le premier contour pour arriver en G, puis passant directement en G′ et revenant en M par le second contour, on y retrouverait la valeur primitive, ce qui ne doit pas être puisque le contour fermé enveloppe le seul point critique A et l'enveloppe une seule fois. Des considérations toutes semblables montrent que la continuité n'est pas rompue le long de BC et qu'elle l'est au delà de C.

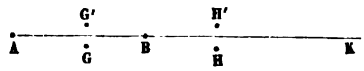
Nous admettrons d'après cela que nos deux plans sont réunis et comme soudés l'un à l'autre, en se croisant en quelque sorte le long des lignes AB et CK, de telle sorte qu'on ne puisse traverser une de ces lignes en se mouvant sur l'un des plans sans passer sur l'autre au moment où on la franchit. Grâce à cette convention, on peut considérer la fonction u comme représentée sur ce double plan, de telle façon qu'à chaque point de la double surface corresponde une valeur de u et une seule, et qu'un mouvement quelconque d'un point sur le plan, dans lequel il passe d'une surface à l'autre, quand nos conventions l'exigent, lui fasse trouver pour la fonction u une série de valeurs qui soient toujours celles qu'on doit adopter pour respecter la continuité.

358. La méthode de Riemann suppose, on le voit, que pour chaque fonction on détermine préalablement le nombre des valeurs dont elle est susceptible en chaque point, pour concevoir un nombre égal de feuilles superposées sur lesquelles on le représente, en établissant entre elles des soudures qui, lorsqu'on les rencontre, forcent à passer d'une feuille sur l'autre suivant des règles qu'il faut assigner chaque fois et dont l'étude de la fonction, faite suivant les principes de Cauchy, rendra la recherche facile.

Considérons par exemple la fonction

$$u = \sqrt[2]{\frac{z-a}{z-b}},$$

qui, pour chaque valeur de z, a trois valeurs distinctes u_1, αu_1, $\alpha^2 u_1$, α étant la racine cubique de l'unité; il faut, pour la représenter, concevoir trois feuillets superposés. Soient A et B les points qui correspondent à $z = a$ et $z = b$, et que Cauchy nomme les *points critiques;* on suppose une ligne ABK de direction et de forme arbitraire allant de A en B et s'étendant ensuite de B jusqu'à l'infini.



Si l'on s'interdit d'abord de franchir cette ligne, on ne pourra tourner autour d'aucun des deux points critiques; toutes les routes qui réunissent deux points sur une même feuille sont par conséquent équivalentes, et en se donnant par conséquent en trois points superposés choisis comme on voudra les valeurs u_0, αu_0, $\alpha^2 u_0$ que l'on veut adopter pour chacun d'eux, les valeurs correspondantes à un point quelconque de l'une quelconque des feuilles seront déterminées sans ambiguïté et, en chaque point, ces trois valeurs pourront être représentées dans le même ordre par u_1, αu_1, $\alpha^2 u_1$. Considérons deux points voisins G et G' situés de part et d'autre de AB et soient en G sur les trois feuilles u, αu, $\alpha^2 u$ les valeurs de la fonction u, les valeurs en G' devront, pour chaque surface, être multipliées par α et seront αu, $\alpha^2 u$ et u. Il est clair en effet qu'en partant du point initial G pour aller en G' sans traverser ABK, on tourne autour du point critique A (en négligeant l'espace infiniment petit GG'), et il est aisé de voir que cette rotation, que l'on peut remplacer par un cercle infiniment petit, décrit autour de A, multiplie par α la valeur de u. On verra de même que pour passer de H à H' il faut tourner autour des deux points critiques et que la fonction reprend la même valeur sur une même surface. La soudure doit donc être établie le long de AB seulement, et de telle sorte qu'en traversant AB on soit forcé de passer de la surface 1 à la surface 3, de la surface 3 à la surface 2, et *vice versâ*. Cela étant convenu, et à chaque point d'une même surface correspondant une seule valeur de u, la fonction sera complétement représentée, et en suivant un chemin quelconque à l'origine duquel correspond une valeur représentée sur celle des surfaces où l'on se trouve, on se trouvera toujours en chaque point sur celle des trois surfaces à laquelle est attachée la valeur convenable de la fonction.

359. Lorsqu'une fonction se trouve ainsi représentée sans ambiguïté à l'aide des feuilles superposées de Riemann et des soudures suivant lesquelles elles se croisent et se réunissent mutuellement, la fonction peut être considérée comme n'ayant plus qu'une seule valeur, et il n'en correspond en effet qu'une seule à chaque point de l'ensemble des feuilles sur lesquelles elle est représentée. L'intégration dans ce cas peut cependant ramener les valeurs multiples et une ambiguïté

nouvelle que Riemann fait disparaître par une décomposition ingénieuse de surfaces qui forme un des points essentiels de sa théorie.

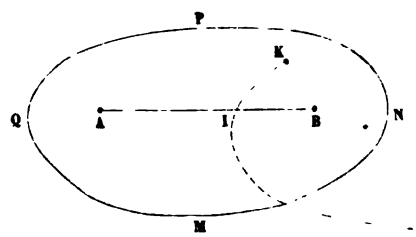
Il faut d'abord établir un lemme important sur lequel la méthode est fondée.

On a vu (335) que si une fonction $\varphi(z)$ est continue, finie et bien déterminée ainsi que la dérivée pour les valeurs de z qui correspondent aux points intérieurs à un contour fermé, l'intégrale

$$\int \varphi(z)\,dz,$$

prise tout autour de ce contour est égale à zéro. Le théorème est vrai pour un contour tracé sur les feuillets juxtaposés de Riemann et pouvant appartenir à plusieurs feuilles différentes, pourvu qu'il contienne dans son intérieur une portion finie et déterminée de surface, telle que par aucune route suivie conformément aux conventions adoptées sur la manière de passer d'une surface à l'autre, un point placé dans l'intérieur ne puisse en sortir sans traverser le contour. Cette condition demande qu'on l'éclaircisse par un exemple.

Supposons que la fonction considérée soit $\sqrt{1-z^2}$; elle sera représentée, sur deux feuilles réunies et croisées suivant la ligne AB qui joint le point critique -1 au point critique $+1$.



Le contour MNPQ situé sur l'une des deux feuilles ne doit pas être considéré comme fermé parce que, en partant du point K situé dans son intérieur, on peut aller trouver la soudure AB en un point I, la traverser, passer sur l'autre feuille et s'éloigner indéfiniment sans rencontrer MNPQ.

La démonstration du théorème est toute semblable à celle qui a été donnée (335). Soit

$$\varphi(z) = P + Q\sqrt{-1}$$

et

$$\varphi(z)\,dz = (P + Q\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}) = P\,dx - Q\,dy + \sqrt{-1}(Q\,dx + P\,dy);$$

les intégrales

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx}\right), \quad \int\int dx\,dy\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dx}\right)$$

étendues à tous les éléments de la surface considérée sont évidemment nulles,

puisque (I, 364) l'on a

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = 0,$$
$$\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dx} = 0.$$

Mais en partageant la surface en bandes parallèles à l'axe des X correspondant sur les divers feuillets aux valeurs de y convenables pour qu'aucun élément ne soit oublié, on aura, en nommant sur l'un des feuillets k_1, k_2, k_3, k_4 les intersections de l'une de ces bandes, soit avec la portion de contour qui y est située, soit avec les soudures,

$$\int\int \frac{dQ}{dx}\,dx\,dy = \int dy \int \frac{dQ}{dx}\,dx = \int dy\,(Q_4 - Q_3 + Q_2 - Q_1),$$

et, en laissant de côté les éléments qui se rapportent aux points situés dans les soudures, cette intégrale (335) équivaut à $\int Q\,dy$ étendue au contour entier. Quant aux éléments négligés, ils se détruisent deux à deux, car chaque point de soudure se trouvant à la réunion des deux feuillets, s'il termine la portion de parallèle à l'axe des X située sur l'un des feuillets dans l'intérieur de la ligne considérée il sera le point de départ de celle qui appartient à l'autre feuillet, et les deux éléments relatifs à ce point figureront par conséquent avec des signes contraires. Quant à la valeur de Q, elle est la même sur les deux feuillets des deux côtés de la soudure qui a été établie précisément pour que cette condition soit remplie relativement à la fonction $\varphi(z)$ ou $P + Q\sqrt{-1}$.

La même démonstration s'appliquera comme (335) aux trois intégrales

$$\int\int \frac{dP}{dy}\,dx\,dy, \quad \int\int \frac{dQ}{dy}\,dx\,dy, \quad \int\int \frac{dP}{dx}\,dx\,dy,$$

et l'on verra que l'expression

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx}\right) + \sqrt{-1}\int\int dx\,dy\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dx}\right)$$

peut se réduire à

$$\int (P\,dx - Q\,dy) + \sqrt{-1}\int (P\,dy + Q\,dx) = \int \varphi(z)\,dz,$$

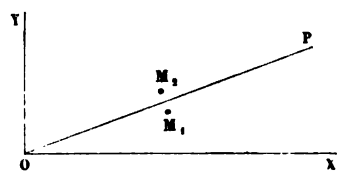
étendue au contour entier et que cette intégrale, comme nous l'avions annoncé, a par conséquent une valeur nulle.

360. Si deux points A et B situés sur un même feuillet ou sur des feuillets différents sont réunis par deux chemins différents, formant à eux deux un contour

fermé comprenant entre eux une portion déterminée et finie de surface, l'intégrale relative à ce contour sera nulle, et par conséquent on verra comme (336) que l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ a la même valeur pour les deux chemins.

Cela posé, la méthode de Riemann consiste à établir sur l'ensemble des feuillets des coupures ou barrières infranchissables et telles, qu'en les respectant deux chemins quelconques qui réunissent entre eux deux points donnés forment un contour fermé contenant dans son intérieur une portion finie de surface. L'intégrale $\int_x^z \varphi(z)\,dz$ devient alors complétement déterminée et a, pour chaque valeur de z, une valeur unique.

Considérons par exemple la fonction $\frac{1}{z}$. On sait que l'intégrale $\int_1^z \frac{dz}{z}$ est mal déterminée et admet, lorsque z est donné, une infinité de valeurs différentes. Ces valeurs multiples, comme nous l'avons exposé, sont dans l'essence de la fonction logarithmique, et il ne faut pas songer à les faire disparaître : Riemann parvient seulement à les séparer nettement les unes des autres. Concevons pour cela, dans le plan unique dont les points représentent les valeurs de z, une *coupure* OP partant du

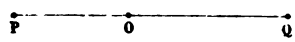


point O et s'étendant indéfiniment dans un seul sens et dans une direction d'ailleurs arbitraire. Cette coupure sera considérée comme infranchissable, de telle sorte que les points M_1 et M_2, quelque rapprochés qu'ils soient géométriquement, ne seront plus considérés comme voisins et qu'aucun chemin ne pourra plus traverser OP.

Aucun chemin dès lors ne pourra envelopper le point O, et l'intégrale $\int_1^z \frac{dz}{z}$ aura en chaque point du plan une valeur unique et déterminée. Cette valeur sera différente pour les points M_1 et M_2, ce qui n'empêche pas la continuité, puisque ces points ne sont plus voisins. Il résulte des explications données (337) que la différence de ces valeurs, égale à l'intégrale prise le long d'un contour qui, partant du point M_1, aboutit en M_2 sans avoir franchi la coupure, est $2\pi\sqrt{-1}$. L'interdiction de franchir la coupure ayant d'ailleurs été imposée arbitrairement, on peut considérer ensuite les intégrales relatives à des contours quelconques qui en sont affranchis, et l'on voit aisément qu'à chaque fois qu'on la traverse il faut ajouter ou retrancher $2\pi\sqrt{-1}$ au résultat que l'on aurait obtenu si depuis le dernier pas-

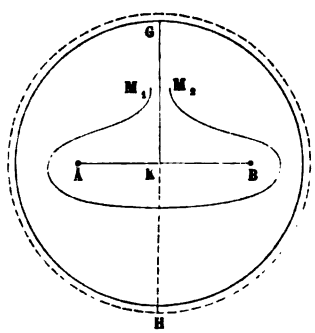
sage on l'eût constamment respectée. La fonction lz peut de cette manière être augmentée, pour une même valeur de z, d'un multiple quelconque de $2\pi\sqrt{-1}$.

361. Considérons en second lieu la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, représentée, suivant la méthode de Riemann, sur une double feuille dont les deux parties sont soudées suivant la ligne PQ qui joint les deux points qui correspondent aux valeurs $z=1$, $z=-1$, de telle sorte qu'on ne puisse traverser cette ligne sans passer d'une feuille sur l'autre.



L'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ n'est pas déterminée, et en un point donné de l'une des deux feuilles, quoique le radical $\sqrt{1-z^2}$ n'ait plus rien d'arbitraire, l'intégrale dépend du contour suivi pour la calculer. Deux contours partant de O et aboutissant en un même point de la même feuille ne renfermeront pas en effet (359) une portion déterminée de surface. C'est encore à l'aide d'une coupure que Riemann ramène l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ à avoir une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z correspondant à un point donné de l'une des feuilles.

Convenons de dessiner en traits pleins les lignes tracées sur la feuille supérieure et de ponctuer celles qui appartiennent à la feuille inférieure. Supposons qu'un



cercle, dont les dimensions doivent croître indéfiniment, limite sur l'une et l'autre feuille les points que nous voulons considérer. Riemann suppose dans l'ensemble des deux feuilles une coupure représentée sur la figure par GKH, GK séparant les deux parties de la feuille supérieure par une barrière infranchissable, et HK remplissant le même rôle sur la feuille inférieure; il devient impossible, en respectant cette coupure, de tracer sur les deux surfaces un contour fermé qui ne renferme

pas dans son intérieur une portion déterminée du double plan, et le long duquel par conséquent l'intégrale ne soit pas nulle. La fonction $\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ acquiert alors une valeur déterminée et, quelles que soient les deux routes suivies sur la double feuille, en respectant la coupure, pour unir le point 1 au point z, les deux intégrales auront la même valeur puisque l'intégrale prise le long du contour, qui est nulle, est égale à leur différence. Les points tels que M_1 et M_2 situés de part et d'autre de la coupure, quelque rapprochés qu'ils soient géométriquement sur la même feuille, ne sont plus considérés comme infiniment voisins, et l'intégrale qui se rapporte au point M_1 est autre que celle qui se rapporte au point M_2. Leur différence est évidemment l'intégrale prise le long d'un contour qui partant de M_1 aboutit en M_2 sans franchir les coupures, comme serait par exemple M_1RM_2; l'intégrale prise le long d'un tel chemin est (354) égale à 2π, et les valeurs de l'intégrale en M_1 et en M_2 diffèrent de 2π, en sorte que si l'on supprime les restrictions, on doit ajouter à l'intégrale autant de fois 2π que la coupure GK aura été franchie de fois.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie de Riemann qui, nous devons le dire, a servi déjà de base à de très-importantes recherches. La notion des contours élémentaires nous paraît présenter plus de netteté, et le choix seul et la justification du système de coupures à adopter dans chaque cas peuvent présenter des difficultés laissées jusqu'ici à la charge de celui qui voudra tenter une application nouvelle.

CHAPITRE XII.

CALCUL NUMÉRIQUE DE LA VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

Méthode des trapèzes.

362. Lorsqu'il n'est pas possible de déterminer exactement la valeur d'une intégrale définie, on doit recourir à des méthodes d'approximation pour en calculer la valeur approchée. C'est à l'exposition de ces méthodes que nous consacrons ce chapitre.

Une intégrale définie

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

représente l'aire comprise entre l'axe des y, la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = \varphi(x)$, et les ordonnées qui correspondent aux abscisses a et b. Pour évaluer cette aire approximativement, on peut d'abord substituer à la courbe un polygone inscrit et remplacer la surface cherchée par une somme de trapèzes.

Supposons que l'on partage l'intervalle $b - a$ en n parties égales, et que par les points de division on élève les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$; la somme des trapèzes, dont les ordonnées sont les côtés, sera, en nommant y_0 et y_n les deux ordonnées extrêmes,

$$(1) \qquad \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n),$$

et cette formule donnera une valeur d'autant plus approchée que le nombre n sera plus grand.

Méthode d'interpolation de Cotes.

363. La connaissance des ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ permet, en général, d'obtenir un résultat plus approché que le précédent. En substituant à la fonction $\varphi(x)$ une fonction entière de x qui coïncide avec elle pour toutes les valeurs calculées, ces valeurs étant au nombre de $n + 1$, la fonction nouvelle sera de degré n. On

l'intégrera aisément; et si n est suffisamment grand, l'erreur commise sera le plus souvent extrêmement petite.

Les calculs auxquels donne lieu la méthode précédente peuvent être notablement simplifiés par la détermination préalable des résultats communs à tous les cas et leur réduction en formule.

On peut d'abord, quelle que soit l'intégrale, ramener les limites aux valeurs fixes zéro et 1. Soit, en effet,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

En posant

$$x = a + t(b - a),$$

aux limites a et b de x correspondront les limites zéro et 1 de t.

Cette transformation n'est pas applicable, il est vrai, quand l'une des limites est infinie, mais on peut la remplacer par une infinité d'autres qui conduiront au même but. Si l'intégrale proposée est

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

on pourra poser $e^{-x} = y$, et aux limites zéro et ∞ de x correspondent les limites 1 et zéro de y. S'il s'agit d'une intégrale de la forme

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\,dx,$$

on pourra la partager en deux autres

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\,dx + \int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

puis poser dans la première $e^x = y$, et dans la seconde $e^{-x} = z$.

Occupons-nous donc seulement de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les valeurs que prend la fonction $f(x)$ quand on y suppose $x = 0$, $x = \frac{1}{n}$, $x = \frac{2}{n}, \ldots, x = \frac{n-1}{n}$, $x = 1$.

Si l'on pose

$$X_p = \frac{nx(nx-1)\ldots(nx-n)}{nx-p},$$

et que M_p désigne la valeur que prend X_p pour $x = \frac{p}{n}$, la fonction entière et de degré n

$$\sum_{p=0}^{p=n} y_p \frac{X_p}{M_p} = \psi(x)$$

se réduira évidemment à y_p pour la valeur $x = \frac{p}{n}$, et elle pourra, par conséquent, dans l'intervalle considéré, remplacer la fonction $f(x)$ avec laquelle elle a $n+1$ valeurs communes.

X_p et M_p étant, pour chaque valeur de n et de p, indépendants de la forme de la fonction $\varphi(x)$, on peut calculer à l'avance l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{X_p}{M_p} dx = A_p,$$

et l'on aura alors

$$(2) \qquad \int_0^1 \psi(x)\, dx = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \ldots + A_n y_n,$$

et la méthode se réduit, par conséquent, à multiplier les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ par des facteurs numériques calculés à l'avance et qui sont les mêmes dans tous les cas.

Ces valeurs sont les suivantes :

Pour $n = 1$,

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{2};$$

pour $n = 2$,

$$A_0 = A_2 = \frac{1}{6}, \quad A_1 = \frac{2}{3};$$

pour $n = 3$,

$$A_0 = A_3 = \frac{1}{8}, \quad A_1 = A_2 = \frac{3}{8};$$

pour $n = 4$,

$$A_0 = A_4 = \frac{7}{90}, \quad A_1 = A_3 = \frac{16}{45}, \quad A_2 = \frac{2}{15};$$

pour $n = 5$,

$$A_0 = A_5 = \frac{19}{288}, \quad A_1 = A_4 = \frac{25}{96}, \quad A_2 = A_3 = \frac{25}{144};$$

pour $n = 6$,

$$A_0 = A_6 = \frac{41}{840}, \quad A_1 = A_5 = \frac{9}{35}, \quad A_2 = A_4 = \frac{9}{280}, \quad A_3 = \frac{34}{105};$$

pour $n = 7$,

$$A_0 = A_7 = \frac{751}{17280}, \quad A_1 = A_6 = \frac{3577}{17280}, \quad A_2 = A_5 = \frac{49}{640}, \quad A_3 = A_4 = \frac{2089}{17280};$$

pour $n = 8$,

$$A_0 = A_8 = \frac{989}{28350}, \quad A_1 = A_7 = \frac{2944}{14175}, \quad A_2 = A_6 = -\frac{464}{14175},$$
$$A_3 = A_5 = \frac{5248}{14175}, \quad A_4 = -\frac{454}{2835};$$

pour $n = 9$,

$$A_0 = A_9 = \frac{2857}{89500}, \quad A_1 = A_8 = \frac{15741}{89600}, \quad A_2 = A_7 = \frac{27}{2240},$$
$$A_3 = A_6 = \frac{1209}{5600}, \quad A_4 = A_5 = \frac{2889}{44800};$$

pour $n = 10$,

$$A_0 = A_{10} = \frac{16067}{598752}, \quad A_1 = A_9 = \frac{26575}{149688}, \quad A_2 = A_8 = -\frac{16175}{199584},$$
$$A_3 = A_7 = \frac{5675}{12474}, \quad A_4 = A_6 = -\frac{4825}{11088}, \quad A_5 = \frac{17807}{24948}.$$

364. Pour donner une application de la méthode précédente, considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l2 = 0{,}69314\,718056;$$

la valeur connue du résultat à obtenir nous apprendra le degré d'approximation.

Appliquons d'abord la méthode des trapèzes. On a, en supposant $n = 10$,

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{10}\right) = 0{,}90909, \quad \varphi\left(\frac{2}{10}\right) = 0{,}83333, \quad \varphi\left(\frac{3}{10}\right) = 0{,}76923,$$
$$\varphi\left(\frac{4}{10}\right) = 0{,}71429, \quad \varphi\left(\frac{5}{10}\right) = 0{,}66667, \quad \varphi\left(\frac{6}{10}\right) = 0{,}625,$$
$$\varphi\left(\frac{7}{10}\right) = 0{,}58824, \quad \varphi\left(\frac{8}{10}\right) = 0{,}55556, \quad \varphi\left(\frac{9}{10}\right) = 0{,}52632, \quad \varphi(1) = 0{,}5;$$

et en appliquant la formule (1), on trouve pour valeur de l'intégrale

$$0{,}69377.$$

L'erreur porte, on le voit, sur la quatrième décimale.

La méthode de Cotes donne, pour la même hypothèse $n = 10$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69314733,$$

et l'erreur ne commence plus qu'à la septième décimale.

365. Prenons pour second exemple l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2 = 0,2721982.$$

En appliquant la méthode des trapèzes dans l'hypothèse de $n = 10$, on trouve pour valeur approchée

$$0,2712837,$$

et l'erreur commence à la troisième décimale.

Si l'on emploie la méthode de Cotes, en faisant seulement $n = 5$, on a

$$\begin{array}{ll}
\varphi(0) = 0, & A_0\,\varphi(0) = 0, \\
\varphi\left(\frac{1}{5}\right) = 0,1753092, & A_1\,\varphi\left(\frac{1}{5}\right) = 0,0456534, \\
\varphi\left(\frac{2}{5}\right) = 0,2900623, & A_2\,\varphi\left(\frac{2}{5}\right) = 0,0503580, \\
\varphi\left(\frac{3}{5}\right) = 0,3455909, & A_3\,\varphi\left(\frac{3}{5}\right) = 0,0599984, \\
\varphi\left(\frac{4}{5}\right) = 0,3584065, & A_4\,\varphi\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0933350, \\
\varphi(1) = 0,3465736, & A_5\,\varphi(1) = 0,0228642, \\
 & \overline{0,2722091,}
\end{array}$$

avec trois décimales exactes.

366. On peut d'ailleurs indiquer d'une manière générale l'ordre de grandeur de l'erreur commise dans chaque cas.

Supposons, en effet, que la fonction $\varphi(x)$ soit développable en série convergente

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots.$$

Si l'on calcule les valeurs de $\varphi(x)$ correspondantes à $x = 0$, $x = \frac{1}{n}, \ldots, x = \frac{n-1}{n}$, $x = 1$, et qu'on applique ensuite la méthode de Cotes à la détermination de l'in-

tégrale

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

le résultat sera évidemment le même que si l'on avait appliqué successivement cette méthode à chacune des intégrales

$$\int_0^1 a_0\,dx,\quad \int_0^1 a_1 x\,dx,\ldots,\quad \int_0^1 \alpha_n x^n\,dx,\quad \int_0^1 a_{n+1} x^{n+1}\,dx,\ldots,$$

pour ajouter ensuite les résultats obtenus. Or les $n+1$ premières intégrales seront ainsi calculées sans aucune erreur. On sait en effet que la méthode d'interpolation au moyen de laquelle on substitue à une fonction donnée un polynôme de degré n donne identiquement la fonction proposée elle-même toutes les fois que celle-ci est entière et de degré inférieur à $n+1$; l'erreur commise sera donc la somme des erreurs commises dans l'évaluation des intégrales

$$\int_0^1 a_{n+1} x^{n+1}\,dx,\quad \int_0^1 a_{n+2} x^{n+2}\,dx,\ldots,$$

et elles sont respectivement égales aux produits des coefficients a_{n+1}, a_{n+2},... par des nombres invariables que l'on peut calculer une fois pour toutes. Soit ε_p l'erreur commise dans l'évaluation de $\int_0^1 x^{n+1}\,dx$, on trouve

pour $n=1$,

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{6},\quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{4},\quad \varepsilon_4 = -\frac{3}{10};$$

pour $n=2$,

$$\varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{120},\quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{48};$$

pour $n=3$,

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{270},\quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{108};$$

pour $n=4$,

$$\varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2688},\quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{768};$$

pour $n=5$,

$$\varepsilon_1 = -\frac{11}{52500},\quad \varepsilon_2 = -\frac{11}{15000};$$

pour $n=6$,

$$\varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{38880},\quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{8640};$$

pour $n = 7$,

$$\varepsilon_1 = \frac{167}{10588410}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{167}{2352980};$$

pour $n = 8$,

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = -\frac{37}{17301504}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{37}{3145728};$$

pour $n = 9$,

$$\varepsilon_1 = -\frac{865}{631351908}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{865}{114791250};$$

pour $n = 10$,

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = -\frac{260927}{136500000000}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{260927}{21000000000}.$$

Si l'on suppose

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$$

l'erreur commise pour $n = 10$ sera la somme des erreurs commises sur les intégrales des termes $-x^{11}$, $+x^{12}$, $-x^{13}$, ... Les trois premiers termes sont

$$0, \quad -\frac{260927}{136500000000}, \quad -\frac{260927}{21000000000};$$

leur somme est

$$0,00001262,$$

qui surpasse l'erreur totale du septième environ de sa valeur.

Formule de Simpson.

367. Lorsque l'on suppose $n = 1$, c'est-à-dire quand on se contente de calculer l'ordonnée y_1 correspondant à $n = \frac{1}{2}$, les deux ordonnées extrêmes étant désignées par y_0 et y_2, la formule de Cotes devient

$$(3) \qquad \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{y_0}{6} + \frac{2}{3}y_1 + \frac{y_2}{6} = \frac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Cette formule s'étend aisément au cas où les limites sont quelconques, et l'on en déduit

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

y_0, y_1 et y_2 désignant les valeurs de $\varphi(x)$ correspondantes à $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$ et $x = b$: il suffit en effet, comme on l'a dit (363), pour réduire la formule (3) à la forme (4), de poser

$$x = a + (b - a)t,$$

et alors aux valeurs zéro, $\frac{1}{2}$ et 1 de t, correspondent les valeurs a, $\frac{a+b}{2}$ et b de x.

Mais la formule approchée (4) est d'autant plus exacte évidemment que l'intervalle $b - a$ est plus petit, et c'est pour cette raison qu'avant d'en faire usage il est bon de partager l'intégrale en plusieurs autres à chacune desquelles on l'appliquera successivement.

Soit l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

On a, n désignant un nombre entier,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x)\,dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} \varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} \varphi(x)\,dx,$$

et en appliquant à chacune de ces intégrales la formule (4), après avoir préalablement calculé, comme elle l'exige, les valeurs de la fonction qui correspondent aux abscisses $\frac{1}{2n}$, $\frac{3}{2n}$, ..., $\frac{2n-1}{2n}$, on trouvera, après des réductions évidentes, en nommant y_k la valeur de la fonction correspondant à $x = \frac{k}{2n}$,

$$(5) \qquad \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{6n}\left[4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_0 + y_2 + \ldots + y_{2n}) - y_0 - y_{2n}\right].$$

368. Appliquons cette formule à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2 = 0{,}2721982613.$$

On a, en supposant $n = 10$,

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0{,}0943665147,\\
y_3 &= 0{,}2407011601,\\
y_5 &= 0{,}3243720865,\\
y_7 &= 0{,}3561263430,\\
y_9 &= 0{,}3546154067,\\
\hline
&\ 1{,}3701815110,
\end{aligned}$$

et

$$4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)=5,4807260440;$$

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_2 &= 0,1753091892, \\ y_4 &= 0,2900622730, \\ y_6 &= 0,3455909039, \\ y_8 &= 0,3584065029, \\ y_{10} &= 0,3465735903, \\ \hline & \ 1,5159424593, \end{aligned}$$

et

$$2(y_0+y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})=3,0318849186;$$

d'ailleurs

$$y_0+y_{10}=y_{10}=0,3465735903,$$

et la formule (5) donnera

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = 0,2722012457$$

avec trois chiffres exacts seulement, c'est-à-dire le même nombre que par l'emploi de la formule de Cotes, lorsqu'en y supposant $n=5$, on a à calculer un nombre moitié moindre d'ordonnées. Les multiplicateurs, il est vrai, sont plus simples dans la formule de Simpson; mais il est rare que cet avantage compense l'inconvénient d'une moindre exactitude ou, ce qui revient au même, la nécessité d'accroître le nombre des ordonnées pour obtenir une approximation suffisante.

Méthode de Gauss.

369. Gauss a remarqué fort ingénieusement qu'il y a avantage à substituer aux ordonnées équidistantes considérées par Cotes des ordonnées dont les abscisses se succèdent suivant une loi qu'il a fait connaître et qui, dans le plus grand nombre de cas, assure, pour un même nombre d'ordonnées, une approximation beaucoup plus grande.

Considérons une intégrale de la forme

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

à laquelle on peut, comme on l'a vu (363), ramener toute intégrale prise entre

deux limites finies a et b. Soit

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots.$$

Supposons que l'on calcule $n+1$ valeurs de $\varphi(x)$ correspondant aux abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$ comprises entre zéro et l'unité, et que l'on substitue ensuite à $\varphi(x)$ la fonction entière de degré n qui coïncide avec elle pour ces valeurs choisies de la variable, l'erreur commise sera nulle, quels que soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, si la fonction $\varphi(x)$ se réduit à un polynôme entier de degré inférieur à $n+1$. Gauss se propose de choisir ces abscisses de telle sorte que le degré du polynôme puisse s'élever jusqu'à $2n$ sans que l'erreur cesse d'être nulle, et si alors la fonction $\varphi(x)$ est représentée par une série convergente en la concevant comme composée de deux parties, les $2n+1$ premiers termes d'une part, et la somme de tous les autres d'autre part, c'est sur l'intégrale de la seconde que portera l'erreur, qui sans cela aurait été commise à partir du $(n+1)^{ième}$ terme.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les abscisses qui remplissent les conditions énoncées, et

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

En nommant $f(x)$ un polynôme de degré inférieur à $2n+1$, Q le quotient de la division de ce polynôme par $\psi(x)$ et R le reste, Q étant un polynôme de degré $n-1$ et R un polynôme de degré n au plus, on aura

$$f(x) = Q\psi(x) + R.$$

Or la méthode d'interpolation revient dans ce cas à remplacer $f(x)$ par le polynôme R qui lui est évidemment égal pour les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de x qui annulent $\psi(x)$, l'erreur commise est donc

$$\int_0^1 Q\psi(x)\,dx,$$

et pour être assuré que cette erreur est nulle, il suffit de déterminer $\psi(x)$ par les conditions

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 x\psi(x)\,dx = 0, \ldots, \quad \int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\,dx = 0.$$

On y satisfait en prenant

$$\psi(x) = \frac{d^{n+1} x^{n+1}(x-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}.$$

On a en effet, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int x^p \psi(x)\,dx &= x^p \int \psi(x)\,dx - p\int x^{p-1}dx \int \psi(x)\,dx \\ &= x^p \int \psi(x)\,dx - px^{p-1}\int dx \int \psi(x)\,dx + p(p-1)\int x^{p-2}dx \int dx \int \psi(x)\,dx \\ &= x^p \int \psi(x)\,dx - px^{p-1}\int dx \int \psi(x)\,dx + p(p-1)x^{p-2}\int dx \int dx \int \psi(x)\,dx \\ &\quad - p(p-1)(p-2)\int x^{p-3}dx \int dx \int dx \int \psi(x)\,dx :\end{aligned}$$

la loi est évidente; en continuant jusqu'à épuiser l'exposant de x, et en représentant, pour abréger, par

$$\int^k \psi(x)\,dx^k$$

l'intégration k fois répétée $\int dx \int dx \int \cdots \psi(x)\,dx$, on a

$$\begin{aligned}\int x^p \psi(x)\,dx = x^p \int \psi(x)\,dx - px^{p-1}\int^2 \psi(x)\,dx^2 + p(p-1)\,x^{p-2}\int^3 \psi(x)\,dx^3 + \ldots \\ \pm 1.2.3\ldots p\int^{p+1} \psi(x)\,dx^{p+1}.\end{aligned}$$

Mais $p+1$ étant au plus égal à n, toutes les intégrales indiquées peuvent s'effectuer, car $\psi(x)$ est une dérivée $(n+1)^{ième}$, et donnent pour résultat des polynômes qui, contenant à chaque terme un facteur x et un facteur $1-x$ au moins, sont tous nuls aux deux limites; on a, par conséquent, comme il a été annoncé,

$$\int_0^1 x^p \psi(x)\,dx = 0.$$

Toutes les racines de l'équation

$$x^{n+1}(1-x)^{n+1} = 0 \tag{6}$$

sont réelles, $n+1$ d'entre elles égales à zéro, et les $n+1$ autres égales à l'unité, et, par conséquent, d'après un théorème très-connu d'algèbre, toutes les racines des dérivées successives, et en particulier celles de la $(n+1)^{ième}$, sont réelles aussi et comprises entre zéro et 1.

La forme de l'équation (6) montre que les racines de l'équation $\psi(x) = 0$ ont deux à deux pour somme l'unité, et, quand leur nombre est impair, l'une d'elles par conséquent est égale à $\frac{1}{2}$.

En adoptant ces valeurs pour $x_0, x_1, \ldots, x_n$, l'intégrale proposée será remplacée par

$$\int_0^1 \mathrm{R}\,dx,$$

R, étant un polynôme de degré n qui devient égal à $\varphi(x)$ pour les valeurs x_0, $x_1, \ldots, x_n$ de la variable, est déterminé par cette condition et égal à

$$\sum_0^n \frac{\varphi(x_p)}{\mathrm{T}_p} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{x-x_p},$$

qui la remplit évidemment si l'on prend

$$\mathrm{T}_p = (x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1})\ldots(x_p - x_n).$$

La valeur approchée de $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ prend d'après cela la forme

$$7) \qquad \int_0^1 \mathrm{R}\,dx = \mathrm{A}_0\varphi(x_0) + \mathrm{A}_1\varphi(x_1) + \ldots + \mathrm{A}_n\varphi(x_n).$$

Nous donnons ici les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et les logarithmes des facteurs correspondants pour les cinq premières valeurs de n :

Pour $n = 0$,

$x_0 = 0{,}5$	$\mathrm{A}_0 = 1$	

Pour $n = 1$,

$x_0 = 0{,}2113\ 2487$	$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_1 = 0{,}5$	$\log = 9{,}698\ 9700$
$x_1 = 0{,}7886\ 7513$		

Pour $n = 2$,

$x_0 = 0{,}1127\ 0165$	$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_2 = \frac{5}{18}$	$\log = 9{,}443\ 6975$
$x_1 = 0{,}5$	$\mathrm{A}_1 = \frac{4}{9}$	$\log = 9{,}647\ 8175$
$x_2 = 0{,}8872\ 9835$		

Pour $n = 3$,

$x_0 = 0{,}0694\ 3184$	$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_3 = 0{,}173\ 9274$	$\log = 9{,}240\ 3681$
$x_1 = 0{,}3300\ 0948$	$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = 0{,}326\ 0726$	$\log = 9{,}513\ 3143$
$x_2 = 0{,}6699\ 9052$		
$x_3 = 0{,}9305\ 6816$		

Pour $n = 4$,

$x_0 = 0{,}0469\ 1008$	$A_0 = A_4 = 0{,}118\ 4634$	$\log = 9{,}073\ 5834$
$x_1 = 0{,}2307\ 6534$	$A_1 = A_3 = 0{,}239\ 3143$	$\log = 9{,}378\ 9687$
$x_2 = 0{,}5$	$A_2 = 0{,}284\ 4444$	$\log = 9{,}453\ 9975$
$x_3 = 0{,}7692\ 3466$		
$x_4 = 0{,}9530\ 8992$		

Pour $n = 5$,

$x_0 = 0{,}0337\ 6524$	$A_0 = A_5 = 0{,}085\ 6622$	$\log = 8{,}932\ 7895$
$x_1 = 0{,}1693\ 9531$	$A_1 = A_4 = 0{,}180\ 3808$	$\log = 9{,}256\ 1903$
$x_2 = 0{,}3806\ 9041$	$A_2 = A_3 = 0{,}233\ 9570$	$\log = 9{,}369\ 1360$
$x_3 = 0{,}6193\ 0959$		
$x_4 = 0{,}8306\ 0469$		
$x_5 = 0{,}9662\ 3476$		

370. Appliquons la méthode de Gauss à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l2 = 0{,}69314\ 718056.$$

Voici, en supposant $n = 4$, le détail du calcul :

$$\begin{aligned} \log\varphi(x_0) &= 9{,}980\ 09062 \\ \log A_0 &= \underline{9{,}073\ 58435} \\ &\ 9{,}053\ 67497 \\ A_0\varphi(x_0) &= 0{,}1131\ 5532 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\varphi(x_1) &= 9{,}909\ 8247 \\ \log A_1 &= \underline{9{,}378\ 9689} \\ &\ 9{,}288\ 7934 \\ A_1\varphi(x_1) &= 0{,}1944\ 4350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\varphi(x_2) &= 9{,}823\ 908741 \\ \log A_2 &= \underline{9{,}453\ 997456} \\ &\ 9{,}277\ 906197 \\ A_2\varphi(x_2) &= 0{,}1896\ 2965 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\varphi(x_3) &= 9{,}752\ 2146 \\ \log A_3 &= \underline{9{,}378\ 9687} \\ &\ 9{,}131\ 1833 \\ A_3\varphi(x_3) &= 0{,}1352\ 6433 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\varphi(x_4) &= 9{,}709\ 2778 \\ \log A_4 &= \underline{9{,}073\ 5843} \\ &\ 0{,}782\ 8621 \\ A_4\varphi(x_4) &= 0{,}0606\ 54375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0{,}1131\ 5532 \\ &0{,}1944\ 4350 \\ &0{,}1896\ 2965 \\ &0{,}1352\ 6433 \\ &\underline{0{,}0606\ 5438} \\ \int_0^1 &= 0{,}6931\ 4718 \end{aligned}$$

371. Prenons pour second exemple l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2 = 0{,}27219\ 82612\ 87950,$$

et soit $n = 4$, on aura $\varphi = \frac{\log(1+x)}{1+x^2}$ et

$x = 0{,}0469\ 1008$	$x_1 = 0{,}2307\ 6534$	$x_2 = 0{,}5$
$\log\varphi(x) = 8{,}660\ 3188$	$\log\varphi(x_1) = 9{,}294\ 7709$	$\log\varphi(x_2) = 9{,}511\ 0435$
$\log A = 9{,}073\ 5843$	$\log A_1 = 9{,}378\ 9687$	$\log A_2 = 9{,}453\ 9975$
$7{,}733\ 9031$	$8{,}673\ 7396$	$8{,}965\ 0410$
$A\varphi(x) = 0{,}0054\ 1880$	$A_1\varphi(x_1) = 0{,}0471\ 7801$	$A_2\varphi(x_2) = 0{,}0922\ 6580$

$x_3 = 0{,}7692\ 3466$	$x_4 = 0{,}9530\ 8992$	$0{,}0054\ 1880$
$\log\varphi(x_3) = 9{,}554\ 4240$	$\log\varphi(x_4) = 9{,}545\ 0289$	$0{,}0471\ 1801$
$\log A_3 = 9{,}378\ 9687$	$\log A_4 = 9{,}073\ 5843$	$0{,}0922\ 6584$
$8{,}933\ 3927$	$8{,}618\ 6132$	$0{,}0857\ 8132$
$A_3\varphi(x_3) = 0{,}0857\ 8132$	$A_4\varphi(x_4) = 0{,}0415\ 5404$	$0{,}0415\ 5404$
		$0{,}2711\ 9801$

Par conséquent $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = 0{,}2721\ 9801$, exact aux six premières décimales.

Formule d'Euler.

372. Nous avons donné (I, 333) une série due à Maclaurin dont Euler a déduit une formule élégante et souvent employée pour le calcul approché des intégrales définies.

On a, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$,

$$(8)\quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h}{2}[\varphi'(x+h) - \varphi'(x)] - \frac{h^2}{12}[\varphi''(x+h - \varphi''(x)]$$
$$+ \frac{h^4}{720}[\varphi^{\text{IV}}(x+h) - \varphi^{\text{IV}}(x)] + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_n h^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}[\varphi^{2n}(x+h) - \varphi^{2n}(x)] + \ldots,$$

B_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Mais cette formule ayant été déduite de la méthode des coefficients indéterminés, les conditions de convergence et d'exactitude ont été absolument laissées de côté, il est donc indispensable d'en donner une démonstration plus rigoureuse et plus précise.

Nous commencerons par démontrer de nouveau la formule de Taylor, en donnant à l'expression du reste une forme nouvelle.

On a identiquement, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$,

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_x^{x+h}\varphi'(z)\,dz,$$

et en posant $z=x+h-u$

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_0^h\varphi'(x+h-u)\,du.$$

En intégrant par parties et faisant successivement porter l'intégration sur du, $u\,du$, $u^2\,du,\ldots$, on trouve

$$\int_0^h\varphi'(x+h-u)\,du=h\varphi'(x)+\int_0^h u\varphi''(x+h-u)\,du,$$

$$\int_0^h u\varphi''(x+h-u)\,du=\frac{h^2}{2}\varphi''(x)+\int_0^h\frac{u^2}{2}\varphi'''(x+h-u)\,du,$$

$$\int_0^h\frac{u^2}{2}\varphi'''(x+h-u)\,du=\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\int_0^h\frac{u^3}{2.3}\varphi^{\text{iv}}(x+h-u)\,du,$$

et ainsi de suite.

On en conclut

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(x)+\int_0^h\frac{u^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{n+1}(x+h-u)\,du.$$

C'est précisément la formule de Taylor, dans laquelle le reste qui complète les $n+1$ premiers termes est exprimé par une intégrale définie.

373. Pour déduire de cette formule le développement rappelé plus haut, dans l'équation

$$(9)\quad \varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\varphi^{2n}(x)+\int_0^h\frac{u^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du,$$

remplaçons successivement la fonction $\varphi(x)$ qui reste arbitraire, par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x),\ldots$, $\varphi^{2n-1}(x)$, et diminuons à chaque fois d'une unité le nombre arbitraire des termes conservés dans le second membre, de telle sorte que la fonction $\varphi^{2n+1}(x+h-u)$

figure dans tous les derniers termes sous le signe d'intégration, nous aurons

$$\varphi'(x+h)-\varphi'(x)=h\varphi''(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi'''(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\varphi^{2n}(x)+\int_0^h\frac{u^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du,$$

$$\varphi''(x+h)-\varphi''(x)=h\varphi'''(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi^{\text{IV}}(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\varphi^{2n}(x)+\int_0^h\frac{u^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du,$$

.....

$$\varphi^{2n-1}(x+h)-\varphi^{2n-1}(x)=h\varphi^{2n}(x)+\int_0^h u\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du.$$

Posons, conformément à la notation habituelle,

$$\varphi^p(x+h)-\varphi^p(x)=\Delta\varphi^p(x),$$

et ajoutons les équations précédentes, au nombre desquelles il faut comprendre l'équation (9), après les avoir multipliées respectivement par 1, A_1h, $A_2h^2,\ldots$, $A_{2n-1}h^{2n-1}$ en choisissant les constantes $A_1, A_2,\ldots, A_{2n-1}$ de manière à faire disparaître du second membre les dérivées $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi^{\text{IV}}(x),\ldots,\varphi^{2n}(x)$, on aura

$$(10)\qquad \Delta\varphi(x)+A_1h\Delta\varphi'(x)+A_2h^2\Delta\varphi''(x)+\ldots+A_{2n-1}h^{2n-1}\Delta\varphi^{2n-1}(x)$$
$$=h\varphi'(x)+\int_0^h\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,F(u)\,du.$$

En posant

$$(11)\qquad F(u)=\frac{u^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+A_1\frac{hu^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}+\ldots+A_{2n-1}uh^{2n-1},$$

les coefficients $A_1, A_2,\ldots, A_{2n-1}$ étant déterminés par les équations

$$A_1+\frac{1}{1.2}=0,$$
$$A_2+\frac{A_1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{2n-1}+\frac{A_{2n-2}}{1.2}+\frac{A_{2n-3}}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots 2n}=0,$$

et en nommant $B_1, B_2,\ldots, B_n$ les nombres de Bernoulli, ces relations sont satis-

faites (I, 347) en prenant

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}B_1, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{1}{1.2.3.4}B_2, \quad A_5 = 0, \ldots,$$

$$A_{2n-2} = (-1)^n \frac{1}{1.2.3\ldots(2n-2)} B_{n-1}, \quad A_{2n-1} = 0,$$

et l'équation (10) devient par conséquent

$$\Delta\varphi(x) - \frac{1}{2}h\Delta\varphi'(x) + \frac{1}{1.2}B_1 h^2\Delta\varphi''(x) + \cdots + \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n-2)}B_{n-1}\Delta\varphi^{2n-2}(x)$$
$$= h\varphi'(x) + \int_0^h \varphi^{2n+1}(x+h-u)F(u)\,du,$$

$F(u)$ désignant la fonction (11) que l'on peut écrire

$$\frac{h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\left[\frac{\left(\frac{u}{h}\right)^{2n}}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{h}\right)^{2n-1} + \frac{B_1}{1.2}\left(\frac{u}{h}\right)^{2n-2}(2n-1) - \ldots + (-1)^n B_{n-1}\left(\frac{u}{h}\right)^2\frac{2n-1}{2}\right].$$

Le facteur placé entre parenthèses est précisément le polynôme qui exprime la somme des puissances $2n-1$ des $n-1$ premiers nombres entiers dans lequel n est remplacé par $\frac{u}{h}$. En adoptant la notation (I, 349), on a par conséquent

$$F(u) = \frac{h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right).$$

374. Le développement indéfini donné (I, 333) n'est par conséquent légitime que si le reste

$$\frac{h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^h \varphi^{2n+1}(x+h-u)\,\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du$$

tend vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment; u variant de zéro à h, $\frac{u}{h}$ varie de zéro à l'unité, le facteur $\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)$ ne change pas de signe (I, 352), et nous pouvons, par conséquent faire sortir l'autre facteur $\varphi^{2n+1}(x+h-u)$ du signe d'intégration, en le remplaçant par une valeur moyenne $\varphi^{2n+1}(x+\theta h)$, en sorte que l'intégrale qui exprime le reste est égale à

$$\frac{h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\varphi^{2n+1}(x+\theta h)\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du.$$

Mais on a (I, 351)

$$\varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{d\varphi_{2n}(x)}{dx} - (-1)^n B_n;$$

donc

$$\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right) du = \int_0^h \frac{1}{2n} \frac{d\varphi_{2n}\left(\frac{u}{h}\right)}{du} h\,du - (-1)^n \int_0^h B_n du,$$

c'est-à-dire, la fonction $\varphi_{2n}\left(\frac{u}{h}\right)$ étant nulle (I, 352) pour $u = h$ et $u = 0$,

$$\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right) du = -h(-1)^n B_n,$$

et le reste de la série de Maclaurin, quand on la termine au terme en $\Delta\varphi^{2n-2}(x)$, est par conséquent

$$(12) \qquad \frac{(-1)^{n+1} h^{n+1}}{1.2.3\ldots 2n} \varphi^{2n+1}(x + \theta h) B_n.$$

Les nombres de Bernoulli (I, 412) grandissent si rapidement avec n, que la formule de Maclaurin, prolongée indéfiniment, est en général inexacte. Elle peut même alors cependant, par une anomalie singulière, rendre de grands services dans les calculs d'approximation. Le terme complémentaire, lors même qu'il grandit avec n, est en effet fort petit pour des valeurs peu considérables de n. L'expression (12) pourra donc être, et sera dans le plus grand nombre des cas, négligeable pour certaines valeurs de n, et la formule, bornée à un petit nombre de termes, ne laissera subsister qu'une erreur insignifiante. On a, par exemple,

$$\frac{B_{10}}{1.2.3\ldots 20} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 21740.$$

375. Si l'on pose

$$\varphi'(x) = f(x),$$

on aura

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

et la formule (8) donnera

$$(13) \quad \int_x^{x+h} f(x)\,dx = hf(x) + \frac{1}{2} h\Delta f(x) - \frac{1}{2} B_1 h^2 \Delta f'(x) + \frac{1}{1.2.3.4} B_2 h^4 \Delta f'''(x) - \cdots$$

Si l'on applique cette formule à la fonction

$$f(x) = l\Gamma(x),$$

on trouve

$$\int_x^{x+h} l\Gamma(x)\,dx = hl\Gamma(x) + \frac{1}{2}h\Delta l\Gamma(x) - \frac{1}{2}B_1 h^2 \Delta \frac{dl\Gamma(x)}{dx} + \frac{1}{1.2.3.4}B_2 h^4 \Delta \frac{d^3 l\Gamma(x)}{dx^3} - \ldots.$$

En posant $h = 1$, $x = 0$, on a

$$\Delta l\Gamma(x) = l\Gamma(x+1) - l\Gamma(x) = lx,$$

$$\Delta \frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\Delta \frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\Delta \frac{d^3 l\Gamma(x)}{dx^3} = \frac{2}{x^3},$$

et ainsi de suite; d'ailleurs (300)

$$\int_x^{x+1} l\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}l2\pi + xlx - x;$$

par conséquent

$$l\Gamma(x) = \frac{1}{2}l2\pi - x + \left(x - \frac{1}{2}\right)lx + \frac{1}{2}\frac{B_1}{x} - \frac{1}{3.4}\frac{B_2}{x^3} + \frac{1}{5.6}\frac{B_3}{x^5} - \cdots,$$

ce qui s'accorde avec la formule (315).

376. La formule (13), très-employée dans le calcul des intégrales définies, est mise habituellement sous une autre forme. Elle est évidemment d'autant plus exacte que la valeur de h est plus petite, et c'est pour cette raison qu'avant d'en faire usage, on partage souvent une intégrale en plusieurs autres dont les limites soient plus resserrées.

On a, en posant $b - a = nh$,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^{a+h} \varphi(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} \varphi(x)\,dx + \cdots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} \varphi(x)\,dx,$$

et en appliquant la formule (13) à chacune des intégrales qui composent le second membre, on trouve, après des réductions évidentes,

$$(14)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = h[\varphi(a) + \varphi(a+h) + \ldots + \varphi(a+nh)] - \frac{1}{2}h[\varphi(b) + \varphi(a)]$$
$$- \frac{1}{2}B_1 h^2[\varphi'(b) - \varphi'(a)] + \frac{1}{1.2.3.4}B_2 h^4[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)]$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4.5.6}B_3 h^6[\varphi^{v}(b) - \varphi^{v}(a)] + \cdots.$$

Si l'on fait $n = 1$, on a

$$(15)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{h}{2}[\varphi(b)+\varphi(a)] - \frac{B_1(b-a)^2}{1.2}[\varphi'(b)-\varphi'(a)]$$
$$+ \frac{B_2(b-a)^4}{1.2.3.4}[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)] - \frac{B_3(b-a)^6}{1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)] + \cdots,$$

et déduisant $\varphi'(b)-\varphi'(a)$ de cette équation pour le substituer dans l'équation (14), on trouve, en remarquant que $(b-a) = nh$,

$$(16)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{nh}{2(n^2-1)}\left\{2n\sum_{k=1}^{k=n-1}\varphi(a+kh) + (n-1)[\varphi(b)+\varphi(a)]\right\}$$
$$- \frac{B_2 n^2 h^4}{1.2.3.4}[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)] + \frac{B_3 n^4 h^6}{1.2.3.4.5.6}(n^4-1)[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)].$$

En disposant du nombre arbitraire n et combinant entre elles les formules obtenues, on peut former un grand nombre de résultats intéressants.

En posant $b-a = p = 8\theta$ et faisant successivement $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$, on obtient les trois formules suivantes :

$$(17)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\{4[\varphi(a+4\theta)+\varphi(a)+\varphi(b)]\}$$
$$- \frac{B_2(b-a)^4}{4.1.2.3.4}[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)] + \frac{5B_3(b-a)^6}{16.1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)].$$

$$(18)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{30}\{8[\varphi(a+2\theta)+\varphi(a+4\theta)+\varphi(a+6\theta)]\} + 3[\varphi(a)+\varphi(b)]$$
$$- \frac{B_2(b-a)^4}{16.1.2.3.4}[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)] + \frac{17B_3(b-a)^6}{256.1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)].$$

$$(19)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{126}\{16[\varphi(a+\theta)+\varphi(a+2\theta)+\varphi(a+3\theta)+\ldots+\varphi(a+7\theta)]\}$$
$$+ 7[\varphi(a)+\varphi(b)] - \frac{B_2(b-a)^4}{64.1.2.3.4}[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)]$$
$$+ \frac{65B_3(b-a)^6}{4096.1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)].$$

En combinant ces équations pour éliminer $\varphi'''(b)-\varphi'''(a)$, on trouve

$$(20)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{p}{90}\{7[\varphi(a)+\varphi(b)] + 32[\varphi(a+2\theta)+\varphi(a+6\theta)] + 12\varphi(a+4\theta)\}$$
$$- \frac{B_3 p^6}{64.1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)],$$

$$(21)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{p}{1890}\{77[\varphi(a)+\varphi(b)] + 320[\varphi(a+\theta)+\varphi(a+3\theta)+\varphi(a+5\theta)+\varphi(a+7\theta)]\}$$
$$+ \frac{152p}{1890}[\varphi(a+2\theta)+\varphi(a+4\theta)+\varphi(a+6\theta)] - \frac{B_3 p^6}{1024.1.2.3.4.5.6}[\varphi^{v}(b)-\varphi^{v}(a)].$$

et en éliminant $\varphi^{\text{v}}(b) - \varphi^{\text{v}}(a)$

$$(22)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{p}{5670}\{217[\varphi(a)+\varphi(b)]+352[\varphi(a+2\theta)+\varphi(a+6\theta)]+486\varphi(a+4\theta)\}$$
$$+\frac{1024p}{5670}[\varphi(a+\theta)+\varphi(a+3\theta)+\varphi(a+5\theta)+\varphi(a+7\theta)].$$

377. Appliquons ces diverses formules à la recherche de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}82246\ 703341.$$

On a, dans ce cas, $a=0$, $b=1$ et $p=1$; donc

$$\varphi(a)=\varphi(0)=1,\quad \varphi\left(\frac{1}{8}\right)=0{,}94226\ 4285,\quad \varphi\left(\frac{2}{8}\right)=0{,}89257\ 4205,\quad \varphi\left(\frac{3}{8}\right)=0{,}84920\ 9950,$$
$$\varphi\left(\frac{4}{8}\right)=0{,}81093\ 0216,\quad \varphi\left(\frac{5}{8}\right)=0{,}77681\ 2505,\quad \varphi\left(\frac{6}{8}\right)=0{,}74615\ 4384,$$
$$\varphi\left(\frac{7}{8}\right)=0{,}71840\ 9896,\quad \varphi(1)=0{,}69314\ 7181.$$

La formule (17) réduite à son premier terme donne

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = \frac{1}{6}\left[\varphi(0)+\varphi(1)+4\varphi\left(\frac{4}{8}\right)\right]=\frac{1}{6}(1{,}69315+3{,}24372)=0{,}22881,$$

et l'erreur porte sur le quatrième chiffre.

En partageant l'intégrale en quatre autres prises entre les limites zéro et $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ et 1, et appliquant à chacun la formule (17), on trouvera

$$24\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 4\times 3{,}286\ 6966 + 2\times 2{,}449\ 6588 + 1{,}693\ 1472 = 19{,}739\ 2513,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 0{,}822\ 4688,$$

et l'erreur ne porte plus que sur le sixième chiffre.

La formule (20) réduite au premier terme donne

$$90\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 7\times 1{,}693\ 1472 + 32\times 1{,}638\ 7286 + 12\times 0{,}810\ 9302 = 74{,}022\ 5077,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = 0{,}822\,4712,$$

avec quatre chiffres exacts.

En décomposant l'intégrale en deux autres $\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$, on a

$$180\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = 7\times 1{,}69314\,7181 + 32\times 3{,}28669\,6636 + 12\times 1{,}6387\,2859$$
$$+ 14\times 0{,}81094\,0216,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{148{,}0440\,7725}{180} = 0{,}82246\,7096,$$

résultat exact à sept décimales.

La formule (22) donne enfin

$$5670\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = 217\times 1{,}69314\,7181 + 1024\times 3{,}28669\,6631 + 352\times 1{,}63872\,8589$$
$$+ 436\times 0{,}81093\,0216$$

ou

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = 0{,}82246\,7078,$$

exact encore à sept décimales.

LIVRE SECOND.

APPLICATIONS ET DÉVELOPPEMENTS.

CHAPITRE PREMIER.

ÉVALUATION DES AIRES PLANES ET DES ARCS DE COURBE.

Expression d'une aire plane.

378. Lorsqu'une courbe plane est rapportée à des coordonnées rectangulaires x et y, l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des X et deux ordonnées correspondant aux abscisses a et b est représenté par l'intégrale

$$\int_a^b y\,dx.$$

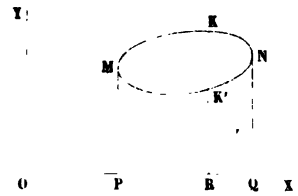
Toute intégrale définie représente donc une surface, et les exemples traités dans le premier livre pourraient tous, avec un simple changement dans l'énoncé, trouver place dans ce chapitre.

Il faut remarquer que la formule qui représente l'aire suppose l'ordonnée positive pour tous les points de la courbe dont les abscisses sont comprises entre a et b; si l'ordonnée y est négative, l'élément $y\,dx$ de l'intégrale est lui-même négatif, et l'intégrale, somme de ces éléments, représente l'excès de la surface située au-dessus de l'axe des X sur celle qui est au-dessous.

Il est également bien entendu que la limite supérieure b surpasse la limite inférieure a; s'il en est autrement, l'intégrale est égale et de signe contraire à celle que l'on obtient en renversant les limites, et par conséquent, lorsque l'ordonnée est positive, l'intégrale représente l'aire changée de signe.

379. Pour évaluer la surface comprise dans l'intérieur d'une courbe fermée telle que celle que représente la figure, on doit déterminer d'abord les tangentes MP,

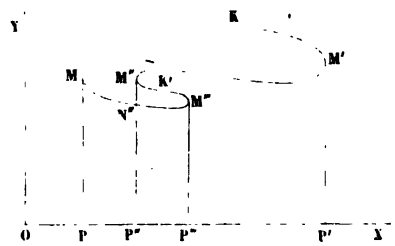
NQ parallèles à l'axe des y, et considérer la surface comme la différence des aires



MKNQP et MK'NQP, dont chacune est représentée par une intégrale, et en nommant y_1 et y_2 les deux ordonnées KR et K'R, l'aire est égale à

$$\int_{OP}^{OQ} (y_2 - y_1)\, dx.$$

380. La même formule, dans certains cas, doit être modifiée. Soit à évaluer par exemple l'aire enfermée dans l'intérieur d'une courbe telle que MM'M''M''' qui

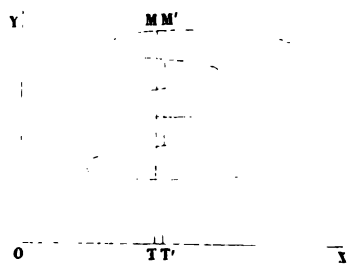


admet plusieurs tangentes MP, M'P', M''P'', M'''P''' parallèles à l'axe des y. On a évidemment, en nommant A l'aire cherchée,

$$A = PMKM'P' - P''M''M'P' + P''M''K'M'''P''' - PMN''M'''P''',$$

et chacune des intégrales qui figurent au second membre s'exprime par une intégrale unique.

381. Il est souvent avantageux d'appliquer une formule qui, en exprimant l'aire quelle qu'en soit la forme par une intégrale unique, dispense de recourir aux décompositions que l'on vient d'indiquer.



Soit par exemple à évaluer l'aire de la courbe représentée par la figure. Les or-

données infiniment voisines MT, M′T′, dont la distance est dx, coupent le contour en des points dont nous représenterons les ordonnées par y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6; et l'élément de surface correspondant est évidemment

$$(1) \qquad (y_6 - y_5 + y_4 - y_3 + y_2 - y_1)\,dx.$$

En nommant ds_1, ds_2, ds_3, ds_4, ds_5, ds_6 les petits arcs dont la projection commune est TT′ ou dx, et α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 les angles formés par l'axe des y avec la normale extérieure à chacun d'eux, on a

$$dx = ds_6 \cos\alpha_6 = -ds_5 \cos\alpha_5 = ds_4 \cos\alpha_4 = -ds_3 \cos\alpha_3 = ds_2 \cos\alpha_2 = -ds_1 \cos\alpha_1,$$

et la somme des expressions telles que (1) est par conséquent représentée par

$$\int y\,ds \cos\alpha.$$

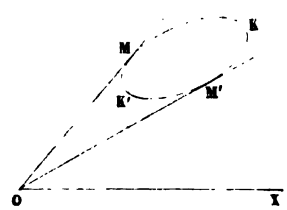
L'intégrale devant s'étendre au contour entier, quelle qu'en soit la forme; la démonstration, qui est générale, repose sur ce principe évident que lorsqu'une droite rencontre en plusieurs points une courbe fermée, elle forme avec la normale extérieure un angle obtus en tous les points par lesquels elle pénètre dans le contour, et un angle aigu en tous ceux par lesquels elle en sort.

382. Lorsqu'une figure plane est rapportée à des coordonnées polaires, on peut aisément exprimer les portions de son aire comprise entre les deux rayons vecteurs. L'aire comprise entre un rayon vecteur fixe correspondant à l'angle α et le rayon variable qui correspond à l'angle ω, a en effet pour différentielle (I, **116**) $\frac{1}{2}\rho^2\,d\omega$, et l'aire elle-même, qui s'annule pour $\omega = \alpha$, est représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\omega \rho^2\,d\omega,$$

en supposant toutefois α moindre que ω.

Pour évaluer l'aire d'une courbe fermée à laquelle l'origine est extérieure, on commencera par mener du pôle deux tangentes OM, OM′ à cette courbe, et l'on



remarquera que la surface demandée est la différence des deux aires OMKM′.

OMK′M′, qui chacune s'évalueront à l'aide de la formule précédente. En nommant ρ_1 et ρ_2 les deux rayons vecteurs qui répondent à une même valeur de ω, cette aire sera

$$\frac{1}{2}\int(\rho_2^2-\rho_1^2)\,d\omega,$$

les limites de l'intégrale étant les valeurs de ω qui répondent aux rayons extrêmes OM, OM′.

Si la courbe n'est pas convexe, on peut être obligé, comme dans le cas des coordonnées rectilignes, à décomposer la surface en un plus grand nombre de parties comprises chacune entre deux tangentes issues de l'origine et l'arc que leurs points de contact interceptent sur la courbe.

383. On peut, en employant toujours les coordonnées polaires, représenter l'aire d'une courbe fermée par une intégrale unique qui convient à tous les cas. Si deux rayons vecteurs voisins coupent la courbe aux points M_1, M_2, M_3, M_4, dont les rayons vecteurs soient ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, l'élément de surface compris entre ces deux rayons vecteurs est évidemment

$$\frac{1}{2}\,d\omega\,(\rho_4^2-\rho_3^2+\rho_2^2-\rho_1^2).$$

En nommant ds_1, ds_2, ds_3, ds_4 les éléments de contour compris entre les rayons considérés et α_1, α_2, α_3, α_4 les angles formés par les mêmes rayons avec les normales extérieures aux divers éléments, on a

$$d\omega=-\frac{ds_1\cos\alpha_1}{\rho_1}=\frac{ds_2\cos\alpha_2}{\rho_2}=-\frac{ds_3\cos\alpha_3}{\rho_3}=\frac{ds_4\cos\alpha_4}{\rho_4},$$

et l'aire est exprimée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int\rho\,ds\cos\alpha,$$

étendue à tous les éléments du contour.

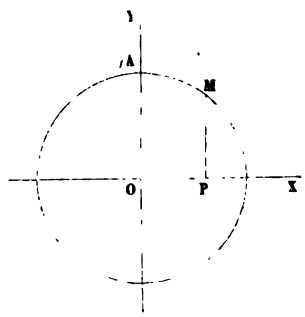
On peut remarquer que le produit $\rho\cos\alpha$ est égal à la perpendiculaire p abaissée du pôle sur la tangente à l'élément ds, et l'expression peut s'écrire par conséquent

$$\frac{1}{2}\int p\,ds.$$

Mais, en lui donnant cette forme, on perd l'avantage de n'avoir pas à se préoccuper du signe des éléments que l'on doit ajouter.

Quelques applications.

384. *Aire du cercle.* — Soit $x^2 + y^2 = R^2$ l'équation d'un cercle.



L'aire AOMP est représentée par

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x dx\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}.$$

En faisant $x = R$, on obtient le quart du cercle $\frac{\pi R^2}{4}$.

On obtient le même résultat en posant

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi,$$

et par conséquent

$$y\,dx = -R^2\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Les extrémités du quadrant correspondent à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$, et le quart de cercle a par conséquent pour expression

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -R^2\sin^2\varphi\,d\varphi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi R^2}{4}.$$

385. *Développée de l'ellipse.* — La développée de l'ellipse a pour équation (I, 527)

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

On peut poser, pour un point quelconque de la courbe,

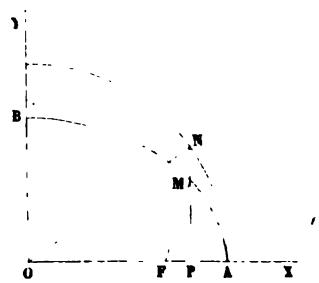
$$x = \alpha\cos^3\varphi, \qquad dx = -3\alpha\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$y = \beta\sin^3\varphi,$$

et comme on obtient le quart du contour en faisant varier φ de $\frac{\pi}{2}$ à zéro, le quart de la surface a pour expression

$$\int_0^{\alpha} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -3\alpha\beta \sin^4\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = 3\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\,(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3\pi\alpha\beta}{32},$$

et l'aire totale est égale à $\frac{3\pi\alpha\beta}{8}$.

386. *Aire d'un secteur elliptique.* — Soit BMA un quart d'ellipse, F le foyer. Calculons le secteur FMA dont l'expression est utile dans l'étude du mouvement des planètes.



L'équation de l'ellipse rapportée au foyer F pris pour pôle et à l'axe FA pour axe polaire est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}. \tag{3}$$

Soit MP la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe et N le point où elle coupe la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Désignons l'angle NOA par u, on a, d'après les propriétés connues de l'ellipse,

$$\rho = a - ex = a(1 - e\cos u),$$
$$\rho\cos\omega = a\cos u - ae.$$

Et remplaçant ρ par sa valeur (3)

$$\cos u - e = \frac{(1-e^2)\cos\omega}{1+e\cos\omega}, \quad \cos\omega = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}, \quad 1+\cos\omega = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u},$$

$$\tang\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{1}{2}u,$$

$$\frac{d\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\omega} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u},$$

ou, ce qui revient au même

$$\frac{d\omega}{1+\cos\omega} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{1+\cos u};$$

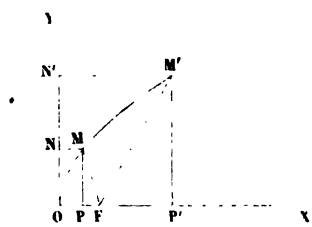
par conséquent

$$\rho^2\,d\omega = a^2(1-e\cos u)^2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{1+\cos u}\,\frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u} = a^2\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos u)\,du,$$

et

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\omega}\rho^2\,d\omega = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,(u-e\sin u).$$

387. *Aire d'un secteur parabolique.* — Soit $y^2 = 4ax$ l'équation de la parabole,



x, y les coordonnées du point M, x', y' celles du point M', F étant le foyer, calculons le secteur MFM'. On a, comme on sait par les éléments,

$$\mathrm{OMP} = \frac{2}{3}xy,$$

$$\mathrm{OM'P'} = \frac{2}{3}x'y',$$

et par conséquent

$$\mathrm{S} = \mathrm{MFM'} = \frac{2}{3}x'y' - \frac{2}{3}xy - \mathrm{PMF} - \mathrm{P'M'F} = \frac{2}{3}(x'y' - xy) - \frac{y(a-x)}{2} - \frac{y'(x'-a)}{2}$$

$$= \frac{1}{6}(x'y' - xy) + \frac{a(y'-y)}{2}.$$

Mais on a

$$y' = 2\sqrt{ax'},\quad y = 2\sqrt{ax},$$

par conséquent

$$\frac{3\mathrm{S}}{\sqrt{a}} = x'\sqrt{x'} - x\sqrt{x} + 3a(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x'} - \sqrt{x})(x' + x + \sqrt{xx'} + 3a).$$

Le second membre s'exprime élégamment, comme l'a montré Lambert, en fonction

de la somme $\rho + \rho'$ des rayons vecteurs MF, M′F et de la corde MM′ que nous désignerons par σ.

On a

$$\rho = a + x, \quad \rho' = a - x,$$

$$(5) \qquad \rho + \rho' = 2a + x + x',$$

$$(6) \qquad \sigma^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 = 4a(\sqrt{x} - \sqrt{x'})^2 + (x - x')^2 = (\rho + \rho')^2 - 4(a + \sqrt{xx'})^2.$$

Les équations (5) et (6) vont nous fournir les valeurs de x et de x'. Posons

$$\rho + \rho' + \sigma = 2m,$$
$$\rho + \rho' - \sigma = 2n,$$

les équations (5) et (6) deviendront

$$x + x' = m + n - 2a,$$
$$a + \sqrt{xx'} = \sqrt{mn}.$$

On en déduit

$$(\sqrt{x'} - \sqrt{x})^2 = m + n - 2\sqrt{mn} = (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2;$$

par conséquent

$$\frac{3S}{\sqrt{a}} = (\sqrt{m} - \sqrt{n})[(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 + 3\sqrt{mn}] = (\sqrt{m} - \sqrt{n})(m + n + \sqrt{mn}) = m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}},$$

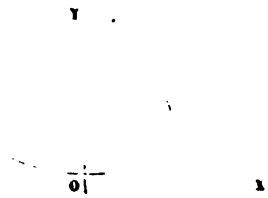
et enfin

$$(7) \qquad S = \frac{\sqrt{a}}{3}\left[\left(\sqrt{\frac{\rho + \rho' + \sigma}{2}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{\rho + \rho' - \sigma}{2}}\right)^3\right];$$

c'est le théorème de Lambert.

388. *Folium de Descartes.* — L'équation du folium de Descartes est

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$



et en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\cos^3\omega + \sin^3\omega}.$$

On a

$$\int \rho^2 d\omega = 9a^2 \int \frac{\sin^2\omega \cos^2\omega \, d\omega}{(\cos^3\omega + \sin^3\omega)^2} = 9a^2 \int \frac{\tang^2\omega \frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1 + \tang^3\omega)^2},$$

et, en posant $1 + \tang^3 \omega = z$,

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{9a^2}{6}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{3a^2}{2z} + C.$$

La boucle du folium s'obtiendra en faisant varier ω de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et par conséquent z de l'unité à l'infini. La surface de cette boucle est par conséquent $\frac{3}{2}a^2$.

389. *Aire de la cycloïde.* — Les équations d'une cycloïde étant

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = a(1 - \cos u),$$

on a

$$y\,dx = a^2(1 - \cos u)^2 du = 4a^2 \sin^4 \frac{1}{2} u \, du.$$

La surface totale correspondant à un tour entier du cercle générateur s'obtiendra en faisant varier u de zéro à 2π; elle est donc

$$4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{1}{2} u \, du = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{1}{2} u \, du = 3\pi a^2.$$

390. *Aire de la cardioïde.* — On a désigné sous le nom de *cardioïde* la courbe lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence d'un cercle sur ses tangentes. Cette courbe a pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho = R + R\cos\omega.$$

R étant le rayon du cercle et le pôle placé au point d'où l'on abaisse les perpendiculaires. La surface totale est

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R^2 + 2R\cos\omega + R^2\cos^2\omega)\, d\omega = \frac{3\pi R^2}{2};$$

elle est par conséquent la moitié de l'aire de la cycloïde engendrée par un point du cercle roulant sur une de ses tangentes.

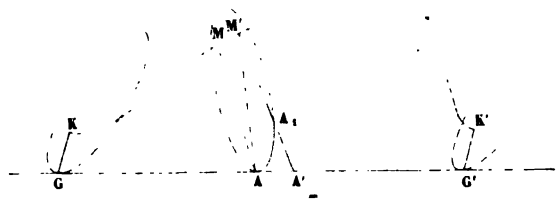
Théorème de Steiner.

391. Le résultat précédent est un cas très-particulier d'un théorème élégant dû à Steiner.

Lorsqu'une courbe fermée roule sur une de ses tangentes, la *roulette* engendrée par un point du plan qui se meut avec elle en lui restant invariablement uni a une surface double de celle de la courbe, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur les tangentes à la courbe qui roule.

On entend par surface de la roulette engendrée par un point du plan, l'aire comprise entre la courbe décrite par le point, la droite sur laquelle elle roule et les deux rayons vecteurs extrêmes qui, au moment du départ et après une révolution complète, unissent le point décrivant au point de contact de la courbe qui roule.

Soit M le point décrivant dans l'une des positions de la roulette, A le point de contact correspondant, M′ le point voisin de M et A′ le point de contact correspon-



dant. La distance AA′ étant égale, comme on sait, à l'arc AA_1 qui dans le roulement s'applique sur elle, le point A, dans le mouvement qui amène M en M′, ne se déplace que d'un infiniment petit du second ordre, et l'on peut regarder MM′ comme un arc de cercle dont A est le centre et dont l'angle, égal à celui dont la figure a tourné, est l'angle de contingence de AA_1. Or la surface élémentaire MAA′M′ peut être considérée comme la somme de deux autres

$$MAM' + M'AA'.$$

Si l'on nomme r le rayon vecteur AM et ε l'angle de contingence, on a

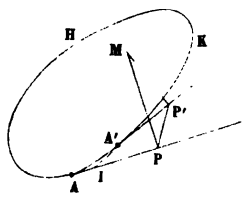
$$MAM' = \frac{r^2 \varepsilon}{2}.$$

Quant à M′AA′ on peut, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, le remplacer par MAA_1, et la somme des éléments analogues formera évidemment la surface totale S de la courbe qui roule. La surface totale de la roulette telle qu'elle a été définie plus haut est donc

$$S + \frac{1}{2}\int r^2 \varepsilon. \tag{8}$$

Considérons actuellement la courbe lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur la tangente à la ligne donnée qui, bien entendu cette fois, reste

fixe. Soient MP, MP′ les perpendiculaires abaissées sur les tangentes aux points



infiniment voisins A et A′. En nommant ε l'angle de contingence correspondant à l'arc AA′, on a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\text{(9)} \qquad MPP' = \frac{1}{2} MP^2 \varepsilon,$$

et en nommant I le point de rencontre des tangentes

$$\text{(10)} \qquad PIP' = \frac{1}{2} \overline{PI}^2 \varepsilon.$$

Mais si l'on nomme X l'aire de la courbe lieu du point P et S l'aire de la courbe AA′, on a évidemment

$$\text{(11)} \qquad X = \sum MPP',$$

$$\text{(12)} \qquad X = S + \sum PIP';$$

par conséquent

$$\text{(13)} \qquad X = \frac{1}{2} \int \overline{MP}^2 \varepsilon,$$

$$\text{(14)} \qquad X = S + \frac{1}{2} \int \overline{AP}^2 \varepsilon,$$

et on en déduit en ajoutant

$$\text{(15)} \qquad 2X = S + \frac{1}{2} \int (\overline{MP}^2 + \overline{AP}^2) \varepsilon = S + \frac{1}{2} \int r^2 \varepsilon,$$

et cette formule, comparée à (8), démontre le théorème de Steiner.

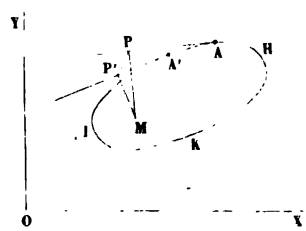
392. La somme $\int r^2 \varepsilon$, qui figure dans les expressions (8) et (15), est la seule partie des deux surfaces considérées qui varie avec la position du point M sur le plan de la courbe donnée à laquelle il est lié. Les lois de variation de cette expression sont fort simples. Elles peuvent se rattacher à une propriété très-connue du centre de gravité. Que l'on attribue en effet à chaque élément de la courbe

une densité inversement proportionnelle à son rayon de courbure, de telle sorte que la masse de l'élément ds soit égale à $\frac{ds}{\rho}$, ou, ce qui revient au même, à l'angle de contingence ε : la somme $\int r^2 \varepsilon$ est la somme de ces masses élémentaires multipliées chacune par le carré de la distance au point M; or on sait qu'une telle somme est minima quand le point M est placé au centre de gravité G de l'ensemble des masses, et que la valeur relative à tout autre point M est égale à cette valeur minima augmentée de la masse totale $\int \varepsilon$, c'est-à-dire 4π, multipliée par le carré de la distance GM.

Il résulte évidemment de cette remarque que le lieu des points qui sur un plan, dans le roulement d'une courbe donnée, engendrent des roulettes de même aire est un cercle dont le centre engendre la roulette d'aire minima.

Il est aisé de prouver directement que, quelle que soit la forme de la courbe donnée, le lieu des points tels que le lieu des pieds de perpendiculaires abaissées sur les tangentes enferme une aire donnée est un cercle dont le centre est indépendant de la valeur de cette aire.

Soient AHKI la courbe donnée et MP, MP′ les perpendiculaires abaissées du



point M sur deux tangentes voisines, l'aire de la courbe PP′ est évidemment

$$\int \overline{\mathrm{MP}}^2 \varepsilon,$$

ε désignant l'angle des deux perpendiculaires MP, MP′, égal à celui des tangentes. Soit θ l'angle de l'une des tangentes avec l'axe des X, son équation est de la forme

$$x \sin\theta - y \cos\theta + p = 0,$$

p étant une fonction de θ. Soient α et β les coordonnées du point M, on a

$$\mathrm{MP} = \alpha \sin\theta - \beta \cos\theta + p,$$
$$\varepsilon = d\theta,$$

et par conséquent l'aire totale de la courbe lieu des points p est

$$\int_0^{2\pi} (\alpha \sin\theta - \beta\cos\theta + p)^2 d\theta$$
$$= \alpha^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta + \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta - 2\alpha\beta \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$+ 2\alpha \int_0^{2\pi} p\sin\theta\, d\theta - 2\beta \int_0^{2\pi} p\cos\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} p^2\, d\theta.$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0,$$

et par conséquent l'aire cherchée, considérée comme fonction de α et de β, est exprimée par un polynôme de second degré, dont les termes du second degré se réduisent à $\pi\alpha^2 + \pi\beta^2$, et en l'égalant à une constante, on aura par conséquent l'équation d'un cercle.

Théorème de M. Holditch.

393. Si dans une courbe fermée on inscrit une corde de longueur constante $c + c'$, le point qui la divise en deux segments c et c' décrit une courbe dont l'aire est égale à celle de la courbe donnée diminuée du produit $\pi cc'$, en sorte que l'aire comprise entre les deux courbes, dont l'une est entièrement arbitraire, est exprimée exactement par $\pi cc'$.

Soient AB la corde dans l'une de ses positions et P le point décrivant, de telle sorte que l'on ait $AP = c$, $BP = c'$. Soit Q le point d'intersection de la corde avec

sa position infiniment voisine, c'est-à-dire (I, 104) le point de contact avec son enveloppe. Soient [A] l'aire de la courbe donnée, [P] et [Q] celles des courbes engendrées par les points P et Q, $AQ = r$, $BQ = c + c' - r$.

On a évidemment

$$(16)\qquad [A]-[Q]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta$$

et aussi

$$[A]-[Q]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(c+c'-r)^2\,d\theta;$$

$d\theta$ désignant l'angle de deux cordes voisines, on en conclut

$$\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}(c+c'-r)^2\,d\theta,$$

et, en supprimant le terme commun,

$$0=2(c+c')\int_0^{2\pi} r\,d\theta-(c+c')^2\int_0^{2\pi} d\theta,$$

et par suite

$$(17)\qquad \int_0^{2\pi} r\,d\theta=\pi(c+c').$$

Mais on a évidemment aussi

$$[P]-[Q]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(c-r)^2\,d\theta;$$

donc, à cause de (16),

$$[A]-[P]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2cr-c^2)\,d\theta=c\int_0^{2\pi} r\,d\theta-\pi c^2,$$

et, à cause de (17),

$$[A]-[P]=\pi c(c+c')-\pi c^2=\pi cc',$$

ce qu'il fallait démontrer.

Longueur d'un arc de courbe.

394. On a donné (I, 118) diverses expressions de la différentielle d'un arc de courbe, chacune d'elles ramène évidemment la détermination de l'arc au calcul d'une intégrale.

Arc d'ellipse. — Soient a et b les arcs d'une ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right),$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{b^2a^2(a^2 - x^2)}} = \frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

ou, en posant $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2$,

$$ds = dx\sqrt{\frac{1 - \frac{e^2x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}},$$

et le calcul de s exige une intégration qu'il est impossible d'effectuer sous forme finie; l'arc d'ellipse, en effet, dépend de fonctions transcendantes auxquelles on a donné, pour cette raison, le nom de *fonctions elliptiques*.

395. Si l'on pose

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi,$$

on trouve

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\varphi^2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi),$$

ou, en adoptant la notation déjà indiquée,

$$ds = a\,d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

(18) $$s = a\int d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

396. *Arc d'hyperbole.* — Soit $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ l'équation d'une hyperbole. On en déduit, en posant $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = e^2$,

$$ds = dx\sqrt{\frac{\frac{e^2x^2}{a^2} - 1}{\frac{x^2}{a^2} - 1}},$$

et, par conséquent,

(19) $$s = \int dx\sqrt{\frac{\frac{e^2x^2}{a^2} - 1}{\frac{x^2}{a^2} - 1}}.$$

On satisfait à l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

en posant

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

d'où l'on déduit cette seconde expression

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{b^2 + a^2\sin^2\varphi},$$

(20) $$s = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{b^2 + a^2\sin^2\varphi}.$$

Posons encore

$$y = \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi,$$

c désignant, comme plus haut, la distance du centre au foyer $\sqrt{a^2 + b^2}$, on déduira de l'équation de la courbe

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

et

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{b^2}{c\cos^2\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

$$s = \frac{b^2}{c}\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}.$$

Cette intégrale peut être ramenée à deux autres plus simples. On a en effet identiquement, comme on s'en assure par des réductions évidentes,

$$d(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}) = d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} + \frac{(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi - \frac{(1 - e^2)}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

et par conséquent, comme $b^2 = a^2(e^2 - 1)$,

(21) $$s = \frac{a}{e}(e^2 - 1)\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{e}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$
$$- \frac{a}{e}\int d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} + \frac{a}{e}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

et si l'on prend les intégrales entre les limites zéro et φ, l'arc commencera au point pour lequel $\varphi = 0$, c'est-à-dire au sommet de la courbe.

Si l'on calcule la perpendiculaire abaissée du centre sur la normale, ou, ce qui revient au même, la distance de l'extrémité de l'arc considéré à la projection du centre sur la tangente, on la trouve égale à

$$\frac{a}{e}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

et par conséquent la différence des deux intégrales qui forment les derniers termes de (21) représente l'excès de l'arc d'hyperbole sur cette portion de la tangente. Si l'on fait $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les deux intégrales ont une valeur finie, et leur différence représente, si l'on veut s'exprimer ainsi, l'excès de l'arc infini de l'hyperbole sur son asymptote, le sens précis de cette locution incorrecte étant suffisamment indiqué par le théorème général.

397. *Arc de parabole.* — L'équation d'une parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

on en déduit l'expression de la différentielle de l'arc

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}},$$

et l'arc compté à partir du sommet a pour expression

$$s = \int_0^y dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{p}{2}\, l\,\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} + \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2}.$$

398. *Arc de lemniscate.* — L'équation de la lemniscate est

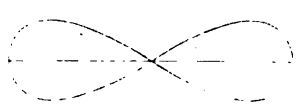
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

On a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = 2a^2 \frac{d\omega^2}{\cos 2\omega},$$

et, par conséquent,

$$s = a\sqrt{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}:$$



le quart du périmètre est représenté par

$$a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}},$$

c'est-à-dire (324), en posant $2\omega = \varphi$,

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{a}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

et l'on voit que le périmètre de la lemniscate peut servir à représenter la transcendante numérique $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

M. Serret a généralisé cette remarque de la manière suivante.

399. Considérons la courbe dont l'équation est

$$\rho^m = 2^{m-1}\cos m\omega.$$

Cette courbe est formée de m boucles fermées toutes égales entre elles; désignons par π_m le périmètre total de ces m boucles, la moitié de l'une d'elles a pour longueur

$$2^{\frac{m-1}{m}}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{1}{m}-1} m\omega\, d\omega = 2^{\frac{m-1}{m}}\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{1}{m}-1}d\varphi,$$

c'est-à-dire (324)

$$\frac{1}{2m}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Le périmètre total π_m étant égal à $2m$ fois cette expression, on en conclut

$$\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \sqrt{\pi_m}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Si l'on remplace m successivement par les différentes puissances de 2, on aura la série de formules

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \sqrt{\pi_4}\sqrt[4]{\pi_2}\sqrt[8]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\pi_8}\sqrt[4]{\pi_4}\sqrt[8]{\pi_2}\sqrt[16]{\pi},$$

.....

400. *Arc de cycloïde.* — Les équations de la cycloïde sont

$$x = a(u - \sin u),\quad y = a(1 - \cos u).$$

On en conclut

$$dx = a(1 - \cos u)\,du,\quad dy = a\sin u\,du,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos u)\,du^2 = 4a^2\sin^2\frac{1}{2}u\,du^2,$$

et par conséquent

$$ds = 2a \sin \frac{1}{2} u \, du,$$

$$s = -4a \cos \frac{1}{2} u + C.$$

Si l'on fait commencer l'arc s au sommet où $u = \pi$, lorsque u augmente de zéro à π la différentielle ds est négative; il faut donc changer le signe du résultat, et comme la constante, dans ce cas, est évidemment nulle, on a

$$s = 4a \cos \frac{1}{2} u,$$

ce qui s'accorde avec le résultat trouvé (I, 20).

401. *Arc de cardioïde.* — L'équation de la cardioïde est (389)

$$\rho = a + a \cos \omega.$$

La différentielle de son arc est par conséquent donnée par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega^2,$$

$$ds = 2a \cos \frac{\omega}{2} d\omega,$$

et l'on a

$$s = 4a \sin \frac{\omega}{2} + C.$$

Si l'on compte les arcs à partir du point pour lequel on a $\omega = 0$, la constante est nulle et l'on a

$$s = 4a \sin \frac{\omega}{2}.$$

Pour $\omega = \pi$, on a

$$s = 4a,$$

et la circonférence totale de la courbe est $8a$.

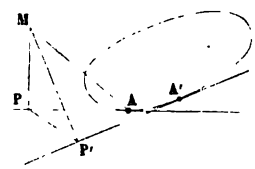
Théorème de Steiner.

402. La longueur totale de la cardioïde est égale à celle de la cycloïde engendrée par un point du cercle considéré, lorsque celui-ci roule sur une de ses tan-

gentes. La coïncidence n'est pas fortuite, elle est la conséquence nécessaire d'un théorème élégant dû à Steiner :

Lorsqu'une courbe quelconque roule sur une de ses tangentes, la longueur de la roulette engendrée par un point du plan lié invariablement à cette courbe est égale à la portion correspondante de la ligne lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce même point sur les tangentes à la courbe mobile.

Soit M la position du point décrivant au moment où la courbe mobile touche en A la droite sur laquelle elle roule. Lorsque le point voisin A′ vient par suite du



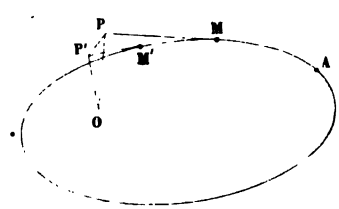
roulement se placer au contact de la tangente fixe, on peut regarder le point M comme tournant autour de A d'un angle égal à l'angle de contingence de l'arc AA′, et l'arc qu'il décrit est égal, aux infiniment petits du second ordre près, au produit du rayon AM par cet angle de contingence ε; mais si l'on abaisse du point M des perpendiculaires sur les deux tangentes de la courbe supposée fixe, l'élément PP′ coupe les tangentes AP, AP′ (I, 14) sous un angle égal à MAP. Cet élément PP′ a par conséquent pour expression

$$\frac{AP.\varepsilon}{\cos MAP} = MA.\varepsilon,$$

et il est égal à celui de la roulette décrite par le point M.

Longueur totale d'une courbe fermée.

403. Considérons une courbe fermée quelconque AMM′A, et à partir d'un point fixe A pris sur son contour, l'arc arbitraire AM, la tangente en M et la per-



pendiculaire OP abaissée d'un point fixe O sur cette tangente. La longueur AMP, composée de l'arc AM et de la droite MP, est une fonction de la position du point M,

et lorsque ce point, faisant le tour entier de la courbe, revient à sa première position, la portion MP reprenant évidemment sa valeur primitive, l'accroissement total de AMP est égal à la circonférence entière de la courbe considérée. Pour évaluer cette circonférence, il suffit donc d'intégrer la différentielle de AMP égale évidemment à

$$(1) \qquad d\overline{AM} + d\overline{MP}.$$

Le théorème démontré (1, 21) donne l'expression de dMP, qui, pour le déplacement MM′ du point M, lorsque MP devient M′P′, est

$$-\,MM' + PP' \cos \overline{PP'}, \overline{MP},$$

et l'expression (1) est égale par conséquent à

$$PP' \cos \overline{PP'}, \overline{MP},$$

c'est-à-dire, évidemment, à l'arc de cercle décrit du point O comme centre avec OP pour rayon et compris entre OP et OP′.

Si l'on nomme p la perpendiculaire OP abaissée du point O sur la tangente et ε l'angle de contingence de l'arc MM′, égal évidemment à l'angle P′OP, la différentielle de AMP est d'après cela $p\varepsilon$, et la longueur totale de la courbe

$$\int p\varepsilon,$$

c'est-à-dire, en nommant ρ le rayon de courbure,

$$\int \frac{p}{\rho}\, ds,$$

l'intégration s'étendant au contour entier.

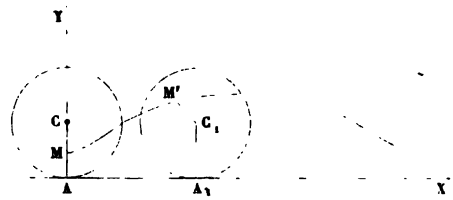
Théorème de Pascal.

404. Les géomètres, en étudiant la rectification des courbes, ont souvent obtenu des relations simples entre des arcs de forme très-différente qui, pris isolément, ne pourraient être rectifiés.

Pascal, le premier, en a donné un exemple très-élégant en démontrant que la longueur de la courbe engendrée par un point attaché à un cercle qui roule est égal à la circonférence d'une certaine ellipse.

L'expression des différentielles des arcs permet de démontrer bien simplement ce théorème de Pascal.

Soit M le point décrivant de la roulette allongée MM′, en nommant r le rayon



de cercle, u l'angle dont il a tourné pour parvenir dans la position $C_1 A_1$, et a la distance MC; les coordonnées x_1 et y_1 du point M′ sont évidemment

$$x_1 = ru - a \sin u,$$
$$y_1 = r - a \cos u,$$

et l'on a, en nommant ds la différentielle de l'arc,

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = du^2 [(r - a\cos u)^2 + a^2 \sin^2 u] = (a^2 + r^2 - 2ar\cos u)\, du^2$$

ou

$$ds = du \sqrt{(a+r)^2 - 4ar\cos^2 \frac{1}{2} u},$$

et en posant $u = \pi - 2\varphi$

$$ds = -2 d\varphi \sqrt{(a+r)^2 - 2ar \sin^2 \varphi},$$

et la longueur totale de la courbe est représentée par l'intégrale

$$\sigma = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(a+r)^2 - 4ar \sin^2 \varphi},$$

ce qui (394) représente la circonférence d'une ellipse.

Théorème de Jacques Bernoulli.

405. Jacques Bernoulli, le premier, a assigné sur une même courbe des arcs non superposables dont l'égalité se démontre sans qu'il soit possible d'évaluer leur longueur commune. C'est par là sans doute que la voie a été ouverte à Fagnano, dont le beau théorème sur les arcs d'ellipse a révélé à Euler le principe fondamental de la grande théorie des fonctions elliptiques.

La courbe considérée par Bernoulli est nommée par lui *spirale parabolique ;* elle

a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = R - \sqrt{2pR\omega},$$

p et R désignant des lignes données. Si l'on nomme s l'arc de cette spirale, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = d\rho^2 + \rho^2 \frac{(\rho - R)^2}{p^2 R^2} d\rho^2.$$

En posant

$$\rho - \frac{R}{2} = \rho',$$

l'expression de ds devient

$$ds = \frac{d\rho'}{pR}\sqrt{p^2R^2 + \left(\rho'^2 - \frac{R^2}{4}\right)^2},$$

et l'arc compris depuis le point correspondant à $\rho' = 0$ jusqu'à celui qui correspond à $\rho' = l$ est représenté par

$$\frac{1}{pR}\int_0^l d\rho' \sqrt{p^2R^2 - \left(\rho'^2 - \frac{R^2}{4}\right)^2};$$

l'arc compris entre les points correspondant à $\rho' = 0$ et $\rho' = -l$ est représenté par

$$\frac{1}{pR}\int_{-l}^0 d\rho' \sqrt{p^2R^2 + \left(\rho'^2 - \frac{R^2}{4}\right)^2}.$$

Ces deux intégrales ont précisément la même valeur, car les deux éléments qui correspondent à des valeurs égales et de signes contraires de ρ' sont évidemment égaux. Le point qui correspond à $\rho' = 0$, c'est-à-dire à $\rho = \frac{R}{2}$, est donc le milieu de l'arc pour les extrémités duquel on a $\rho' = l$ et $\rho' = -l$, c'est-à-dire $\rho = \frac{R}{2} + l$ et $\rho = \frac{R}{2} - l$, et l'on peut assigner d'une infinité de manières sur la spirale parabolique des arcs dont l'égalité est démontrée quoiqu'ils ne soient pas superposables.

Théorèmes de Fagnano.

406. Dans le tome IX du journal *Letterati Italiani*, Fagnano proposait aux géomètres le problème suivant :

Trouver sur la courbe dont l'équation est

$$x^3 = 3y$$

deux arcs dont la différence soit rectifiable.

Aucune solution n'ayant été donnée dans le terme d'une année qu'il avait assigné, Fagnano publia la sienne en l'accompagnant de plusieurs théorèmes analogues avec l'indication de la méthode qui les lui avait fait découvrir.

Soit une intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Si on la transforme en substituant à x une variable nouvelle z qui lui soit liée par une relation connue, il peut arriver que, toutes réductions faites, $\varphi(x)\,dx$ se transforme en $\varphi(z)\,dz$ en conservant la même forme, de telle sorte que, par le changement de variables, les limites seules aient été changées; on a alors une équation de la forme

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_c^d \varphi(z)\,dz.$$

Dans d'autres cas, l'expression $\varphi(x)\,dx$ se transforme en $-\varphi(z)\,dz$, et l'on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_c^d \varphi(z)\,dz = 0,$$

les limites c et d étant, comme dans le cas précédent, liées à a et à b par la formule de transformation.

Si l'intégrale considérée représente un arc de courbe ou l'excès de la longueur d'un tel arc sur celle d'une ligne droite connue, les formules précédentes feront connaître sur cette courbe des arcs égaux ou des arcs à différence rectifiable.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

En posant $x = \frac{1}{z}$, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{dz}{z^2\sqrt{1+\frac{1}{z^4}}} = -\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}},$$

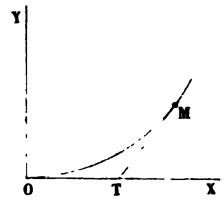
et par conséquent

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

Fagnano déduit de cette remarque un théorème élégant relatif aux arcs de la

courbe dont l'équation est $x^3 = 3y$. En nommant s l'arc de cette courbe, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + x^4}.$$



La longueur t de la tangente MT comprise entre le point de contact et l'axe des X est

$$t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{x}{3}\sqrt{1 + x^4};$$

par conséquent

$$dt = \frac{dx}{3}\sqrt{1 + x^4} + \frac{2x^4\,dx}{3\sqrt{1 + x^4}} = dx\sqrt{1 + x^4} - \frac{2\,dx}{3\sqrt{1 + x^4}},$$

et par conséquent

$$ds - dt = \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

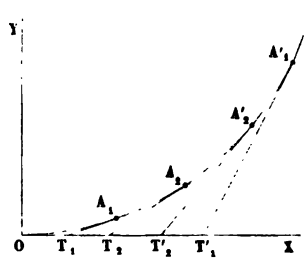
Si l'on pose $x = \frac{1}{z}$ et que l'on nomme s_1 et t_1 l'arc et la tangente relatifs au point dont l'abscisse est z, on aura

$$ds_1 - dt_1 = \frac{2}{3}\frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}} = -\frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}},$$

et par conséquent

$$ds_1 - dt_1 + ds - dt = 0,$$
$$s_1 - t_1 + s - t = \text{const.}$$

Si donc on prend deux points correspondants A_1 et A'_1 ayant pour abscisses x_1



et $\frac{1}{x_1}$, et deux autres points A_2 et A'_2 ayant pour abscisses x_2 et $\frac{1}{x_2}$, l'excès de la

somme des arcs terminés en A_1 et en A'_1 sur celle des tangentes correspondantes est égal à l'excès analogue relatif aux points A_2 et A'_2.

On a donc

$$OA'_1 + OA_1 - A_1T_1 - A'_1T'_1 = OA'_2 + OA_2 - A_2T_2 - A'_2T'_2,$$

c'est-à-dire

$$A'_1A'_2 - A_1A_2 = A_1T_1 + A'_1T'_1 - A_2T_2 - A'_2T'_2.$$

La différence des arcs $A'_1A'_2$ et A_1A_2 est donc rectifiable, quoique chacun d'eux pris isolément soit représenté par une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

407. La différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x - x^3}}$$

se change en une autre de même forme quand on pose

$$x = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

On a en effet

$$\frac{dx}{\sqrt{x - x^3}} = -\frac{dz}{\sqrt{z - z^3}}.$$

Fagnano a déduit de cette remarque un théorème fort célèbre qui permet d'assigner des arcs de même longueur sur la courbe nommée lemniscate.

La lemniscate a pour équation

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{2}\sqrt{x^2 - y^2}.$$

On peut obtenir les différents points en posant

$$x = a\sqrt{u + u^2}, \quad y = a\sqrt{u - u^2}.$$

On a, en adoptant u pour variable,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{du}{\sqrt{u - u^3}},$$

et, en nommant s l'arc compté à partir de l'origine,

$$s = \int_0^c \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{du}{\sqrt{u - u^3}}.$$

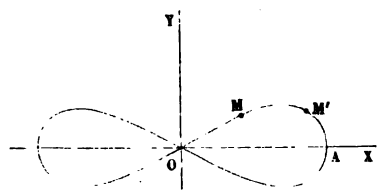
Si l'on pose

$$u = \frac{1 - u_1}{1 + u_1},$$

on aura

$$s = -\int_1^{\frac{1-c}{1+c}} \frac{du_1}{\sqrt{u_1 - u_1^3}} = \int_{\frac{1-c}{1+c}}^{1} \frac{du_1}{\sqrt{u_1 - u_1^3}}.$$

Mais le second membre représente l'arc de lemniscate compris entre les points qui correspondent à $u = \frac{1-c}{1+c}$ et à $u = 1$. Si donc on considère sur la courbe, qui a la forme représentée sur la figure, deux arcs OM, AM′, terminés aux points M et M′



qui correspondent aux valeurs c et $\frac{1-c}{1+c}$ de la variable u, ces arcs auront même longueur; et un arc quelconque étant donné à partir du point O, on peut assigner un arc égal porté à partir du point A.

Si l'on pose

$$c = \frac{1-c}{1+c},$$

les points M et M′ se confondent et leur position commune divisera en deux parties égales le quart AO de la lemniscate.

La variable adoptée par Fagnano n'est pas celle dont l'emploi est le plus élégant. L'équation de la lemniscate en coordonnées polaires étant

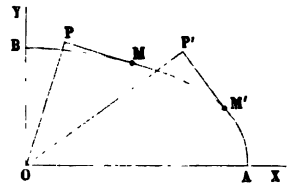
$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\omega},$$

les points M et M′ où se terminent les arcs égaux correspondent aux arcs ω_1 et ω_2 qui satisfont à la condition

$$\cos\omega_1 \cos\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

408. On doit également à Fagnano un théorème élégant sur la comparaison des arcs d'ellipse.

Si l'on cherche sur un quart d'ellipse un point M tel, que la distance comprise entre ce point et la perpendiculaire OP abaissée du centre sur la tangente soit égale



à une ligne donnée l, on trouvera deux solutions et par conséquent deux points M et M' tels, que $MP = M'P' = l$.

A et B étant les extrémités des deux axes, on a

$$\text{arc BM} - \text{arc AM} = l.$$

Pour le démontrer, considérons l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On a

$$MP^2 = x^2 + y^2 - \frac{a^4b^4}{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Si l'on pose $MP = l$, $x^2 + y^2 = r^2$, on trouve aisément, en prenant r^2 pour inconnue,

$$r^4 - r^2(a^2 + b^2 + l^2) + \ldots = 0.$$

Si donc r_1^2 et r_2^2 sont les rayons vecteurs de deux points M et M', on a

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2 + l^2,$$

et par conséquent

$$\text{(A)} \qquad r_1\,dr_1 + r_2\,dr_2 = l\,dl.$$

Or on a, pour une courbe quelconque,

$$l = r\frac{dr}{ds},$$

$$ds = r\frac{dr}{l};$$

l'équation (A) peut donc s'écrire

$$r_1\frac{dr_1}{l} + r_2\frac{dr_2}{l} = dl,$$

c'est-à-dire

$$ds_1 + ds_2 = dl,$$

ds_1 et ds_2 étant les déplacements infiniment petits des points M et M′ lorsque l augmente de dl; mais dr_1 et dr_2 sont évidemment de signes contraires, et il en est de même de ds_1 et ds_2 considérés comme comptés à partir d'une même origine, en sorte que

$$ds_1 = d\mathrm{BM}, \quad ds_2 = -\, d\mathrm{AM}',$$

donc

$$d\mathrm{BM} - d\mathrm{AM}' = dl,$$

et en intégrant, comme BM et AM′ sont nuls en même temps que l,

$$\mathrm{BM} - \mathrm{AM}' = l,$$

ce qui est le théorème de Fagnano.

Théorème de M. Chasles.

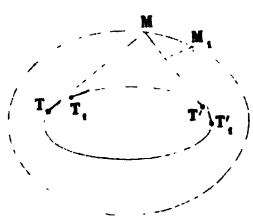
409. Euler a résolu sur les arcs d'ellipse un problème plus général que celui de Fagnano. Il a donné le moyen d'obtenir une infinité d'arcs dont la différence avec un arc donné quelconque soit rectifiable, sans qu'il soit nécessaire, comme dans le théorème de Fagnano, que les arcs se terminent aux sommets de l'ellipse.

Nous donnerons seulement ici la solution élégante de M. Chasles qui repose sur le lemme suivant :

Deux ellipses homofocales étant données, si par un point de l'une d'elles on mène deux tangentes à l'autre, ces tangentes font des angles égaux avec la normale au point d'où elles sont issues.

De cette proposition très-aisée à vérifier, M. Chasles déduit le théorème suivant :

Si par un point M *de l'une des ellipses on mène à l'autre des tangentes* MT, MT′,



la différence MT + MT′ — TT′ *entre la somme des deux tangentes et l'arc qui sépare leurs points de contact est constante quel que soit le point* M.

Pour prouver ce théorème, il suffit de faire voir qu'en substituant au point M le point voisin M_1, la différentielle de MT + MT′ — TT′ est égale à zéro.

Lorsqu'en effet MT devient M_1T_1 et MT′, $M_1T'_1$, en nommant θ l'angle que ces droites forment avec MM_1, on a (I, 21)

$$dMT = MM_1 \cos\theta - TT_1,$$
$$dMT' = -MM_1 \cos\theta + T_1T'_1;$$

donc

$$dMT + dM'T' = T_1T'_1 - TT_1 = dTT',$$

et par conséquent

$$d(MT + MT' - TT') = 0.$$

La différence $MT + MT' - TT'$ est donc constante, et la différence de l'arc TT′ avec tout autre arc compris entre les points de contact des tangentes issues d'un point quelconque de l'ellipse M est par conséquent rectifiable.

Méthode de M. Talbot.

410. M. Talbot a déduit d'une méthode fort simple un grand nombre de formules analogues à celles de Fagnano.

On a, quelle que soit la relation entre x et y,

$$\int x\,dy + \int y\,dx = xy + C,$$

si les deux variables sont liées par une équation symétrique qui donne

$$y = \varphi(x), \quad x = \varphi(y),$$

φ désignant la même fonction; on a, par conséquent,

$$\int \varphi(y)\,dy + \int \varphi(x)\,dx = xy + C,$$

ce qui donne une relation entre deux intégrales de même forme que souvent on ne saurait exprimer ni l'une ni l'autre sous forme finie.

411. Soit par exemple

$$e^2x^2y^2 = e^2(x^2 + y^2) - 1,$$

on aura

$$y = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{e^2x^2 - 1}{x^2 - 1}}, \quad x = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{e^2y^2 - 1}{y^2 - 1}},$$

et par conséquent

$$exy + C = \int dx \sqrt{\frac{e^2x^2 - 1}{x^2 - 1}} + \int dy \sqrt{\frac{e^2y^2 - 1}{y^2 - 1}}:$$

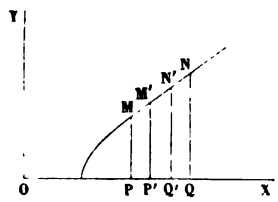
c'est une relation (394) entre deux arcs de l'hyperbole dont l'équation est

$$y^2 - (e^2 - 1)x^2 = 1 - e^2.$$

Soient OP et OQ deux abscisses liées par l'équation (1) qui équivaut à

$$(1 - x^2)(1 - y^2) = 1 - \frac{1}{e^2},$$

OP′ et OQ′ un autre système de solutions, M, N, M′, N′ les points correspondants



de la courbe, on aura

$$MM' - NN' = OP.OQ - OP'.OQ'.$$

412. On peut, par un procédé semblable, trouver une relation entre trois intégrales. Soient x, y, z trois variables liées par une relation symétrique telle que

$$xy = \varphi(z), \quad xz = \varphi(y), \quad yz = \varphi(x).$$

On a identiquement

$$xy\,dz + yz\,dx + xz\,dy = dxyz;$$

par conséquent x, y, z, x_1, y_1, z_1 désignent deux systèmes de valeurs des variables

$$xyz - x_1y_1z_1 = \int_{x_1}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_1}^{y} \varphi(y)\,dy + \int_{z_1}^{z} \varphi(z)\,dz.$$

Soient, par exemple, les équations

$$(1) \qquad x + y + z = 0, \quad xy + xz + yz = -\frac{x^2y^2z^2}{4}.$$

On en déduit

$$(2)\qquad \begin{cases} yz = \dfrac{2\sqrt{1+x^4}}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} = \varphi(x), \\[2ex] zx = \dfrac{2\sqrt{1+y^4}}{y^2} - \dfrac{2}{y^2} = \varphi(y), \\[2ex] xy = \dfrac{2\sqrt{1+z^4}}{z^2} - \dfrac{2}{z^2} = \varphi(z) \end{cases}$$

et

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy + \int \varphi(z)\,dz = xyz + C.$$

Mais on a

$$\int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x},$$

et l'équation devient

$$(3)\qquad 2\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\,dx + 2\int \frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}\,dy + 2\int \frac{\sqrt{1+z^4}}{z^2}\,dz + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = xyz + C.$$

Mais la seconde des équations (1) donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = -\frac{xyz}{2};$$

par conséquent, en nommant x, y, z, x_1, y_1, z_1 deux systèmes de solution des équations (1),

$$(4)\qquad \frac{3}{4}(x_1 y_1 z_1 - xyz) = \int_{x_1}^{x} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\,dx + \int_{y_1}^{y} \frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}\,dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\sqrt{1+z^4}}{z^2}\,dz,$$

l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\,dx$$

représente l'arc de l'hyperbole dont l'équation est

$$xy = 1,$$

et par conséquent la formule (4) exprime la somme des trois arcs convenablement choisis sur une hyperbole équilatère, et qui isolément ne pourraient pas être calculés.

413. M. Talbot a fait connaître d'autres formules, en grand nombre, dans lesquelles une somme de différentielles, dont aucune n'est intégrable, peut s'exprimer aisément par la théorie des fonctions symétriques, en permettant ainsi d'évaluer la somme de leurs intégrales.

Considérons, pour en donner un exemple, l'équation

$$x^2 - vx + 1 = 0,$$

et soient x_1 et x_2 ses deux racines. On a

$$\frac{1 + x_1^2}{x_1} = \frac{1 + x_2^2}{x_2} = v;$$

par conséquent

$$dx_1 \sqrt{\frac{1 + x_1^2}{x_1}} + dx_2 \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{x_2}} = \sqrt{v}(dx_1 + dx_2).$$

Or

$$x_1 + x_2 = v, \quad dx_1 + dx_2 = dv;$$

donc

$$dx_1 \sqrt{\frac{1 + x_1^2}{x_1}} + dx_2 \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{x_2}} = dv\sqrt{v}$$

et

$$\int dx_1 \sqrt{\frac{1 + x_1^2}{x_1}} + \int dx_2 \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{x_2}} = \int dv\sqrt{v} = \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x_1 + x_2)^{\frac{2}{3}} + C,$$

ou, en posant $x_1 = t^2$, $x_2 = u^2$,

$$\int dt\sqrt{1 + t^4} + \int du\sqrt{1 + u^4} = \frac{1}{3}(u^2 + t^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

t^2 et u^2 étant les deux racines de l'équation liées évidemment par la seule relation

$$t^2 u^2 = 1,$$

et l'intégrale exprimant (406) l'arc de la courbe

$$y^3 = 3x.$$

Cette équation établit une relation entre deux arcs d'une telle courbe et équivaut, il est aisé de le voir, au théorème de Fagnano démontré (406).

414. Reprenons l'équation

$$x^2 - vx + 1 = 0.$$

En nommant toujours x_1 et x_2 les deux racines, on a

$$\frac{dx_1}{1 + x_1^2} + \frac{dx_2}{1 + x_2^2} = \frac{dx_1}{vx_1} + \frac{dx_2}{vx_2} = \frac{1}{v}\left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}\right);$$

mais la relation évidente

$$x_1 x_2 = 1$$

donne

$$lx_1 + lx_2 = 0,$$

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = 0;$$

donc

$$\frac{dx_1}{1 + x_1^2} + \frac{dx_2}{1 + x_2^2} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\text{arc tang}\, x_1 + \text{arc tang}\, x_2 = \text{const.},$$

conséquence évidente de la relation $x_1 x_2 = 1$, qui montre que la constante est égale à $\frac{\pi}{2}$.

415. L'inconvénient de cette méthode est évidemment de faire connaitre des théorèmes dont la forme plus ou moins curieuse ou intéressante semble produite par une sorte de hasard, qu'il est aisé néanmoins de diriger dans une certaine mesure.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir une propriété de l'arc de parabole représenté par l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + x^2}.$$

Égalons $\sqrt{1 + x^2}$ à un polynôme entier contenant un paramètre arbitraire, et posons, par exemple,

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{1 + x^2} = x^2 + vx + 1.$$

L'équation est du troisième degré et admet trois racines x_1, x_2, x_3; on a évidemment

$$dx_1 \sqrt{1 + x_1^2} + dx_2 \sqrt{1 + x_2^2} + dx_3 \sqrt{1 + x_3^2} = \sum x^2 dx + v \sum x\, dx + \sum dx,$$

et par conséquent

$$\int dx_1 \sqrt{1 + x_1^2} + \int dx_2 \sqrt{1 + x_2^2} + \int dx_3 \sqrt{1 + x_3^2} = \sum \frac{x^3}{3} + \int v \sum x\, dx + \sum x.$$

Mais l'équation (A) débarrassée du radical est

$$x^3 + 2vx^2 + (v^2 + 1)x + 2v = 0;$$

par conséquent

$$\sum \frac{x^3}{3} = -\frac{2v^3}{3}, \quad \sum x^2 = 2v^2 - 2, \quad \sum x\,dx = 2v\,dv,$$

$$\int v \sum x\,dx = \int 2v^2 dv = \frac{2v^3}{3}, \quad \sum x = -2v.$$

On a donc

$$\int dx_1 \sqrt{1+x_1^2} + \int dx_2 \sqrt{1+x_2^2} + \int dx_3 \sqrt{1+x_3^2} = -2v + C,$$

et il en résulte une relation entre trois arcs de parabole. Si l'on prend en effet deux valeurs v_1 et v_2 de v, et que x_1, x_2, x_3 x'_1, x'_2, x'_3 soient les racines correspondantes de (A), on aura

$$\int_{x_1}^{x'_1} dx \sqrt{1+x^2} + \int_{x_2}^{x'_2} dx \sqrt{1+x^2} + \int_{x_3}^{x'_3} dx \sqrt{1+x^2} = 2(v_1 - v_2),$$

relation entre trois arcs de la parabole dont l'équation est

$$x^2 = 2y.$$

416. Cherchons enfin une relation entre des arcs d'ellipse, et posons pour cela

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = \frac{2}{v}x + 1.$$

L'équation équivaut à

$$x^3 + vx^2 + \left(\frac{1-e^2}{4}v^2 - 1\right)x - v = 0,$$

et, à chaque valeur de v, correspondent trois racines x_1, x_2, x_3.

On a évidemment

$$dx_1 \sqrt{\frac{1-e^2x_1^2}{1-x_1^2}} + dx_2 \sqrt{\frac{1-e^2x_2^2}{1-x_2^2}} + dx_3 \sqrt{\frac{1-e^2x_3^2}{1-x_3^2}} = \frac{2}{v}\sum x\,dx + \sum dx.$$

Mais la théorie des fonctions symétriques donne

$$\sum x^2 = \frac{1+e^2}{2}v^2 + 2, \quad \sum x\,dx = \frac{1+e^2}{2}v\,dv, \quad \sum x = -v,$$

$$\sum dx = -dv, \quad \frac{2}{v}\sum x\,dx + \sum dx = e^2 dv,$$

donc

$$\int dx_1 \sqrt{\frac{1-e^2x_1^2}{1-x_1^2}} + \int dx_2 \sqrt{\frac{1-e^2x_2^2}{1-x_2^2}} + \int dx_3 \sqrt{\frac{1-e^2x_3^2}{1-x_3^2}} = e^2 v + C,$$

et en donnant deux valeurs à v et faisant les intégrations entre les racines qui leur correspondent, on obtient ainsi une relation entre trois arcs d'ellipse.

417. Si l'on pose plus simplement

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = vx,$$

cette équation équivaut à

$$x^4 - \frac{v^2+e^2}{v^2}x^2 + \frac{1}{v^2} = 0.$$

Soient x_1^2, x_2^2 les valeurs de x^2 que l'on déduit, on a

$$dx_1\sqrt{\frac{1-e^2x_1^2}{1-x_1^2}} + dx_2\sqrt{\frac{1-e^2x_2^2}{1-x_2^2}} = v(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2);$$

mais évidemment

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{v^2+e^2}{v^2},$$

$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = -\frac{e^2}{v^3}\,dv$$

et

$$\int dx_1\sqrt{\frac{1-e^2x_1^2}{1-x_1^2}} + \int dx_2\sqrt{\frac{1-e^2x_2^2}{1-x_2^2}} = \int -\frac{e^2}{v^3}\,dv = \frac{e^2}{v} + C,$$

ce qui donne une relation entre deux arcs d'ellipse dont les points extrêmes ont pour abscisses les valeurs de x_1 et x_2 correspondant à deux valeurs de v choisies arbitrairement.

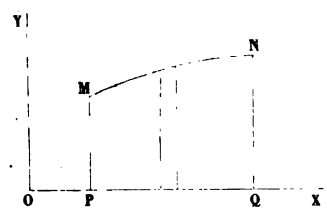
CHAPITRE II.

ÉVALUATION DES SURFACES COURBES.

Surfaces de révolution.

418. La portion d'une surface de révolution comprise entre deux sections perpendiculaires à l'axe est représentée par une intégrale simple. On peut en effet assimiler la surface comprise entre deux cercles parallèles infiniment voisins à un tronc de cône engendré par l'élément de la courbe méridienne tournant autour de l'axe.

Si l'on suppose que l'arc de courbe plane MN situé dans le plan YOX tourne au-



tour de l'axe des X, le tronc de cône engendré par l'élément ds a pour expression

$$2\pi y\, ds,$$

et la surface engendrée par MN est représentée par

$$2\pi \int y\, ds,$$

les limites étant telles que tous les éléments de l'arc MN figurent dans l'intégrale.

419. *Surface de la sphère.* — Considérons la sphère engendrée par la révolution autour de l'axe des X du demi-cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

On a

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{R}{y}\, dx,$$

et par conséquent la surface de la zone comprise entre deux sections correspondant aux abscisses a et b est

$$2\pi\int_a^b R\,dx = 2\pi R(b-a),$$

produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur de la zone.

420. *Surface de l'ellipsoïde de révolution.* — Considérons l'ellipsoïde engendré par la révolution autour de l'axe des X de l'ellipse qui a pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On a

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}} = \frac{b\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}}{ay}\,dx,$$

et par conséquent la surface comprise entre les sections qui correspondent aux abscisses p et q est, en posant $a^2-b^2=c^2$ et $\frac{c}{a}=e$,

$$\frac{2\pi b}{a}\int_p^q\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx = \frac{2\pi be}{a}\int_p^q\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2-x^2}\,dx$$
$$= \frac{\pi be}{a}\left(x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}+\frac{a^2}{e^2}\arcsin\frac{ex}{a}\right)_p^q.$$

Si l'on prend pour limites zéro et a, on obtient, pour la surface du demi-ellipsoïde,

$$\pi ab\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{\arcsin e}{e}\right).$$

421. *Surface engendrée par une cycloïde.* — Les équations de la cycloïde sont

$$x = a(u-\sin u),$$
$$y = a(1-\cos u).$$

On en déduit

$$ds = 2a\sin\frac{1}{2}u\,du,$$

et la surface cherchée est

$$4\pi a^2\int(1-\cos u)\sin\frac{1}{2}u\,du = 8\pi a^2\int\sin^3\frac{1}{2}u\,du.$$

Pour avoir la surface engendrée par la demi-cycloïde, il faut faire varier a entre

zéro et π. Or on a

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \frac{1}{2} u\, du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi\, d\varphi = \frac{4}{3},$$

et par conséquent la surface totale engendrée par la cycloïde est $\frac{32}{3}\pi a^2$.

Évaluation d'une surface quelconque.

422. Pour évaluer une surface quelconque, il faut la décomposer en éléments infiniment petits dont la courbure soit négligeable et que l'on puisse par conséquent calculer comme s'ils étaient plans. On doit, dans chaque cas, commencer par projeter le contour-limite de la surface à évaluer sur un plan qui sera, si l'on veut, celui des XY. La surface de cette projection sera décomposée en éléments infiniment petits. Soit $d\omega$ l'un d'entre eux et $d\sigma$ la portion correspondante de la surface courbe; si γ est l'angle formé par le plan tangent de $d\sigma$ avec le plan des XY, on a

$$d\sigma \cos\gamma = d\omega,$$

et par conséquent

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos\gamma}.$$

Si la surface à évaluer est donnée par son équation

$$z = \varphi(x, y),$$

on a, en posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

et si l'on prend pour l'élément $d\omega$ le rectangle $dx\,dy$ compris entre deux parallèles à l'axe des X distantes de dy et deux parallèles à l'axe des Y distantes de dx, on aura

$$d\sigma = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

et la surface sera la somme des éléments $d\sigma$ correspondant à l'intérieur du contour-limite.

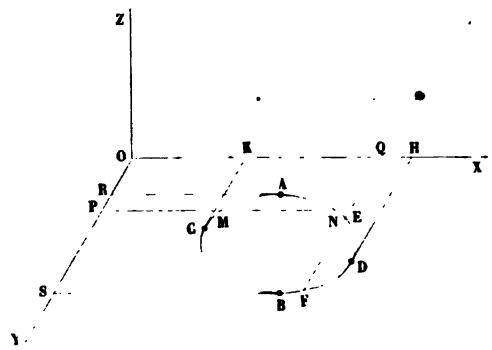
On peut, pour sommer les éléments, réunir d'abord ceux qui correspondent à la portion du plan des XY comprise entre deux parallèles à l'axe des X dont les ordonnées sont y et $y + dy$. Cette somme est évidemment exprimée par l'intégrale

simple

$$dy \int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

dans laquelle on prendra pour limites les deux valeurs de x qui, dans l'équation de la courbe qui sert de projection à l'aire cherchée, correspondent à la valeur choisie de y. Le résultat de cette première intégration sera le produit de dy par une fonction de la seule variable y, et on devra l'intégrer entre des limites correspondant aux valeurs extrêmes de y.

Soit AMNB la projection de la surface à évaluer, AR, BS les tangentes extrêmes parallèles à l'axe des X, de telle sorte que OR $= a$ et OS $= b$ soient les valeurs



entre lesquelles peut varier Y, l'expression de la surface projetée sur AMPN est, d'après ce qui précède,

$$\int_a^b dy \int_{PM}^{PN} dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Dans la première intégration relative à x, y est traité comme constant et les limites sont des fonctions de y; la seconde intégration se fait par rapport à y entre des limites constantes.

On pourrait évidemment renverser les opérations et sommer d'abord les éléments compris entre deux parallèles à l'axe des Y, et faisant pour cela une intégration par rapport à y entre deux limites fonctions de x, puis, à l'aide d'une seconde intégration par rapport à x, réunir les tranches ainsi obtenues, et la surface sera exprimée alors par

$$\int_{OK}^{OH} dx \int_{QE}^{QF} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

423. Le choix des éléments est entièrement arbitraire. Il est commode quelquefois d'employer des coordonnées polaires et de décomposer la projection

considérée en éléments compris entre deux rayons vecteurs faisant entre eux l'angle $d\omega$ et deux cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$ décrits de l'origine comme centre. Un tel élément a évidemment pour mesure

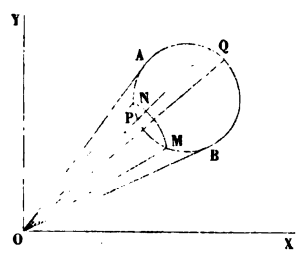
$$\rho\, d\omega\, d\rho;$$

l'élément correspondant $d\sigma$ est

$$\rho\, d\omega\, d\rho \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

L'intégration de ces éléments peut se faire de deux manières. On peut d'abord intégrer par rapport à ρ en considérant ω comme constant et réunir tous les éléments qui correspondent à deux rayons vecteurs infiniment voisins; la somme des tranches ainsi obtenues, dont chacune contient $d\omega$ en facteur, s'obtiendra par une seconde intégration. On peut aussi intégrer d'abord par rapport à ω en laissant ρ constant et obtenir ainsi l'expression d'une zone projetée entre deux cercles infiniment voisins, puis, par une intégration relative à ρ, obtenir la somme de ces zones.

OA, OB étant les tangentes extrêmes, ω_1, ω_2 les angles qu'elles forment avec



OX, la surface projetée sur APBQ est ainsi représentée par

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{OP}^{OQ} \rho\, d\rho \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

ou encore, en nommant ρ_1 et ρ_2 les rayons des cercles décrits de l'origine comme centre et tangents à la courbe APBQ,

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \rho\, d\rho \int_{MOX}^{NOX} d\omega \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

OP et OQ étant dans le premier cas des fonctions de ω, et MOX, NOX dans le second des fonctions de ρ.

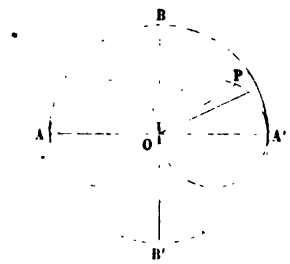
Lorsque la projection de la surface à évaluer comprend le point O dans son in-

térieur, l'expression change de forme et la surface est évidemment représentée par

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R} \rho\, d\rho \sqrt{1+p^2+q^2},$$

R désignant le rayon vecteur qui correspond à l'angle ω.

424. *Problème de Viviani.* — Soit ABA′B′ le grand cercle qui termine un hémisphère. Si sur deux rayons opposés OA et OA′ comme diamètres on décrit des



cercles, les cylindres droits ayant ces cercles pour base détacheront de la demi-sphère des portions que nous allons évaluer pour démontrer, conformément à un énoncé célèbre de Viviani, que la portion restante, exactement carrable, est égale au carré du diamètre. La portion de surface sphérique projetée sur le cercle dont OA′ est le diamètre a pour expression

$$(1) \qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{OP} \rho\, d\rho \sqrt{1+p^2+q^2};$$

$\sqrt{1+p^2+q^2}$, inverse du cosinus de l'angle formé par le plan tangent à la sphère avec le plan de la figure, est égal à $\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$. On a d'ailleurs

$$OP = R\cos\omega,$$

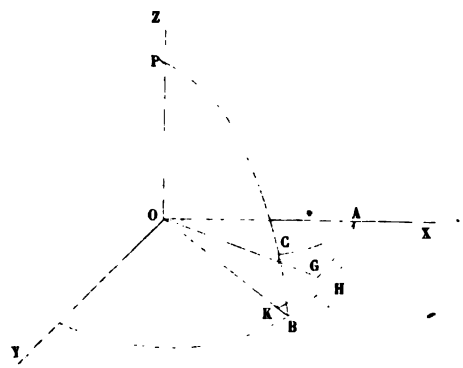
et l'intégrale (1) est par conséquent

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{\rho\, d\rho\, R}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, d\omega \left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)_0^{R\cos\omega}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, d\omega (R - R\sin\omega) = \pi R^2 - 2R^2;$$

la surface projetée sur les deux cercles est évidemment double, elle est donc $2\pi R^2 - 4R^2$, et si on la retranche de la demi-sphère, il reste $4R^2$.

425. *Surface d'un triangle sphérique.* — Soient ABY l'intersection d'une sphère de rayon R ayant l'origine O pour centre par le plan des XY, PB un arc de grand



cercle perpendiculaire à AB, et AC un grand cercle passant par les points A et C. Nous allons évaluer le triangle rectangle ABC. Le côté BC se projette sur le rayon OB, et AC sur un arc d'ellipse dont les axes sont R et R cos A, et l'équation

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \cos^2 A} = 1.$$

La surface du triangle projeté sur AKB est représentée par

$$\int_O^{AOB} d\omega \int_{OG}^{OH} \rho\, d\rho \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int_O^{AOB} d\omega \int_{OG}^{OH} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho.$$

On a évidemment

$$OH = R,$$

et, d'après l'équation de l'ellipse,

$$\overline{OG}^2 = \frac{R^4 \cos^2 A}{R^2 \sin^2 \omega + R^2 \cos^2 A \cos^2 \omega},$$

$$\int \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = -R\sqrt{R^2 - \rho^2},$$

$$\int_{OG}^{OH} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = R\sqrt{R^2 - \frac{R^4 \cos^2 A}{R^2 \sin^2 \omega + R^2 \cos^2 A \cos^2 \omega}} = \frac{R^2 \sin \omega \sin A}{\sqrt{1 - \cos^2 \omega \sin^2 A}},$$

$$\int_O^{AOB} d\omega \int_{OG}^{OH} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = R^2 \int_O^{AOB} \frac{\sin \omega \sin A}{\sqrt{1 - \cos^2 \omega \sin^2 A}}\, d\omega = -R^2 \operatorname{arc\,sin}(\cos \omega \sin A)_O^{AOB}.$$

Mais on a

$$\operatorname{arc\,sin}(\cos o \sin A) = A,$$

et, d'après une propriété connue des triangles sphériques rectangles,

$$\operatorname{arc\,sin}(\cos AOB \sin A) = \operatorname{arc\,sin}(\cos C) = \frac{\pi}{2} - C.$$

L'intégrale qui représente la surface du triangle se réduit par conséquent à

$$R^2\left[A - \left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$\left(A + C + \frac{\pi}{2} - \pi\right) R^2,$$

ce qui s'accorde avec l'expression connue. Un triangle quelconque pouvant se partager en deux triangles rectangles, ce cas particulier équivaut évidemment au cas général.

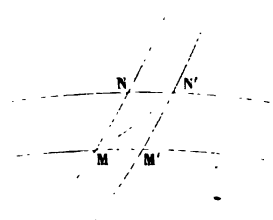
Emploi de coordonnées curvilignes.

426. Le choix des variables qui représentent les points d'une surface peut être varié à l'infini. La surface étant considérée comme connue, il faut, pour y déterminer la position d'un point, assigner les valeurs de deux cordonnées u et v, dont la définition peut être d'ailleurs absolument arbitraire. A chaque valeur de l'une des coordonnées correspond alors sur la surface une ligne déterminée, et le point qui correspond à deux valeurs assignées de u et de v se trouve ainsi défini par l'intersection de deux lignes. La distance de deux points infiniment voisins est, comme on l'a vu (I, **123**), donnée par une formule de la forme

$$(2) \qquad ds^2 = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2,$$

A, B, C étant des fonctions de u et de v faciles à déterminer dans chaque cas.

Prenons pour élément de la surface le parallélogramme MNM'N' compris entre les courbes qui correspondent aux coordonnées u, $u + du$, v, $v + dv$, u et v étant



les coordonnées du point M, et $u + du$, $v + dv$ celles du point N'; les côtés MN, MM' correspondant, l'un à la variation du de u sans que v varie, l'autre à la variation dv

de v sans que u varie. Ils sont représentés, en vertu de la formule (2), par $du\sqrt{A}$ et $dv\sqrt{C}$. Le parallélogramme infiniment petit MNM'N', double du triangle MNN', est par conséquent représenté par

$$d\sigma = \sqrt{AC}\, du\, dv \sin N.$$

Pour calculer le sinus de l'angle N, menons la diagonale MN', et remarquons que l'on a dans le triangle MNN'

$$\overline{MN'}^2 = MN^2 + \overline{NN'}^2 - 2MN\, NN' \cos N.$$

En remplaçant MN et NN' par leurs valeurs

$$\overline{MN'}^2 = A\, du^2 + C\, dv^2 - 2\sqrt{AC} \cos N\, du\, dv,$$

et la comparaison avec (2) donne

$$\sqrt{AC} \cos N = B,$$

$$\cos N = \frac{B}{\sqrt{AC}},$$

$$\sin N = \frac{1}{\sqrt{AC}} \sqrt{AC - B^2},$$

et l'aire $d\sigma$ est par conséquent

$$(3) \qquad d\sigma = du\, dv \sqrt{AC - B^2}.$$

Pour intégrer l'élément $d\sigma$, il faudra faire d'abord une intégration par rapport à u, puis par rapport à v, en adoptant des limites qui dépendront de la forme de la ligne qui limite le contour à évaluer.

427. Lorsque l'équation d'une surface est donnée sous la forme

$$x = \varphi_1(p, q),$$
$$y = \varphi_2(p, q),$$
$$z = \varphi_3(p, p),$$

et que l'on veut prendre p et q pour variables, il n'est nullement nécessaire de calculer l'élément ds^2 d'une ligne tracée sur la surface, et l'on peut plus directement obtenir une expression équivalente de l'élément de surface, complétement identique d'ailleurs quand on développe les calculs.

Considérons trois points infiniment voisins correspondant aux valeurs p, q; $p + dp$, q; p, $q + dq$ des variables. Les valeurs correspondantes de x, y, z seront

$$x, \quad y, \quad z,$$

$$x + \frac{dx}{dp}\,dp, \quad y + \frac{dy}{dp}\,dp, \quad z + \frac{dz}{dp}\,dp,$$

$$x + \frac{dx}{dq}\,dq, \quad y + \frac{dy}{dq}\,dq, \quad z + \frac{dz}{dq}\,dq,$$

et le triangle formé par les trois points a pour projections sur les trois plans coordonnés

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right) dp\,dq,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp}\right) dp\,dq,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq} - \frac{dz}{dq}\frac{dx}{dp}\right) dp\,dq.$$

Le triangle lui-même, égal, d'après un théorème bien connu, à la racine carrée de la somme des carrés de ses trois projections, est représenté par

$$\frac{1}{2}\,dp\,dq\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq} - \frac{dz}{dq}\frac{dx}{dp}\right)^2}.$$

Le parallélogramme formé par les quatre lignes infiniment voisines qui correspondent aux valeurs p, $p + dp$, q, $q + dq$ des deux variables est évidemment double de ce triangle, et l'aire d'une portion de la surface est enfin

$$\int\int dp\,dq\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq} - \frac{dz}{dq}\frac{dx}{dp}\right)^2}.$$

428. *Surfaces sphériques.* — On détermine très-habituellement les points d'une sphère par l'intersection d'un méridien avec un parallèle. Les deux coordonnées sont alors l'angle ψ que le méridien correspondant forme avec un méridien fixe et l'angle θ qui mesure la distance au pôle. On a trouvé (I, **122**) dans ce système de coordonnées

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2),$$

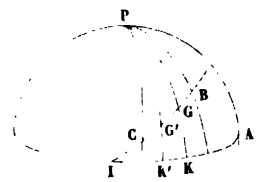
et l'élément de surface compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment

voisins est par conséquent

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Appliquons cette formule à la recherche de l'aire d'un triangle sphérique.

Prenons pour pôle l'un des sommets P du triangle PBC. Soit I l'intersection de BC avec l'équateur, et supposons que le méridien principal, à partir duquel on



compte les angles et qui est arbitraire, coupe l'équateur à un quadrant de distance du point I, l'élément de surface étant

$$R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Intégrons d'abord par rapport à θ, entre les limites indiquées sur la figure, $\theta = 0$, $\theta = PG$. On a

$$(4) \qquad \int_0^{PG} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi = R^2 \, d\psi (1 - \cos PG) = R^2 \, d\psi (1 - \sin GK).$$

Telle est l'expression de l'aire infiniment petite comprise dans l'intérieur du triangle entre deux méridiens infiniment voisins PG, PG'. La surface du triangle est par conséquent, en nommant ψ_0 l'angle BPA et $\psi_0 + P$ l'angle CPA,

$$(5) \qquad S = \int_{\psi_0}^{\psi_0 + P} R^2 \, d\psi (1 - \sin GK) = R^2 P - \int_{\psi_0}^{\psi_0 + P} R^2 \, d\psi \sin GK;$$

mais le triangle rectangle GKI donne

$$(6) \qquad \frac{\sin GK}{\sin I} = \frac{\sin IK}{\sin G} = \frac{\cos\psi}{\sin G},$$

$$(7) \qquad \cos G = \cos IK \sin I = \sin\psi \sin I.$$

En différentiant la seconde de ces équations, on a

$$(8) \qquad -\sin G \, dG = \cos\psi \sin I \, d\psi,$$

et les deux équations (6) et (8) donnent

$$\sin GK\, d\psi = -\, dG\,;$$

la formule (5) devient par conséquent

$$S = R^2 P - \int_{\psi_0}^{\psi_0 + P} R^2\, dG = R^2[P - (\pi - B - C)] = R^2(P + B + C - \pi),$$

ce qui est la formule connue.

429. *Surface carrable sur la sphère.* — L'expression d'une aire sphérique étant

$$\int\int R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

on peut toujours effectuer la première intégration, et l'on a

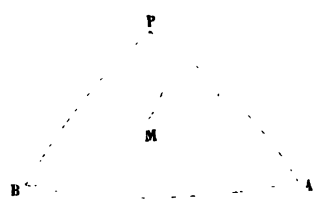
$$\int R^2 \sin\theta\, d\theta = -\, R^2 \cos\theta + C,$$

les limites étant deux fonctions de ψ que la courbe qui termine l'aire cherchée fait connaître. En prenant, pour représenter cette courbe, l'équation fort simple

$$\theta = \psi,$$

on trouve un résultat remarquable.

Si PA est le méridien principal et PAB un triangle trirectangle, la portion de



courbe comprise dans l'intérieur de ce triangle étant PMB, l'aire comprise entre elle et le côté PB a pour expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\, d\psi \int_0^{\psi} \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\, d\psi (1 - \cos\psi) = \frac{\pi R^2}{2} - R^2,$$

et si l'on reproduit la même figure dans les quatre triangles trirectangles qui

forment l'hémisphère, l'aire comprise entre les courbes PMB sera

$$2\pi R^2 - 4R^2;$$

elles laissent donc en dehors d'elles la surface carrable $4R^2$. C'est sous une autre forme le théorème de Viviani, et il est très-aisé de montrer l'identité de la courbe dont l'équation est $\theta = \psi$ avec celle qui (**424**) se projette sur l'équateur suivant un cercle de rayon R.

430. *Surface de l'ellipsoïde.* — La détermination de la surface de l'ellipsoïde est impossible sous forme finie explicite. On peut seulement effectuer une des deux intégrations auxquelles conduit la méthode générale. Les géomètres sont souvent revenus sur cette question dont nous donnerons plusieurs solutions.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{9}$$

l'équation d'un ellipsoïde. On peut déterminer les points de la surface par les valeurs de deux variables θ et ψ telles, que

$$\begin{cases} x = a \sin\theta \cos\psi, \\ y = b \sin\theta \sin\psi, \\ z = c \cos\theta. \end{cases} \tag{10}$$

Ces variables, dans le cas où l'ellipsoïde devient une sphère, coïncident avec celles que nous avions adoptées (**428**), et il faut, comme dans le cas de la sphère, pour obtenir tous les points de l'ellipsoïde, faire varier θ de zéro à π, et ψ de zéro à 2π.

On déduit des équations (10)

$$\begin{aligned}
dx &= a\cos\theta\cos\psi\, d\theta - a\sin\theta\sin\psi\, d\psi, \\
dy &= b\cos\theta\sin\psi\, d\theta + b\sin\theta\cos\psi\, d\psi, \\
dz &= -c\sin\theta\, d\theta, \\
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2(a^2\cos^2\theta\cos^2\psi + b^2\cos^2\theta\sin^2\psi + c^2\sin^2\theta) \\
&\quad + d\psi^2(a^2\sin^2\theta\sin^2\psi + b^2\sin^2\theta\cos^2\psi) + 2\,d\theta\,d\psi\,[(b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi)],
\end{aligned}$$

et l'élément de surface $d\sigma$ est par conséquent

$$d\sigma = d\theta\, d\psi \sqrt{[\cos^2\theta(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi) + c^2\sin^2\theta]\sin^2\theta[a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi] - (b^2 - a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\psi\cos^2\psi},$$

ou en réduisant

$$d\sigma = abc\sin\theta\, d\theta\, d\psi \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}},$$

et par conséquent la surface totale S est représentée par

$$S = abc \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\psi \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta \cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\psi}{b^2}};$$

et l'intégration par rapport à θ peut aisément s'effectuer.

431. Si nous adoptons pour coordonnées les paramètres des surfaces homofocales, hyperboloïde à une nappe et hyperboloïde à deux nappes, qui passent par chaque point de l'ellipsoïde considéré, en adoptant la notation (I, **128**),

$$ds^2 = (\rho^2 - \nu^2)\left[\frac{(\rho^2 - \mu^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} d\rho^2 + \frac{(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} d\nu^2\right],$$

et par conséquent la surface de l'ellipsoïde peut être représentée par

$$\int\int d\rho \, d\nu \, (\nu^2 - \rho^2) \sqrt{\frac{(\mu^2 - \rho^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

et pour représenter le huitième de la surface, il faut étendre les intégrations par rapport à ρ de zéro à b et par rapport à ν de b à c.

Emploi des coordonnées sphériques pour une surface quelconque.

432. On peut, pour évaluer une surface quelconque, décrire de l'origine des coordonnées comme centre une sphère de rayon égal à l'unité, et la décomposer, comme (**428**), en éléments dont l'expression générale sera $\sin\theta \, d\theta \, d\psi$; en prenant pour élément correspondant de la surface considérée l'élément intercepté sur elle par la pyramide ayant pour sommet l'origine et l'élément sphérique pour base, l'expression de cet élément est évidemment

$$\frac{\rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi}{\cos\gamma},$$

γ étant l'angle formé par le rayon vecteur ρ avec la normale à l'élément de surface.

Cette méthode a été employée élégamment à la détermination de l'aire de la surface, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les plans tangents d'une surface donnée.

On a vu (I, **17**) que le plan tangent d'une telle surface est le même en chaque point que celui d'une sphère ayant pour diamètre le rayon vecteur r mené de

l'origine au point correspondant de la surface sur les plans tangents de laquelle on abaisse les perpendiculaires. La fraction $\frac{\rho^2}{\cos\gamma}$, qui figure dans l'expression de la surface élémentaire, peut être, par conséquent, remplacée par le produit ρr, et l'élément de la surface cherchée est représenté par

$$\rho r \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

θ et ψ désignant les coordonnées angulaires du rayon vecteur ρ.

Supposons, par exemple, que la surface donnée soit un ellipsoïde ayant pour centre l'origine des coordonnées; en nommant les axes a, b, c et λ, μ, ν les angles formés par la normale au point dont les coordonnées sont x, y, z, on trouve aisément

$$\rho r = \sqrt{a^4 \cos^2\lambda + b^4 \cos^2\mu + c^4 \cos^2\nu};$$

c'est-à-dire, en introduisant les angles θ et ψ,

$$\rho r = \sqrt{a^4 \cos^2\theta + (b^4 \sin^2\psi + c^4 \cos^2\psi) \sin^2\theta},$$

et l'aire totale de la surface proposée est, par conséquent,

$$S = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\psi \sqrt{a^4 \cos^2\theta + (b^4 \sin^2\psi + c^4 \cos^2\psi) \sin^2\theta},$$

c'est-à-dire (430) précisément la surface de l'ellipsoïde dont les axes seraient $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$ et $\frac{ab}{c}$.

Introduction des rayons de courbure dans l'expression de la surface.

433. On peut, pour représenter les points d'une surface, adopter les deux angles qui définissent la direction de la normale en ce point. Menons par l'origine des coordonnées rectangulaires une parallèle à cette normale. Soit θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des Z, et ψ l'angle dièdre formé par le plan des ZX avec le plan conduit par elle et par l'axe des Z. L'élément de la sphère de rayon unité évalué au moyen des angles θ et ψ est (428) $\sin\theta \, d\theta \, d\psi$. Le rapport de cet élément à l'élément *correspondant* de la surface considérée est (I, 722) la courbure $\frac{1}{R_1 R_2}$ de cet élément, en nommant R_1 et R_2 les deux rayons principaux de la surface. L'élément

de surface est donc

$$R_1 R_2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

et la surface totale est représentée par

$$\int\int R_1 R_2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

la double intégration s'appliquant à toutes les valeurs de θ et de ψ qui répondent aux points de l'aire considérée. S'il s'agit d'une surface fermée et convexe, on devra, pour l'avoir tout entière, intégrer entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$.

434. Appliquons la formule précédente au calcul de la surface totale d'un ellipsoïde.

On a (I, 634), en adoptant les notations habituelles,

$$R_1 R_2 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2}.$$

L'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On en déduit

$$\frac{x}{a^2} + \frac{pz}{c^2} = 0,$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{qz}{c^2} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2} + \frac{zr}{c^2} = 0,$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} + \frac{zt}{c^2} = 0,$$

$$\frac{pq}{c^2} + \frac{zs}{c^2} = 0;$$

par suite

$$rt - s^2 = \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right) - \frac{p^2 q^2}{z^2}$$

et

$$R_1 R_2 = \frac{z^2(1 + p^2 + q^2)^2}{c^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right) - p^2 q^2}.$$

Remarquant que p^2, q^2 et 1 sont proportionnels à $\frac{x^2}{a^4}$, $\frac{y^2}{b^4}$ et $\frac{z^2}{c^4}$, on en déduit

$$R_1 R_2 = \frac{z^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}{c^4\left(\frac{z^2}{a^2c^4}+\frac{x^2}{a^4c^2}\right)\left(\frac{z^2}{b^2c^4}+\frac{y^2}{b^4c^2}\right)-\frac{x^2y^2}{a^4b^4}},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

$$R_1R_2=\frac{z^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}{\frac{1}{a^2b^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{x^2y^2}{a^4b^4}}=\frac{a^2b^2z^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2,$$

et, comme en nommant p la distance du centre au plan tangent, on a

$$p^2=\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

$$R_1 R_2=\frac{a^2b^2c^2}{p^4},$$

et la surface totale S de l'ellipsoïde est représentée par

$$S=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R_1 R_2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi = a^2b^2c^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{p^4}\, d\theta\, d\psi;$$

c'est-à-dire, en remplaçant p par sa valeur en fonction de θ et de ψ,

$$S=a^2b^2c^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{[a^2\cos^2\theta+(b^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)\sin^2\theta]^2}\, d\theta\, d\psi;$$

et, à cause du partage de l'ellipsoïde en huit parties symétriques :

$$S=8a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{[a^2\cos^2\theta+(b^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi)\sin^2\theta]^2}\, d\theta\, d\psi,$$

on a (230)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(m^2\sin^2\psi + n^2\cos^2\psi)^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{mn^3} + \frac{1}{nm^3}\right),$$

par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{[a^2\cos^2\theta + (b^2\cos^2\psi + c^2\sin^2\psi)\sin^2\theta]^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\cos^2\psi + (a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)\sin^2\psi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\right];$$

la surface S est donc exprimée par la somme de deux intégrales simples, et l'on a

$$\frac{\pi S}{2a^2b^2c^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}(a^2\cos^2\theta + c^2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Théorème de Gauss.

435. Considérons une surface fermée de forme quelconque et un point O situé dans son intérieur. Un cône infiniment petit ayant son sommet en O et dont l'angle mesuré par la surface interceptée sur la sphère concentrique de rayon unité est représenté par $d\omega$, interceptera sur la surface un élément $d\sigma$ mesuré par la formule évidente

$$d\sigma = \frac{r^2\, d\omega}{\cos\overline{Nr}},$$

où r désigne la distance du sommet O à l'élément $d\sigma$ et $\overline{NR}$ l'angle formé par les génératrices du cône avec la normale à $d\sigma$. On en déduit

$$d\omega = \frac{d\sigma\cos\overline{Nr}}{r^2}.$$

et comme la somme des angles $d\omega$ étendue à la sphère entière du rayon unité est

égale à 4π, on a

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{d\sigma \cos\overline{Nr}}{r^2} = 4\pi,$$

l'intégration s'étendant à tous les éléments de la surface.

Le théorème ne souffre aucune exception. Si le cône prolongé du même côté du sommet O coupe la surface en plus d'un point, le nombre des intersections sera nécessairement impair et les éléments correspondants de l'intégrale, égaux alternativement à $d\omega$ et à $-d\omega$, auront toujours, dans l'intérieur d'un même cône élémentaire, une somme égale à $d\omega$.

436. Lorsque le point O est extérieur à la surface fermée, l'intégrale qui forme le premier membre de (A) se réduit à zéro; le cône d'ouverture $d\omega$ coupe en effet dans ce cas la surface un nombre pair de fois, et les éléments correspondants de l'intégrale étant alternativement $-d\omega$ et $+d\omega$, leur somme est égale à zéro et l'on a

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{d\sigma \cos\overline{Nr}}{r^2} = 0.$$

437. Considérons par exemple un ellipsoïde dont les axes sont a, b, c, et soient α, β, γ un point quelconque extérieur ou intérieur, on a, en adoptant les notations du n° 430,

$$d\sigma = abc \sin\theta \, d\theta \, d\psi \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}}.$$

Les cosinus des angles formés par la normale avec les axes sont

$$\frac{\sin\theta\cos\psi}{a\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}}},$$

$$\frac{\sin\theta\sin\psi}{b\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}}},$$

$$\frac{\cos\theta}{c\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}}},$$

et les cosinus des angles formés par le rayon r avec les axes

$$\frac{x-\alpha}{r}, \quad \frac{y-\beta}{r}, \quad \frac{z-\gamma}{r}.$$

On a par conséquent

$$\cos\overline{\mathrm{N}r} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2}}}\left(\frac{x-\alpha}{ar}\cos\theta\cos\psi + \frac{y-\beta}{br}\sin\theta\sin\psi + \frac{z-\gamma}{cr}\cos\theta\right),$$

et par conséquent, en ayant égard aux valeurs de x, y, z (**430**), l'intégrale

$$\int\frac{d\sigma\cos\overline{\mathrm{N}r}}{r^2} = abc\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta\,d\psi}{r^3}\left(\frac{x-\alpha}{a^2}x + \frac{y-\beta}{b^2}y + \frac{z-\gamma}{c^2}z\right)$$

est égale à zéro ou à 4π, suivant que le point dont α, β, γ sont les coordonnées est situé à l'extérieur ou à l'intérieur de l'ellipsoïde.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES VOLUMES.

Décomposition en cylindres infiniment petits.

438. La méthode la plus souvent employée pour évaluer un volume consiste à le décomposer en tranches par des plans parallèles infiniment voisins et à obtenir ensuite par une intégration la somme de ces tranches, dont chacune peut être assimilée à un cylindre ayant pour base l'aire de la section et pour hauteur la distance infiniment petite des plans parallèles. Le choix des sections étant arbitraire, on devra, dans chaque cas, les choisir de manière à rendre aussi facile qu'il se pourra l'évaluation de chacune d'elles et ne la calculer par une intégration que lorsqu'il ne semblera pas possible d'en apercevoir immédiatement l'expression.

S'il s'agit par exemple d'un solide de révolution, on adoptera des sections perpendiculaires à l'axe qui sont des cercles dont l'expression s'obtiendra immédiatement. Supposons qu'une courbe donnée située dans le plan des XY tourne autour de l'axe des X, le plan perpendiculaire à l'axe situé à la distance X coupe le volume suivant un cercle de rayon y dont la surface est πy^2; le cylindre compris entre cette section et la section infiniment voisine a donc pour expression

$$\pi y^2\, dx,$$

et le volume compris entre les deux sections qui correspondent aux abscisses a et b est

$$\pi \int_a^b y^2\, dx.$$

439. Considérons l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Le plan parallèle à celui des YZ mené à la distance X le coupe suivant une ellipse

dont les axes sont $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et la surface

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx.$$

Le volume entier est donc représenté par l'intégrale

$$\int_{-a}^{+a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

440. Soit à évaluer le volume d'un conoïde. On nomme comme on sait *conoïde* la surface engendrée par une droite parallèle à un plan fixe qui rencontre constamment une droite donnée et une courbe donnée que nous supposerons fermée. Cherchons la portion de volume comprise entre la courbe directrice qui sert de base et la portion de directrice rectiligne sur laquelle les génératrices vont se rejoindre deux à deux. Les plans parallèles au plan directeur coupent évidemment un tel

volume suivant des triangles, et si l'on nomme T le triangle correspondant au plan dont l'ordonnée est z, l'expression du volume est

$$\int \mathrm{T}\,dz.$$

Supposons le plan de la base parallèle à la directrice rectiligne, et soit γ l'angle qu'il forme avec le plan directeur, c la corde AB interceptée sur la base par le plan sécant dont l'ordonnée est z, p la hauteur du conoïde, h celle du triangle ABQ dont c est la base et ε enfin la distance de la corde c à la corde infiniment voisine déterminée par le plan sécant dont l'ordonnée est $z+dz$, on aura

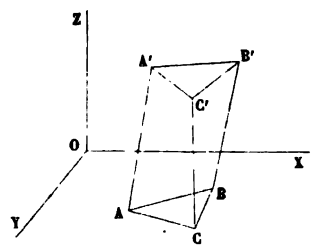
$$h=\frac{p}{\sin\gamma},$$
$$dz=\varepsilon\sin\gamma,$$

et par conséquent

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}\frac{cp}{\sin\gamma},$$
$$\mathrm{T}\,dz=\frac{1}{2}cp\varepsilon,$$
$$\int \mathrm{T}\,dz=\frac{1}{2}p\int c\varepsilon,$$

et comme $\int c\varepsilon$ est évidemment la surface de la base, on voit qu'un conoïde dont la directrice est parallèle au plan de la base a pour mesure le produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

441. Considérons enfin le volume défini de la manière suivante : ABC, A′B′C′ sont deux triangles quelconques situés dans des plans parallèles; par les quatre côtés de chacun des quadrilatères ABA′B′, ACA′C′, BCB′C′ on fait passer un paraboloïde hyperbolique. Ces paraboloïdes et les deux triangles servent de faces au volume considéré. Prenons pour plan des XY celui du triangle ABC, les plans



parallèles aux deux bases ABC, A′B′C′ étant parallèles à deux génératrices de chaque paraboloïde les couperont suivant des lignes droites et par conséquent donneront pour sections des triangles. Si l'on nomme T la surface de celui qui correspond à la section dont l'ordonnée est z et h la hauteur du solide, c'est-à-dire la distance des deux bases parallèles, le volume cherché a pour expression

$$\int_0^h \mathrm{T}\,dz.$$

Le triangle T, étant parallèle au plan des XY, se projette en vraie grandeur sur ce plan, et comme les équations des droites AA′, CC′, BB′ sont du premier degré, les coordonnées des trois sommets sont des fonctions du premier degré de z; la surface du triangle est donc elle-même, d'après la formule bien connue qui la représente, une fonction de la forme

$$\mathrm{A}z^2 + \mathrm{A}'z + \mathrm{A}'',$$

A, A′ et A″ étant trois constantes, le volume est représenté par l'intégrale d'un trinôme entier du second degré. La formule donnée (367) comme exprimant approximativement sa valeur est donc dans ce cas rigoureusement exacte, et si l'on nomme B, b, M les surfaces des deux sections extrêmes et de la section faite par un plan équidistant des deux bases, on aura

$$\mathrm{V} = \frac{h}{6}(b + 4\mathrm{M} + \mathrm{B}).$$

442. Le résultat précédent peut être généralisé. Considérons sur le plan des XY un polygone quelconque P et par chacun de ses sommets une ligne droite. Si nous coupons le faisceau de droites par un plan parallèle à celui des XY, nous obtiendrons les sommets d'un polygone de même nombre de côtés que P. Recouvrons, comme dans le cas précédent, par des paraboloïdes hyperboliques chacun des quadrilatères dont les côtés opposés sont les côtés correspondants des deux polygones, le volume enfermé entre eux et les surfaces des deux polygones pourra s'évaluer par une formule identique à celle qui termine le paragraphe précédent. La surface de la section faite par un plan parallèle aux bases et mené à la distance z de l'une d'elles sera encore en effet une fonction entière et du second degré de z, et c'est sur cette circonstance seule que reposait la démonstration qui s'applique à tous les cas pour lesquels elle se présente. Le polygone P pouvant avoir un nombre quelconque de côtés peut évidemment être remplacé par une courbe fermée quelconque, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Si une surface réglée est telle, que deux plans parallèles la coupent suivant deux courbes fermées de surfaces B *et* b *et que la section faite à égale distance de chacune d'elles ait pour surface* M, *le volume compris entre la surface et les deux bases* B *et* b, *dont la distance est* h, *a pour expression*

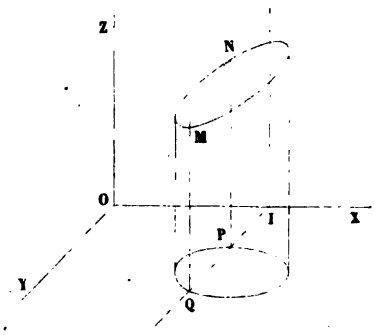
$$\frac{h}{6}\cdot B + 4M + b\,.$$

443. La démonstration de la formule précédente suppose seulement que la section parallèle à la base et menée à la distance z soit une fonction entière et du second degré de z, et cette condition est remplie dans un grand nombre de cas, lorsque le volume est compris par exemple entre une surface quelconque du second degré et deux sections parallèles de forme elliptique; la mesure d'un tel volume est donc le sixième du produit de la hauteur par la somme de ses deux bases ajoutée à quatre fois la section faite à égale distance de chacune d'elles.

Emploi d'une double intégration.

444. La décomposition d'un volume en cylindres infiniment minces à bases parallèles peut s'appliquer à tous les cas, mais il arrive le plus ordinairement que l'expression de la section qui sert de base à l'un de ces cylindres, au lieu d'être connue *à priori*, doit elle-même être déterminée par une intégration préalable. Le calcul du volume exige alors deux intégrations successives, et son expression est une *intégrale double*. Considérons le volume compris dans l'intérieur d'un cylindre parallèle à l'axe des Z, entre le plan des XY qui lui sert de base et une surface connue qui remplace l'autre base. Les plans parallèles à celui des ZY détermine-

ront dans un tel volume des sections terminées par trois droites et un arc de courbe. Si B désigne la surface de l'un de ces quadrilatères formant la section dont



l'abscisse est x, le volume considéré a pour expression

$$V = \int B\,dx,$$

l'intégrale étant prise entre les abscisses extrêmes a et b de la courbe qui sert de base au cylindre. La surface B est une aire plane QPMN qui s'obtiendra elle-même à l'aide d'une intégration, si l'équation de la surface qui termine le volume est

$$z = \varphi(x, y).$$

Cette équation, si l'on y considère x comme constant, représente la courbe qui limite la section B, et l'on a, en nommant y_0 et y_1 les deux valeurs de y représentées sur la figure par IP et IQ et qui se déduisent de l'équation de la courbe de base :

$$B = \int_{y_0}^{y_1} z\,dy.$$

On en conclut

$$V = \int_a^b B\,dx = \int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} z\,dy.$$

L'ordre dans lequel se succèdent les opérations est indiqué par la démonstration même. On doit d'abord intégrer $z\,dy$ par rapport à y en y considérant x comme constant et entre les limites y_0 et y_1 qui sont fonctions de x; le résultat de cette première opération est une fonction de x que l'on doit multiplier par dx pour l'intégrer ensuite entre les limites constantes a et b.

445. L'expression du volume, que l'on écrit souvent

$$\int\int z\,dx\,dy,$$

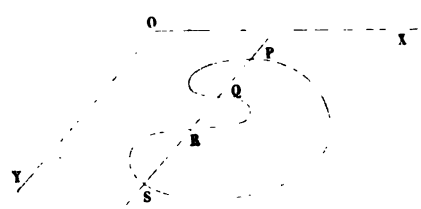
peut être considérée sous un autre point de vue qu'il importe de connaître. On peut regarder le produit $z\,dx\,dy$ comme l'expression générale de l'un des éléments dont la somme forme le volume cherché. $z\,dx\,dy$ est en effet, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, la portion du volume cherché détachée par un parallélipipède parallèle à l'axe des z ayant pour base le rectangle infiniment petit $dx\,dy$, dont les côtés dx et dy sont respectivement parallèles à l'axe des X et à l'axe des Y. Le volume total est la somme des parallélipipèdes analogues dont les bases composent la base donnée du cylindre. On peut, pour faire cette sommation, réunir d'abord tous les parallélipipèdes compris entre deux plans infiniment voisins parallèles à ZY et ayant pour abscisses x et $x+dx$. Cette première somme, qui constitue la tranche cylindrique considérée dans la démonstration précédente, est

$$dx\int z\,dy,$$

les limites étant données par les valeurs extrêmes de y qui correspondent à l'abscisse x; pour faire la somme de ces tranches, on intégrera ce premier résultat entre deux limites constantes représentant les valeurs extrêmes de x, et l'on retrouve ainsi la formule

$$V=\int_a^h dx\int_{y_0}^{y_1} z\,dy.$$

446. Lorsque la base du cylindre et la surface qui le termine prennent des formes plus compliquées, la formule précédente doit être quelquefois modifiée. Nos démonstrations supposent en effet qu'à chaque abscisse x correspondent deux points seulement de la base. Si, par exemple, une parallèle à l'axe des Y coupe la base du cylindre en quatre points P, Q, R, S ayant pour ordonnées y_1, y_2, y_3, y_4,



il faudra, pour obtenir tous les éléments de la somme cherchée, faire deux intégrations; la première de y_1 à y_2, la seconde de y_3 à y_4. Si l'on avait six intersections, il y aurait trois intégrations à faire et ainsi de suite.

447. La détermination d'un volume de forme quelconque est implicitement comprise dans ce qui précède. Quelle que soit en effet la forme de la surface limite dont nous supposons l'équation connue par rapport à trois axes rectangulaires, on

commencera par déterminer le cylindre circonscrit parallèle à l'axe des Z et dont la base sur le plan des XY nous fera connaître la portion de ce plan sur laquelle se projette le volume cherché qui deviendra la différence de deux des cylindres dont nous avons étudié l'expression. L'équation de la surface étant

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

les points de contact avec le cylindre circonscrit sont ceux pour lesquels la normale étant perpendiculaire à l'axe des z, on a

$$\frac{dF}{dz} = 0. \tag{2}$$

L'élimination de z entre les équations (1) et (2) donnera l'équation du contour apparent qui sert de base aux deux cylindres dont la différence est le volume cherché. En nommant z_2 et z_1 les valeurs de z qui correspondent aux coordonnées x et y, on a évidemment

$$V = \int dx \int dy\,(z_2 - z_1),$$

les limites étant déterminées d'après la forme du contour apparent, comme il a été dit (**443**).

Si les parallèles à l'axe des z coupaient en plus de deux points la surface qui limite le volume, les intersections seraient toujours en nombre pair. Soient z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 leurs ordonnées, l'élément de volume serait alors

$$(z_6 - z_5 + z_4 - z_3 + z_2 - z_1)\,dx\,dy,$$

et l'intégration se ferait de la même manière que dans le cas précédent.

448. Le choix des surfaces élémentaires dans lesquelles on décompose la projection du volume sur le plan des XY est entièrement arbitraire, et les éléments rectangulaires $dx\,dy$ peuvent être remplacés par d'autres qui, dans certains cas, donneront lieu à des calculs plus simples.

Il est souvent commode par exemple d'employer des coordonnées polaires. En menant par l'origine dans le plan des XY une série de rayons vecteurs coupés orthogonalement par une série de cercles, l'élément infiniment petit compris entre les rayons vecteurs correspondant aux angles ω et $\omega + d\omega$ et les cercles correspondant aux angles $\rho + d\rho$ a pour surface

$$\rho\,d\omega\,d\rho.$$

Le volume du parallélipipède dont il est la base est donc

$$(3) \qquad (z_2 - z_1)\rho\, d\omega\, d\rho.$$

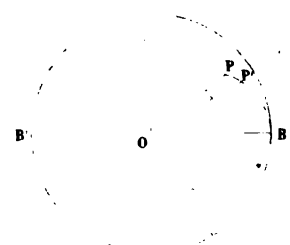
En nommant z_2 et z_1 les ordonnées des deux points où la parallèle à l'axe des Z menée par un point de cet élément rencontre la surface qui limite le volume, on intégrera l'expression (3) par rapport à ρ en considérant ω comme constant et entre deux limites qui seront les valeurs de ρ qui, dans l'équation de la courbe limite, correspondent à la valeur considérée de ω. On obtiendra ainsi

$$d\omega \int (z_2 - z_1)\rho\, d\rho,$$

et cette expression, qui ne contient que la variable ω, sera intégrée entre deux limites constantes qui sont les valeurs extrêmes de cet angle.

449. Considérons, pour y appliquer la méthode précédente, le volume détaché dans une sphère par un cylindre droit ayant pour base un petit cercle décrit sur l'un des rayons comme diamètre.

Soit O le centre de la sphère et OB le rayon qui sert de diamètre au cercle de



base du cylindre dont nous prendrons le plan pour celui des XY. L'élément $\rho\, d\omega\, d\rho$ est évidemment la base d'un parallélipipède dont la portion comprise dans la sphère a pour hauteur $2\sqrt{R^2 - \rho^2}$, et l'élément du volume cherché est par conséquent

$$2\sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\omega.$$

Intégrons d'abord par rapport à ρ. Si ω désigne l'angle du rayon vecteur avec le diamètre OA, les limites seront évidemment o et $R\cos\omega$; on a donc pour la partie du volume cherché qui se projette sur le secteur POP' :

$$2\, d\omega \int_0^{R\cos\omega} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho = d\omega \left[-\frac{2}{3}(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R\cos\omega} = \frac{2}{3}(R^3 - R^3 \sin^3\omega)\, d\omega.$$

$R^3 \sin^3\omega$ remplace ici $(\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\omega})^{\frac{3}{2}}$ et doit être pris en valeur absolue.

Lors donc que pour trouver tous les éléments nous ferons varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $\sin^2\omega$ devra être changé de signe dans les parties de l'intégrale pour lesquelles ω est négatif; mais on peut se dispenser d'avoir égard à cette remarque, en intégrant entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne évidemment la moitié du volume cherché, que l'on doublera ensuite. Le volume V est donc

$$V = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3 - R^3\sin^3\omega)\, d\omega = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3.$$

Si l'on considère un second cylindre égal au précédent et de même direction, ayant pour base le cercle décrit sur le rayon OB′ prolongement de OB, comme diamètre, le volume des deux cylindres réunis sera

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{16}{9}R^3,$$

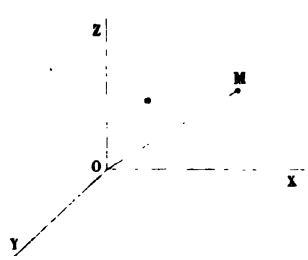
et ce qui reste de la sphère quand on les enlève est par conséquent

$$\frac{16}{9}R^3.$$

Emploi des coordonnées polaires.

450. Supposons que l'on adopte, pour représenter la position d'un point, les trois coordonnées polaires ρ, θ et ψ, dont nous avons fait plusieurs fois usage.

OX, OY, OZ étant trois axes rectangulaires, la coordonnée ρ est la distance OM du point considéré à l'origine, θ l'angle de OM avec l'axe des Z, et ψ l'angle dièdre du plan MOZ avec ZOX.



Pour évaluer un volume dont la surface est rapportée à ce système de coordonnées, il convient de le décomposer en éléments infiniment petits compris entre deux sphères lieux des points correspondant aux rayons $\rho + d\rho$, deux plans lieux des points correspondant aux angles ψ et $\psi + d\psi$, et deux cônes lieux des points

correspondant aux angles θ et $\theta + d\theta$. Cet élément, dont les faces se coupent deux à deux à angles droits, peut être assimilé à un parallélipipède rectangle ayant pour arêtes (I, **121**) $d\rho$, $\rho \sin\theta\, d\psi$ et $\rho\, d\theta$; il a par conséquent pour mesure

$$\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi.$$

Le volume total est la somme des expressions analogues relatives à tous les volumes élémentaires qui le composent. Nous supposerons, pour faire cette sommation, que deux des coordonnées restant constantes on fasse varier la troisième entre deux limites qui dépendent de la forme du corps et des valeurs attribuées aux deux coordonnées constantes. Si, par exemple, θ et ψ restent fixes, ainsi que $d\theta$ et $d\psi$, les éléments qui répondent aux diverses valeurs de ρ seront compris dans l'intérieur d'une même pyramide à base rectangulaire, ayant pour sommet l'origine, et leur somme sera

$$\sin\theta\, d\theta\, d\psi \int \rho^2 d\rho,$$

l'intégrale devant être prise entre les limites R_1 et R_2 que fournit, en fonction de θ et de ψ, l'équation de la surface qui limite le corps. Cette première intégration peut toujours s'effectuer et donne

$$\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{3} (R_2^3 - R_1^3).$$

En faisant varier ψ, θ restant constant, on obtiendra la portion du corps comprise entre deux cônes infiniment voisins, ayant pour angles θ et $\theta + d\theta$; cette portion est

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{3} \int d\psi\, (R_2^3 - R_1^3),$$

les limites de l'intégrale étant les valeurs extrêmes de ψ, ψ_1 et ψ_2 qui dépendent de l'angle θ. Il faudra enfin intégrer, par rapport à θ, entre les valeurs extrêmes θ_1 et θ_2 de cet angle, qui sont des constantes, et le volume est

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta}{3}\, d\theta \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi\, (R_2^3 - R_1^3).$$

Dans la première intégrale ψ_1, ψ_2, R_1 et R_2 dépendent de l'angle θ, qui est traité comme constant; dans la seconde, θ_1 et θ_2 sont deux limites constantes.

Lorsque l'origine des coordonnées est située dans l'intérieur du corps, les angles θ et ψ peuvent prendre toutes les valeurs, et, pour embrasser toutes les

directions possibles, ρ étant supposé essentiellement positif, il faut évidemment faire varier ψ de o à 2π pour obtenir tous les points d'un plan passant par l'axe des Z, puis θ de o à π seulement, pour que, dans ce plan, le rayon vecteur prenne toutes les positions possibles.

Le volume d'une sphère de rayon R, ayant pour centre l'origine, sera, par exemple,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{3}\, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi\, R^3 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

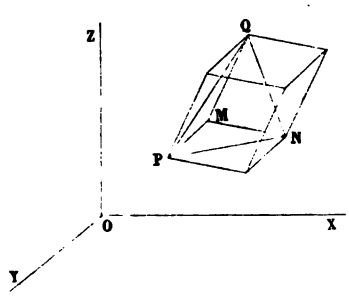
Emploi d'un système quelconque de coordonnées.

451. Si l'on adopte, pour représenter les points de l'espace, les valeurs des trois paramètres α, β, γ, définis en fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z,

$$\alpha = \varphi_1(x, y, z),$$
$$\beta = \varphi_2(x, y, z),$$
$$\gamma = \varphi_3(x, y, z),$$

à une valeur donnée de l'un des paramètres correspond une surface, et les points se trouvent définis par l'intersection des trois surfaces qui s'y croisent en découpant l'espace en parallélipipèdes infiniment petits. Il faut, pour évaluer un volume, adopter pour élément le parallélipipède infiniment petit compris entre les surfaces correspondant aux valeurs α, $\alpha + d\alpha$, β, $\beta + d\beta$, γ et $\gamma + d\gamma$ des trois paramètres, et dont il faut d'abord trouver l'expression.

Soit MNPQ ce parallélipipède, la face MPQ appartenant à la surface qui répond à la valeur α du premier paramètre, MQN à celle qui correspond à β, et MNP à



celle qui correspond à γ. Les trois faces opposées correspondent aux valeurs $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ des trois paramètres; le parallélipipède étant infiniment petit et la courbure de ses faces insensibles, on peut le traiter comme un parallélipipède à surfaces planes égal évidemment à six fois la pyramide, dont les

sommets sont M, N, P, Q : ces sommets ont pour coordonnées

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x+\frac{dx}{d\alpha}d\alpha, & y+\frac{dy}{d\alpha}d\alpha, & z+\frac{dz}{d\alpha}d\alpha, \\ x+\frac{dx}{d\beta}d\beta, & y+\frac{dy}{d\beta}d\beta, & z+\frac{dz}{d\beta}d\beta, \\ x+\frac{dx}{d\gamma}d\gamma, & y+\frac{dy}{d\gamma}d\gamma, & z+\frac{dz}{d\gamma}d\gamma, \end{array}$$

et par conséquent, d'après une formule bien connue qui exprime le volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses sommets, l'expression du volume MNPQ est égal à

$$\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{6}\left|\begin{array}{lll} \frac{dx}{d\alpha}, & \frac{dy}{d\alpha}, & \frac{dz}{d\alpha}, \\ \frac{dx}{d\beta}, & \frac{dy}{d\beta}, & \frac{dz}{d\beta}, \\ \frac{dx}{d\gamma}, & \frac{dy}{d\gamma}, & \frac{dz}{d\gamma}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire (I, 71) au produit de $\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{6}$ par le déterminant fonctionnel de x, y, z, considérés comme fonction de α, β, γ, ou, ce qui revient au même, à $\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{6}$ divisé par le déterminant de α, β, γ, considérés comme fonctions de x, y, z. Le parallélipipède égal à six fois le tétraèdre s'obtiendra en supprimant le diviseur 6.

Pour sommer les éléments qui composent un volume donné, il faudra, comme dans le cas précédent, faire varier successivement les trois variables. On intégrera d'abord, par exemple, par rapport à α, en considérant β et γ comme constants, et l'on obtiendra ainsi la portion de l'espace formant un canal infiniment petit, à section quadrangulaire, compris entre les surfaces qui correspondent aux paramètres β, $\beta+d\beta$, γ, $\gamma+d\gamma$. Les limites de cette première intégration seront deux valeurs de α exprimées en fonction de β et de γ. Le résultat sera de la forme

$$d\beta\, d\gamma\, \mathrm{F}(\beta, \gamma).$$

On intégrera, en second lieu, par rapport à β, en traitant γ comme constant, et l'on obtiendra ainsi la portion de volume comprise entre les surfaces correspondant aux valeurs γ, $\gamma+d\gamma$; les limites seront des fonctions de γ, et le résultat sera de la forme

$$d\gamma\, \pi(\gamma).$$

On intégrera enfin pour avoir le volume total entre deux limites égales aux valeurs extrêmes de γ, et l'on aura

$$V = \int d\alpha\, d\beta\, d\gamma \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\alpha}, & \frac{dy}{d\alpha}, & \frac{dz}{d\alpha}, \\ \frac{dx}{d\beta}, & \frac{dy}{d\beta}, & \frac{dz}{d\beta}, \\ \frac{dx}{d\gamma}, & \frac{dy}{d\gamma}, & \frac{dz}{d\gamma}. \end{vmatrix}$$

452. Nous indiquerons encore une formule très-générale pour l'évaluation d'une classe nombreuse de volumes.

Considérons sur une surface quelconque un contour fermé dont les points soient définis par deux variables α, β, liées suivant une loi connue à leurs coordonnées orthogonales x, y, z. Considérons le solide pyramidal ayant pour base cette portion de surface et pour sommet l'origine O des coordonnées. Prenons, pour l'évaluer, comme volume élémentaire, la pyramide ayant pour sommet le point O, et pour base le parallélogramme compris entre les courbes infiniment voisines qui correspondent aux valeurs α, $\alpha + d\alpha$, β, $\beta + d\beta$ des variables α et β. Cette pyramide est, comme il est aisé de le voir, le double du tétraèdre ayant pour sommet le point O d'une part, et d'autre part trois points infiniment voisins de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z, $x + \frac{dx}{d\alpha} d\alpha$, $y + \frac{dy}{d\alpha} d\alpha$, $z + \frac{dz}{d\alpha} d\alpha$, $x + \frac{dx}{d\beta} d\beta$, $y + \frac{dy}{d\beta} d\beta$, $z + \frac{dz}{d\beta} d\beta$; l'expression d'un tel volume est

$$\frac{d\alpha\, d\beta}{3} \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ \frac{dx}{d\alpha}, & \frac{dy}{d\alpha}, & \frac{dz}{d\alpha}, \\ \frac{dx}{d\beta}, & \frac{dy}{d\beta}, & \frac{dz}{d\beta}, \end{vmatrix}$$

en sorte que le volume cherché est

$$\frac{1}{3} \int\int d\alpha\, d\beta \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ \frac{dx}{d\alpha}, & \frac{dy}{d\alpha}, & \frac{dz}{d\alpha}, \\ \frac{dx}{d\beta}, & \frac{dy}{d\beta}, & \frac{dz}{d\beta}, \end{vmatrix}$$

les intégrations devant s'étendre à toutes les valeurs de α et de β qui correspondent à l'intérieur du contour. Si la surface considérée est fermée, on aura le

volume total en étendant les intégrations à toutes les valeurs de α et de β qui correspondent à ses divers points.

Introduction de l'élément de surface dans l'évaluation des volumes.

453. Gauss a fait connaître une formule remarquable dans laquelle l'expression de l'élement de surface s'introduit utilement dans le calcul d'un volume.

Supposons qu'un volume terminé par une surface quelconque soit projeté sur un plan, sur celui de xy par exemple, et que cette projection soit décomposée en éléments infiniment petits, dont l'un soit $d\omega$. Le prisme parallèle à l'axe des z, ayant $d\omega$ pour base, coupera la surface fermée en un nombre pair de points; nommons z, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 leurs ordonnées; l'élément de volume est

$$(z_6 - z_5 + z_4 - z_3 + z_2 - z_1)\, d\omega.$$

Soient $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ $d\sigma_4$, $d\sigma_5$, $d\sigma_6$ les éléments interceptés par le prisme sur la surface qui limite le volume considéré, et γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6 les angles de l'axe des z avec la normale *extérieure* à ces éléments, on voit aisément que γ_1, γ_3, γ_5, qui correspondent aux points où les arêtes pénètrent dans l'intérieur du volume, sont des angles obtus, et que γ_2, γ_4, γ_6 sont obtus; on a donc

$$d\omega = -d\sigma_1 \cos\gamma_1 = +d\sigma_2 \cos\gamma_2 = -d\sigma_3 \cos\gamma_3 = +d\sigma_4 \cos\gamma_4 = -d\sigma_5 \cos\gamma_5 = +d\sigma_6 \cos\gamma_6,$$

et l'expression de l'élément de volume devient par suite

$$z_6\, d\sigma_6 \cos\sigma_6 + z_5\, d\sigma_5 \cos\sigma_5 + z_4\, d\sigma_4 \cos\sigma_4 + z_3\, d\sigma_3 \cos\sigma_3 + z_2\, d\sigma_2 \cos\sigma_2 + z_1\, d\sigma_1 \cos\sigma_1,$$

et la somme de tous les éléments, c'est-à-dire le volume total, est évidemment l'intégrale

$$\int z\, d\sigma \cos\gamma,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ qui composent la surface, γ désignant toujours, bien entendu, l'angle de la normale extérieure avec l'axe des z.

454. L'emploi des coordonnées polaires conduit à une formule analogue. Considérons un volume en dehors duquel soit située l'origine des coordonnées; si de l'origine comme centre on décrit une sphère ayant pour rayon l'unité de longueur, on peut (**428**) la décomposer en éléments dont l'expression générale est $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$. La pyramide, qui a pour sommet l'origine et pour base un de ces éléments, coupe la surface qui limite le corps en un nombre pair de points. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y en ait six dont les rayons vecteurs soient ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6; si

l'on nomme $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, $d\sigma_5$, $d\sigma_6$ les éléments de surface interceptés, la portion du volume comprise dans l'intérieur de la pyramide a pour expression

$$\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{3}(\rho_6^3 - \rho_5^3 + \rho_4^3 - \rho_3^3 + \rho_2^3 - \rho_1^3).$$

γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6 étant les angles formés par le rayon vecteur avec la normale extérieure à chacun de ces éléments, on aura

$$-\frac{d\sigma_1\cos\gamma_1}{\rho_1^2} = \frac{d\sigma_2\cos\gamma_2}{\rho_2^2} = -\frac{d\sigma_3\cos\gamma_3}{\rho_3^2} = \frac{d\sigma_4\cos\gamma_4}{\rho_4^2} = -\frac{d\sigma_5\cos\gamma_5}{\rho_5^2}$$
$$= \frac{d\sigma_6\cos\gamma_6}{\rho_6^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et par conséquent l'expression devient

$$\frac{1}{3}(\rho_6\, d\sigma_6\cos\gamma_6 + \rho_5\, d\sigma_5\cos\gamma_5 + \rho_4\, d\sigma_4\cos\gamma_4 + \rho_3\, d\sigma_3\cos\gamma_3 + \rho_2\, d\sigma_2\cos\gamma_2 + \rho_1\, d\sigma_1\cos\gamma_1),$$

et la somme des expressions analogues est évidemment

$$\frac{1}{3}\int \rho\, d\sigma\cos\gamma,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface.

Application à l'ellipsoïde. — Considérons l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En adoptant, pour représenter les points de la surface, les variables p et q liées aux coordonnées x, y, z par les équations

$$x = a\sin p\cos q,\quad y = b\sin p\sin q,\quad z = c\cos p,$$

l'élément de surface est exprimé (430) par

$$abc\sin p\, dp\, dq\sqrt{\frac{\sin^2 p\cos^2 q}{a^2} + \frac{\sin^2 p\sin^2 q}{b^2} + \frac{\cos^2 p}{c^2}}.$$

L'angle de la normale extérieure avec l'axe des z a pour cosinus

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{z}{c^2}}{\sqrt{\dfrac{z^2}{c^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{x^2}{a^4}}} = \frac{\cos p}{c\sqrt{\dfrac{\sin^2 p\cos^2 q}{a^2} + \dfrac{\sin^2 p\sin^2 q}{b^2} + \dfrac{\cos^2 p}{c^2}}},$$

et l'expression du volume

$$\int z\,dz\cos\gamma$$

devient, par conséquent,

$$abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin p\cos^2 p\,dp\,dq = abc\int_0^{\pi}\sin p\cos^2 p\,dp\int_0^{2\pi}dq = \frac{4}{3}\pi abc.$$

455. Cherchons de nouveau, à l'aide de la même formule, l'expression du volume de l'ellipsoïde, en rapportant les points de la surface aux coordonnées elliptiques de M. Lamé.

L'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

un point de sa surface sera défini (I, **128**) par les paramètres ν et ρ qui satisfont aux équations

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

et tels que l'on ait $\mu^2>\nu^2>\rho^2$.

La distance de deux points infiniment voisins étant exprimée (I, **128**) sur la surface de l'ellipsoïde par

$$ds^2 = d\rho^2\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}+d\nu^2\frac{(\nu^2-\rho^2)(\nu^2-\mu^2)}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)},$$

l'élément de surface est

$$d\sigma = d\rho\,d\nu\,(\nu^2-\rho^2)\sqrt{\frac{(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

On a d'ailleurs (I, **128**)

$$z=\sqrt{\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}}$$

et

$$\cos\gamma = -\frac{\dfrac{z}{\mu^2-c^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\mu^4}+\dfrac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}}},$$

qui, d'après les valeurs de x, y, z (I, 128), devient

$$\cos\gamma = \frac{b\mu\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)(\mu^2-c^2)}}{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)c^2b^2(c^2-b^2)}},$$

et l'expression de l'élément du volume $z\,d\sigma$ est par conséquent

$$\frac{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{c^2(c^2-b^2)\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}\,d\rho\,d\nu.$$

Il faut, pour avoir le huitième du volume total, intégrer entre les limites o et b pour ρ, b et c, pour ν, et, en égalant le volume à l'expression connue

$$\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2},$$

on obtient la formule

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}\,d\rho\,d\nu = \frac{1}{6}\pi c^2(c^2-b^2).$$

456. L'application de la formule (451) au volume d'un ellipsoïde fournira la valeur d'une autre intégrale double, qui, de même que la précédente, ne serait pas aisée à calculer directement.

En adoptant les mêmes coordonnées orthogonales que dans le calcul précédent et gardant les mêmes notations, l'élément de surface $d\sigma$ est encore représenté par la formule

$$d\sigma = d\rho\,d\nu(\nu^2-\rho^2)\sqrt{\frac{(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Le produit $\rho\cos\gamma$, qui dans la formule trouvée (451) multiplie $d\sigma$, est la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan tangent; elle a pour expression

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}}},$$

et l'on a, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$p = \frac{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}\,\mu^2}{\sqrt{(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)}}.$$

L'élément de volume $\frac{1}{3} p\, d\sigma$ est par conséquent

$$\frac{1}{3}\frac{d\rho\, d\nu(\nu^2-\rho^2)\mu\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}},$$

et le volume de l'ellipsoïde

$$V=\frac{8}{3}\int_0^b\int_b^c \mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\, d\rho\, d\nu\, \frac{\nu^2-\rho^2}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}};$$

mais on a

$$V=\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2},$$

et par conséquent

$$\int_0^b\int_b^c \frac{\nu^2-\rho^2}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}\, d\rho\, d\nu=\frac{1}{2}\pi,$$

formule due à M. Lamé, et dont on a donné de nombreuses démonstrations.

CHAPITRE IV.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS SOLIDES.

Loi générale de l'attraction.

457. Nous n'avons pas à exposer ici comment l'attraction mutuelle des corps est devenue l'une des lois les mieux établies de la science; deux molécules matérielles, quelle que soit leur position dans l'univers, exercent l'une sur l'autre une action proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Un corps solide étant décomposé en éléments infiniment petits, chacun d'eux exerce sur une molécule donnée une action connue, et les règles de la statique permettent de les ramener à une force unique; mais les sommations à faire sont évidemment des intégrations, et c'est par là que l'étude de cette question trouve naturellement sa place ici.

Expression des composantes de l'attraction.

458. Rapportons le corps attirant à trois axes de coordonnées x, y, z, et soient α, β, γ les coordonnées du point attiré; l'élément infiniment petit du corps attirant $dx\,dy\,dz$, en nommant D sa densité, aura pour masse $D\,dx\,dy\,dz$, et si μ est la masse du corps attiré, la force d'attraction suivant la droite qui joint les deux points, dont les coordonnées sont x, y, z, α, β, γ, est

$$(1) \qquad \frac{f D \mu\, dx\, dy\, dz}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

f étant la constante qui représente l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Les trois composantes de la force (1), parallèlement aux axes de coordonnées,

sont :

$$(2)\quad \begin{cases} X = \dfrac{f D\mu(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz, \\[2ex] Y = \dfrac{f D\mu(y-\beta)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz, \\[2ex] Z = \dfrac{f D\mu(z-\gamma)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Pour obtenir les composantes totales A, B, C de l'attraction d'un corps sur la molécule μ, il faut faire la somme de ces composantes en l'étendant à tous les éléments du corps attirant. Pour obtenir les éléments qui correspondent à un parallélipipède formant une ligne parallèle à l'axe des x et compris entre quatre plans respectivement parallèles aux plans des ZX et des YX, il faudra intégrer par rapport à X, en considérant y, z et $dy\,dz$ comme des constantes, les limites étant des fonctions de y et de z fournies par l'équation de la surface qui limite le corps. On réunira ensuite les composantes relatives aux filets compris entre deux plans parallèles à celui des ZX; et pour cela on intégrera par rapport à Z, en laissant y et dy constants. Les limites de cette seconde intégration sont fonctions de y et fournies par l'équation de la courbe sur laquelle se projette le corps sur le plan des YZ. Une troisième intégration par rapport à y fournira enfin la composante relative à la somme des tranches qui composent le corps, et cette intégration sera prise entre des limites constantes qui sont les valeurs extrêmes de y correspondant aux plans tangents menés à la surface parallèlement au plan des ZX.

Il va sans dire que l'ordre des intégrations est arbitraire, et l'on pourrait, par exemple, intégrer d'abord par rapport à z, puis par rapport à x, et enfin par rapport à y.

459. L'expression des composantes est, d'après ce qui précède,

$$(3)\quad \begin{cases} A = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{f D\mu(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz, \\[2ex] B = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{f D\mu(y-\beta)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz, \\[2ex] C = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{f D\mu(z-\gamma)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

les intégrations pour s'étendre à la masse entière du corps attirant étant prises entre les limites qui ont été indiquées.

Lorsque la densité D est supposée constante, l'une des trois intégrations peut

s'effectuer dans tous les cas, et les composantes A, B et C dépendent chacune d'une intégrale double. Considérons, par exemple, la composante parallèle à l'axe des X,

$$A = fD\mu \int\int\int \frac{(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz,$$

on a

$$\int \frac{(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{-1}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si donc on suppose que le parallélipipède parallèle à l'axe des X, dont la base est $dy\,dz$, coupe la surface qui limite le corps en des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, la portion de l'intégrale relative à ce parallélipipède sera, en nommant $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ les distances de ces points d'intersection au point attiré,

$$dy\,dz\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}\right),$$

c'est-à-dire, en nommant $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, $d\sigma_5$, $d\sigma_6$ les éléments de surface interceptés,

$$-\frac{d\sigma_1}{r_1}\cos(N_1, X) - \frac{d\sigma_2}{r_2}\cos(N_2, X) - \frac{d\sigma_3}{r_3}\cos(N_3, X) - \frac{d\sigma_4}{r_4}\cos(N_4, X)$$
$$-\frac{d\sigma_5}{r_5}\cos(N_5, X) - \frac{d\sigma_6}{r_6}\cos(N_6, X).$$

(N_1, X), (N_2, X),... étant les angles que la normale extérieure forme avec la partie positive de l'axe des X; et la composante de l'attraction, parallèlement à l'axe des X, est enfin

$$(4) \qquad -f\mu D\int\int \frac{d\sigma\cos(N, X)}{r},$$

$d\sigma$ étant l'élément de la surface et r la distance de cet élément au point attiré.

460. L'emploi des coordonnées polaires fournit une autre expression qui sera utile.

Plaçons l'origine au point attiré, et considérons un cône infiniment petit d'angle $d\omega$ ayant son sommet en M et coupant la surface du corps attirant en quatre points, par exemple, que nous nommerons 1, 2, 3, 4. L'action exercée sur le point M, par la portion du corps située dans l'intérieur de ce cône, est évidemment

$$fD\mu\int \frac{d\omega\, r^2}{r^2}\, dr = fD\mu\int d\omega\, dr = (r_4 - r_3 + r_2 - r_1)\, d\omega.$$

Mais, en nommant $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$ les éléments interceptés sur la surface, on

a (435)

$$\frac{\cos(N_1, R)\,d\sigma}{r_1^2} = -d\omega, \quad \frac{\cos(N_2, R)\,d\sigma_2}{r_2^2} = d\omega, \quad \frac{\cos(N_3, R)\,d\sigma_3}{r_3^2} = -d\omega, \quad \frac{\cos(N_4, R)\,d\sigma_4}{r_4^2} = d\omega.$$

La somme décomposée parallèlement à l'axe des x est par conséquent

$$(5) \qquad \int \frac{d\sigma}{r} \cos(N, R) \cos(R, X),$$

(N, R) et (R, X) désignant l'angle du rayon vecteur avec la normale extérieure et avec l'axe des X.

461. Quand le point attiré fait partie de la masse attirante, on ne doit rien changer aux formules précédentes. Un facteur infini s'introduit, il est vrai dans ce cas, dans l'expression de certains éléments de l'attraction, mais la somme de ces éléments est négligeable et sans aucune influence sur le résultat.

Considérons en effet un cône d'angle infiniment petit $d\omega$ et ayant pour sommet le point attiré, la portion de cône comprise entre deux sphères de rayons r et $r + dr$ a pour expression

$$r^2 d\omega\, dr,$$

et, en nommant D la densité, son action sur un point de masse μ placé au sommet est

$$D\mu\, d\omega\, dr.$$

Le cône tout entier, terminé à la sphère du rayon a, exerce donc une action

$$\int_0^a D\mu\, d\omega\, dr = D\mu a\, d\omega,$$

qui devient infiniment petite avec a.

462. Il résulte évidemment de la remarque précédente que lorsqu'un corps de densité finie agit sur un point de sa masse, la portion infiniment voisine du point attiré produit un effet négligeable. En *ajoutant* en effet les actions produites par les cônes ayant leur sommet au point attiré et formant une sphère de rayon infiniment petit a, on trouverait pour somme $4\pi\rho a$. La *résultante* de ces forces est donc *à fortiori* infiniment petite, et, de quelque manière qu'on les combine, les résultantes partielles le seront également.

Solide de plus grande attraction.

463. L'attraction d'un corps sur un point matériel étant toujours, d'après ce qui précède, d'intensité finie, on peut chercher la forme d'un corps homogène de

masse donnée, pour laquelle son attraction sur une molécule donnée sera la plus grande possible.

Il est évident d'abord que la surface du corps attirant doit contenir la molécule attirée, car on pourrait sans cela détacher de cette masse un élément et le transporter au contact du point attiré, de manière que son action s'exerçât dans le sens même de la résultante de tous les autres en l'accroissant évidemment plus qu'il ne pourrait le faire dans sa position primitive. On aperçoit également que deux molécules de même masse, placées toutes deux à la surface du corps attirant, doivent exercer sur le point attiré des actions dont la composante, dans le sens de la résultante totale, ait la même valeur. S'il en était autrement, on pourrait accroître la résultante en enlevant la molécule correspondante à la moindre composante pour la transporter sur l'autre, sans changer ainsi la masse totale attirante.

La remarque précédente fournit pour équation de la surface qui limite le solide cherché

$$\text{(A)} \qquad \frac{\cos\theta}{\rho^2} = \frac{1}{k^2},$$

ρ étant la distance au point attiré pris pour pôle, θ l'angle du rayon vecteur avec l'axe dirigé suivant la résultante totale, et k une quantité constante.

Cherchons d'abord quelle valeur de k correspond à un volume donné $\frac{4}{3}\pi a^3$. Le volume enfermé dans la surface dont l'équation est (A) a pour expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{k\sqrt{\cos\theta}} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{k\sqrt{\cos\theta}} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi k^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta\, d\theta = \frac{4}{15}\pi k^3.$$

On doit donc poser

$$\frac{4}{15}\pi k^3 = \frac{4}{3}\pi a^3,$$
$$k = a\sqrt[3]{5}.$$

Pour calculer l'action exercée, considérons le volume élémentaire $\rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho\, d\psi$. En nommant D la densité, on aura pour expression de son action sur la molécule de masse μ placée à la distance ρ

$$\mu D \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi,$$

dont la composante dans le sens de l'axe, direction évidente de la résultante, est

$$\mu D \cos\theta \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi,$$

et l'action totale est par conséquent

$$\mu D \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{k\sqrt{\cos\theta}} \cos\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi.$$

En intégrant d'abord par rapport à ψ, puis par rapport à ρ, enfin par rapport à θ, on trouve

$$\frac{4}{5} \mu D k,$$

c'est-à-dire, en remplaçant k par sa valeur,

$$\frac{4}{5} \mu D \pi a \sqrt[3]{5}.$$

Telle est la plus grande attraction que puisse exercer sur une molécule de masse μ une masse homogène de densité D et de volume égal à une sphère de rayon a.

Attraction d'une sphère.

464. Cherchons l'attraction d'une sphère pleine homogène de rayon R et de densité D sur un point de masse μ situé à la distance a de son centre. Si le point attiré est situé sur l'axe des X, la composante A, dans le sens de cet axe, est évidemment la seule à calculer, et les deux autres sont nulles à cause de la symétrie. On a trouvé (459)

$$A = -\mu D \int \frac{\cos(N, X)}{r} d\sigma,$$

r désignant la distance de la molécule $d\sigma$ de la surface sphérique à la molécule attirée μ, et $\overline{XN}$ l'angle de la normale, c'est-à-dire du rayon qui aboutit à l'élément $d\sigma$, avec la partie positive de l'axe des X. On a

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$
$$\cos NX = \cos\theta,$$

et l'attraction A est par conséquent

$$A = -\mu D R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} d\theta \, d\psi = -\mu D R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} d\theta \, d\psi,$$

c'est-à-dire, en effectuant l'intégration par rapport à ψ,

$$-2\pi\mu D R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} d\theta.$$

On a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}}\,d\theta = \frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta} + \frac{1}{aR}\int \sin\theta\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta} - \frac{1}{3a^2R^2}(a^2+R^2-2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}.$$

L'intégrale prise entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \pi$ est $\frac{2R}{3a^2}$, et l'on a enfin

$$A = -\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a^2}.$$

La sphère pleine homogène attire par conséquent une molécule extérieure comme si sa masse entière était réunie à son centre.

465. Lorsque le point attiré fait partie de la masse attirante, le résultat précédent n'est plus applicable. Le radical $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}$ représente en effet une distance toujours positive; quand on y suppose $\theta = 0$, il faut, lorsque R est plus grand que a, le remplacer par $R-a$ et non plus par $a-R$; il en résulte une différence dans le résultat, et la force d'attraction est

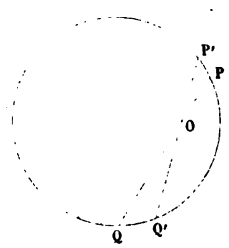
$$-\frac{4}{3}\pi\mu D a.$$

Elle est indépendante de R, et par conséquent une sphère de rayon R attire un point situé à la distance a de son centre, comme une sphère concentrique de rayon a, et une couche sphérique homogène est sans action sur les points intérieurs.

466. Les résultats précédents peuvent être aisément établis par des considérations géométriques.

Considérons une couche sphérique homogène infiniment mince, que nous regarderons comme une surface attirante, suivant une loi telle, que l'action d'un élément $d\sigma$ sur une molécule μ, située à la distance r, soit $\frac{\mu D\,d\sigma}{r^2}$. Une telle couche est sans action sur les points intérieurs; il est aisé de le démontrer.

Soit, en effet, O la position du point attiré; considérons deux cônes opposés



par le sommet ayant pour angle $d\omega$, c'est-à-dire interceptant une aire $d\omega$ sur la

sphère de rayon unité, décrite du point O comme centre; les éléments interceptés sur la surface attirante aux points P et Q sont respectivement

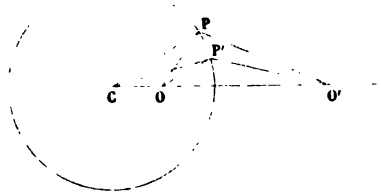
$$\frac{d\omega\,\overline{OP}^2}{\cos(OP, N)}, \quad \frac{d\omega\,\overline{OQ}^2}{\cos(OQ, N)},$$

(OP, N), (OQ, N) désignant les angles formés par les rayons OP et OQ avec les normales à la sphère aux points P et Q; ces angles sont égaux, et les attractions

$$\frac{D\mu\, d\omega}{\cos(OP, N)}, \quad \frac{D\mu\, d\omega}{\cos(OQ, N)}$$

exercées sur le point O par les éléments PP′, QQ′ sont par conséquent égales et se détruisent; toutes les forces d'attraction exercées sur le point O se détruisent ainsi deux à deux, et leur résultante est nulle.

Considérons en second lieu l'action de la couche sur un point extérieur situé en O′; prenons sur le diamètre CO′ un point O conjugué de O′, et tel, que $CO.CO' = R^2$.



Considérons ce point O comme sommet d'un cône infiniment petit d'angle $d\omega$, et cherchons la composante suivant O′C de l'action exercée sur la molécule de masse μ placée en O′ par la portion PP′ de surface sphérique interceptée par ce cône. L'élément PP′ est

$$\frac{d\omega\,\overline{OP}^2}{\cos OPC};$$

l'action sur O′, décomposée suivant O′C, est par conséquent

$$D\mu\,\frac{d\omega\,\overline{OP}^2\cos PO'C}{\cos OPC.\,\overline{O'P}^2};$$

mais les triangles CPO, CPO′ sont semblables, les angles OPC, PO′C, sont donc égaux, et le rapport $\frac{OP}{O'P}$ est constant et égal à $\frac{R}{CO'}$; l'action élémentaire est donc représentée par

$$D\mu\,\frac{R^2 d\omega}{\overline{CO'}^2}$$

et la somme relative à toutes les valeurs de $d\omega$ est évidemment

$$D\mu \frac{4\pi R^2}{CO'^2}.$$

La couche sphérique agit donc comme si elle était concentrée à son centre. Le théorème démontré pour une couche infiniment mince s'étend évidemment à une couche d'épaisseur quelconque et à une sphère pleine.

Attraction d'un ellipsoïde homogène.

467. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation d'un ellipsoïde homogène de densité égale à l'unité. Si l'on nomme $d\sigma$ l'élément de surface, la composante parallèle à l'axe des x de l'action exercée sur un point de masse μ est (**459**)

$$A = \int\int \frac{\cos(N, X)}{r} d\sigma.$$

Mais en posant

$$x = a\cos p,$$
$$y = b\sin p\cos q,$$
$$z = c\sin p\sin q,$$

on a (**430**)

$$d\sigma = abc\, dp\, dq \sin p \sqrt{\frac{\cos^2 p}{a^2} + \frac{\sin^2 p\cos^2 q}{b^2} + \frac{\sin^2 p\sin^2 q}{c^2}},$$

$$\cos(N, X) = \frac{\cos p}{a\sqrt{\frac{\cos^2 p}{a^2} + \frac{\sin^2 p\cos^2 q}{b^2} + \frac{\sin^2 p\sin^2 q}{c^2}}},$$

et la composante A de l'attraction est par conséquent

$$(6) \qquad A = bc\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\sin p}{r} dp\, dq.$$

La même composante est, en vertu de la formule (5) (**460**),

$$(7) \qquad A = -\int\int \frac{\sin p}{r^3}(\alpha - x)\left[\frac{(\alpha - x)x}{a^2} + \frac{(\beta - y)y}{b^2} + \frac{(\gamma - z)z}{c^2}\right] dp\, dq.$$

Supposons actuellement que l'on fasse varier les axes a, b, c en laissant constantes les différences de leurs carrés $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, de telle sorte que les sec-

tions principales de l'ellipsoïde conservent les mêmes foyers, le rapport $\frac{A}{abc}$ pourra alors être considéré comme une fonction de a, b, c, ou, si l'on veut, de l'une quelconque de ces variables dont la valeur, d'après notre supposition, détermine les deux autres. L'équation

$$(8) \qquad \frac{A}{abc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin p \cos p}{ar}\, dp\, dq$$

montre que, a, b, c croissant indéfiniment, $\frac{A}{abc}$ décroît sans limite, et s'annule quand a est infini. Posons $\frac{A}{abc} = \xi$, et différentions l'équation (8) après l'avoir multipliée par a; p, q pouvant être traités comme des constantes, car il est permis de comparer, dans les deux intégrales, les éléments qui se rapportent aux mêmes valeurs de ces quantités. On aura donc

$$(9) \qquad a\,d\xi + \xi\,da = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin p \cos p}{r^2}\, dp\, dq\, dr.$$

Mais on a

$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2.$$

En y considérant x, y, z comme des fonctions de p, de q et de a, et faisant varier a seulement, on a

$$r\,dr = -(\alpha - x)\,dx - (\beta - y)\,dy - (\gamma - z)\,dz,$$

c'est-à-dire

$$r\,dr = -(\alpha - x)\cos p\,da - (\beta - y)\sin p \cos q\,db - (\gamma - z)\sin p \sin q\,dc,$$

et, à cause de $a\,da = b\,db = c\,dc$,

$$\begin{aligned} r\,dr &= -(\alpha - x)\frac{x}{a}\,da - (\beta - y)\frac{y}{b}\,db - (\gamma - z)\frac{z}{c}\,dc \\ &= -a\,da\left(\frac{\alpha - x}{a^2}x + \frac{\beta - y}{b^2}y + \frac{\gamma - z}{c^2}z\right), \end{aligned}$$

et l'équation (9) devient, en remplaçant $a \cos p$ par x,

$$a\,d\xi + \xi\,da = da\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin p}{r^3}\,x\left(\frac{a - x}{a^2}x + \frac{\beta - y}{b^2}y + \frac{\gamma - z}{c^2}z\right) dp\,dq.$$

Retranchons l'équation (7) multipliée par $\frac{da}{abc}$, nous aurons

$$a\,d\xi = da\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha \sin p}{r^3}\left(\frac{\alpha - x}{a^2}x + \frac{\beta - y}{b^2}y + \frac{\gamma - z}{c^2}z\right) dp\,dq,$$

et le second membre est égal (457) à zéro ou à $-\frac{4\pi\alpha\, da}{abc}$, suivant que le point α, β, γ est extérieur ou intérieur.

Considérons d'abord le premier cas. L'équation

$$d\xi = 0$$

prouve que ξ reste constant lorsque l'ellipsoïde attirant croît ou décroît en conservant des sections principales de mêmes foyers, et, par conséquent, on peut remplacer l'ellipsoïde attirant par un autre dont la surface passe par le point attiré; les deux corps exerceront des actions dont les composantes divisées respectivement par le produit des axes seront les mêmes, et, les deux résultantes dirigées dans le même sens, seront proportionnelles aux masses des deux ellipsoïdes.

Ce théorème remarquable a été aperçu par Maclaurin, qui l'a démontré seulement dans le cas particulier où le point attiré est situé sur l'un des axes.

Considérons, en second lieu, le cas où le point attiré fait partie de la masse attirante; on a alors

$$d\xi = -\frac{4\pi\alpha\, da}{a^2 bc};$$

mais

$$b^2 = a^2 - k^2, \quad c^2 = a^2 - k'^2,$$

k^2 et k'^2 étant des constantes. En remplaçant b et c par ces valeurs, il vient

$$d\xi = \frac{-4\pi\alpha\, da}{a^2\sqrt{a^2-k^2}\sqrt{a^2-k'^2}},$$

et, comme ξ est nul pour une valeur infinie de a,

$$\xi = 4\pi\alpha \int_a^\infty \frac{da}{a^2\sqrt{a^2-k^2}\sqrt{a^2-k'^2}}.$$

Pour éviter la confusion entre la lettre a, qui sert de limite inférieure et qui est l'axe de l'ellipsoïde attirant, et la lettre par rapport à laquelle on intègre, qui représente les axes successifs des ellipsoïdes homofocaux, remplaçons cette seconde lettre par u et posons

$$\frac{a}{u} = t;$$

nous aurons

$$\xi = \frac{4\pi\alpha}{a}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{a^2}{t^2}-k^2}\sqrt{\frac{a^2}{t^2}-k'^2}}.$$

Mais

$$k^2 = a^2 - b^2, \quad k'^2 = a^2 - c^2;$$

donc

$$\xi = \frac{4\pi\alpha}{a^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)t^2\right]}},$$

et la composante de l'attraction est

$$A = \frac{4\pi\alpha bc}{a^2}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)t^2\right]}},$$

et par des changements de lettres on obtiendra les deux autres composantes dont l'expression dépend des fonctions elliptiques. On voit cependant que, dans l'intérieur de l'ellipsoïde attirant, les composantes de l'attraction parallèlement aux axes sont proportionnelles aux coordonnées α, β, γ du point attiré, et que les trois intégrales à calculer pour connaître l'action d'un ellipsoïde sur un point de sa masse sont les mêmes, quel que soit ce point.

Définition du potentiel.

468. Lorsque l'on divise la masse de chaque élément d'un corps par la distance de cet élément à un point fixe, la somme des quotients ainsi obtenus se nomme le *potentiel relatif au point fixe*. S'il s'agit d'un corps solide dont l'élément $dx\,dy\,dz$ ait pour masse $D\,dx\,dy\,dz$, le potentiel relatif au point dont les coordonnées sont α, β, γ est exprimé par l'intégrale triple

$$(1) \qquad V = \iiint \frac{D}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

étendue à la masse entière du corps attirant.

L'étude du potentiel est liée intimement à la théorie de l'attraction et s'y rattache par le théorème suivant :

La dérivée du potentiel V *par rapport à l'une des coordonnées* α, β, γ *dont il dépend est la composante de l'attraction du corps parallèlement à l'axe correspondant.*

On a en effet, en différentiant sous le signe d'intégration, ce qui évidemment est permis, puisque les limites sont indépendantes de α,

$$(2) \qquad \frac{dV}{d\alpha} = \iiint \frac{D(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz,$$

ce qui est précisément la composante de l'attraction.

Le théorème précédent s'applique lors même que le point attiré fait partie de la masse attirante; mais ce cas doit être examiné à part. L'un des éléments de l'intégrale V devenant alors infini, on doit craindre, en effet, en la traitant comme la somme de ses éléments, de rencontrer des résultats inexacts.

Détachons de la masse attirante un solide infiniment petit M_1, qui comprenne le point attiré; nommons V_1 le potentiel relatif à cette partie du corps, V_2 le potentiel relatif à tout le reste de la masse; on aura

$$V = V_1 + V_2,$$

et, si l'on partage de même la composante de l'attraction en deux parties A_1 et A_2 relatives à ces deux portions de la masse attirante, on aura

$$A = A_1 + A_2.$$

On a sans difficulté

$$A_2 = \frac{dV_2}{d\alpha}.$$

De plus, A_1 est infiniment petit et s'annule avec la masse M_1; s'il en est de même de $\frac{dV_1}{d\alpha}$, le théorème sera évidemment démontré. Pour faire voir qu'il en est ainsi, supposons que le solide M_1, qui est arbitraire, soit une sphère de rayon r ayant pour centre le point attiré. En nommant ρ la densité de cette sphère, le potentiel V_1 est, comme on le calcule aisément, $2\pi\rho r^2$; si le point attiré subit un déplacement $d\alpha$ infiniment petit par rapport à r, on pourra considérer la masse M_1 comme composée d'une sphère de rayon $r - d\alpha$ ayant pour centre le nouveau point attiré, dont le potentiel sera

$$2\pi\rho(r - d\alpha)^2 = 2\pi\rho r^2 - 4\pi\rho r d\alpha,$$

et d'une couche dont la masse, étant de l'ordre $r^2 d\alpha$, et la distance au point attiré égale à r, donnera un potentiel de l'ordre $r d\alpha$. Représentons-le par $kr d\alpha$, k étant fini; la différence des deux potentiels, dV_1, est

$$dV_1 = 4\pi\rho r d\alpha + kr d\alpha,$$

et le rapport à $d\alpha$ est infiniment petit avec r.

L'équation

$$A_2 = \frac{dV_2}{d\alpha}$$

équivaut par conséquent à

$$A_1 + A_2 = \frac{dV_1}{d\alpha} + \frac{dV_2}{d\alpha},$$

c'est-à-dire à

$$A = \frac{dV}{d\alpha}.$$

La formule précédente, qui se trouve démontrée dans tous les cas, peut être énoncée sous une forme équivalente, dans laquelle n'intervient plus le choix des coordonnées : *Si* V *désigne le potentiel en un point et* $V + dV$ *en un point voisin situé à la distance* ε, $\frac{dV}{\varepsilon}$ *est la composante de l'attraction dans le sens de la distance* ε.

469. Le théorème précédent permet de calculer l'attraction lorsque le potentiel est connu, ou réciproquement d'obtenir le potentiel quand l'attraction est connue.

Considérons, par exemple, une sphère pleine, de rayon R et de densité D; l'attraction qu'elle exerce sur un point de masse μ situé à la distance a du centre est, en supposant a plus grand que R (**464**),

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a^2},$$

et cette attraction est dirigée suivant la ligne qui joint le point au centre. Les composantes sont donc, en nommant α, β, γ les coordonnées du point attiré,

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a^2}\frac{\alpha}{a}, \tag{3}$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a^2}\frac{\beta}{a}, \tag{4}$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a^2}\frac{\gamma}{a}. \tag{5}$$

De l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2$$

on déduit

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{da}{d\beta} = \frac{\beta}{a}, \quad \frac{da}{d\gamma} = \frac{\gamma}{a},$$

et la fonction V, dont les dérivées sont égales aux expressions (3), (4), (5), est évidemment

$$V = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a} + C.$$

Lorsque la distance est infinie, le potentiel V doit s'annuler; la constante est, par conséquent, égale à zéro, et l'on a enfin

$$V = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D\mu}{a}. \tag{6}$$

Lorsque a est moindre que R, l'attraction, toujours dirigée vers le centre, est égale à

$$\frac{4}{3}\pi a D\mu;$$

elle a pour composantes :

$$-\frac{4}{3}\pi D\mu\alpha,$$

$$-\frac{4}{3}\pi D\mu\beta,$$

$$-\frac{4}{3}\pi D\mu\gamma,$$

qui sont les dérivées de

$$-\frac{2}{3}\pi D\mu(a^2+\beta^2+\gamma^2)+C=-\frac{2}{3}\pi D\mu a^2+C.$$

Pour déterminer la constante, remarquons que le potentiel relatif au centre est évidemment

$$4\pi D\mu\int_0^R\frac{r^2dr}{r}=4\pi D\mu\int_0^R rdr=2\pi\mu DR^2.$$

On a par conséquent

$$C=2\pi\mu DR^2$$

et

$$V=D\mu\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi a^2\right). \tag{7}$$

Si l'on suppose $a=R$, on a

$$V=\frac{4}{3}\pi R^2,$$

ce qui s'accorde avec la valeur fournie dans le même cas par la formule (6).

Propriétés du potentiel.

470. On a, quelle que soit la forme et l'hétérogénéité du corps attiré, en désignant par V le potentiel et par α, β, γ les coordonnées du point attiré,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0, \tag{8}$$

pourvu, toutefois, que le point attiré ne fasse pas partie de la masse attirante.

De l'équation

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}},$$

on déduit, en effet, par la différentiation et après des réductions évidentes,

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2}=0;$$

mais on a par définition

$$V=\int\int\int\frac{dm}{r},$$

et, comme α, β, γ, ne figurant que dans $\frac{1}{r}$, les limites en sont indépendantes, on en conclut

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=\int\int\int dm\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2}\right)=0.$$

471. Lorsque le point attiré fait partie de la masse attirante, l'équation (8) n'est plus exacte; on a, en nommant D la densité du corps attirant au point où se trouve la molécule attirée,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi D. \tag{9}$$

Décrivons, en effet, autour du point attiré une sphère infiniment petite de rayon r et dont le centre ait pour coordonnées x, y, z, et détachons du corps attirant la masse de densité D contenue dans cette sphère. On pourra partager, comme au § 468, le potentiel V en deux parties V_1 et V_2 relatives aux deux parties de la masse, et l'on aura

$$V=V_1+V_2, \tag{10}$$

V_1 étant le potentiel relatif à la petite sphère et V_2 celui qui se rapporte au reste du corps. On a (470)

$$\frac{d^2V_2}{d\alpha^2}+\frac{d^2V_2}{d\beta^2}+\frac{d^2V_2}{d\gamma^2}=0, \tag{11}$$

puisque le point dont les coordonnées sont α, β, γ ne fait pas partie de la masse attirante. D'après les résultats obtenus (469),

$$V_1=D\left[2\pi r^2-\frac{2}{3}\pi(x_1-\alpha)^2-(y_1-\beta)^2-(z_1-\gamma)^2\right],$$

et par conséquent

$$(12)\qquad \frac{d^2V_1}{d\alpha^2}+\frac{d^2V_1}{d\beta^2}+\frac{d^2V_1}{d\gamma^2}=-4\pi D.$$

En ajoutant les équations (11), (12) et ayant égard à (10), on obtient l'équation (9).

472. On déduit des équations (8) et (9) un théorème remarquable, dont les conséquences sont considérables.

Si l'on considère une surface fermée quelconque contenant dans son intérieur tout ou partie du corps attirant, que l'on multiplie chaque élément par la composante normale à la surface qui serait exercée sur une molécule de masse-unité placée en ce point, la somme de ces produits, représentée par une intégrale double, est le produit de 4π par la portion de masse attirante située dans l'intérieur de la surface donnée.

L'intégrale triple

$$(13)\qquad \int\int\int\left(\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

étendue au volume intérieur à la surface donnée, est évidemment, en vertu des équations (8) et (9), égale à $-4\pi M$, M étant la portion de masse attirante comprise dans l'espace qui limite les intégrations. Mais chacun des trois termes placés sous le signe $\int\int\int$ peut être intégré une fois, le premier par rapport à x, le deuxième par rapport à y, le troisième par rapport à z, et l'intégrale (13) se ramène ainsi à une intégrale double dont la valeur est $-4\pi M$.

On a, en supposant que la parallèle à l'axe des X coupe la surface aux points 1, 2, 3, 4,

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz=\int\int dy\,dz\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)_4-\left(\frac{dV}{dx}\right)_3+\left(\frac{dV}{dx}\right)_2-\left(\frac{dV}{dx}\right)_1\right].$$

Mais, en nommant $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$ les éléments de surface interceptés par le parallélipipède dont la base est $dy\,dz$, on a

$$dy\,dz=-d\sigma_1\cos(N_1, X)=d\sigma_2\cos(N_2, X)=-d\sigma_3\cos(N_3, X)=d\sigma_4\cos(N_4, X),$$

(N_1, X), (N_2, X),... étant les angles des normales extérieures avec l'axe des x. D'après ces formules, l'intégrale devient

$$\int d\sigma\cos(N, X)\frac{dV}{dx},$$

la somme s'étendant à tous les éléments de la surface. En transformant de même

les deux autres termes de (13), l'expression deviendra

$$\int d\sigma\left[\frac{dV}{dx}\cos(N, X) + \frac{dV}{dy}\cos(N, Y) + \frac{dV}{dz}\cos(N, Z)\right],$$

et, comme le multiplicateur de $d\sigma$ est évidemment la composante suivant la normale extérieure de la force dont les composantes sont $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, la comparaison de cette formule avec l'expression trouvée $-4\pi M$ démontre le théorème énoncé. Si l'on prend pour direction positive celle de la normale intérieure, les composantes changent de signe, et l'intégrale est $4\pi M$.

On peut, dans l'expression du théorème précédent, désigner la composante suivant la normale intérieure (468) par $\frac{dV}{dn}$, et écrire

$$\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = 4\pi M. \tag{14}$$

Surfaces de niveau.

473. Le potentiel V relatif à un système de masses est une fonction des coordonnées du point attiré, et le lieu des points pour lesquels il a une valeur constante est une surface que l'on nomme *surface de niveau*. Une surface de niveau est normale en chaque point à la résultante de l'attraction.

L'équation

$$V = \text{const.}$$

d'une telle surface donne en effet

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = 0,$$

et l'on en conclut que la direction de la résultante qui forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, est perpendiculaire à celle d'une tangente quelconque de la surface de niveau formant des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz.

474. Les surfaces de niveau relatives à l'attraction d'un corps sont des surfaces fermées dont les unes lui sont intérieures, les autres le traversent, et les autres enfin, qui grandissent indéfiniment en s'approchant de la forme sphérique, le contiennent tout entier dans leur intérieur.

Ces surfaces jouissent de propriétés remarquables. Nous rapporterons les plus élégantes et les plus simples qui ont été découvertes par M. Chasles.

Si l'on suppose sur une surface de niveau la densité en chaque point égale à l'intensité de l'attraction qui serait exercée en ce point sur une molécule de masse unité, on forme une couche infiniment mince de masse finie dont nous allons étudier l'attraction sur les points de l'espace.

La masse d'une telle couche est égale au produit de 4π par la masse de la portion du corps attirant qui lui est intérieure. Cela résulte évidemment du théorème (472), dans lequel, par la nature de la surface de niveau, la composante normale de l'attraction se confond avec l'attraction elle-même. Toutes les couches qui enveloppent le corps ont par conséquent même masse.

475. Si de chaque point d'une surface de niveau on fait partir une ligne qui coupe toutes les surfaces à angle droit, et que l'on nomme *points correspondants sur deux surfaces* ceux où elles sont coupées par une de ces lignes, chaque élément de l'une des couches aura sur toute autre couche un élément correspondant détaché par le *canal* lieu des courbes orthogonales issues des points de contour qui limite l'élément considéré. Les portions correspondantes de deux couches extérieures au corps attirant ont toujours une même masse, et, lorsque les deux couches comprennent entre elles une portion de la masse attirante, la différence des masses de deux portions correspondantes sur deux couches différentes est égale au produit de 4π par la portion de masse attirante comprise dans l'intérieur du canal orthogonal aux couches de niveau qui les réunit.

Pour démontrer ce théorème dont le précédent, relatif aux couches extérieures, est évidemment un cas particulier, il suffit d'appliquer le théorème (472) au volume compris entre les deux portions considérées de surface de niveau et le canal qui les réunit. Les forces d'attraction étant, tout le long du canal, tangentes à ses génératrices, les éléments de l'intégrale qui se rapportent à cette portion de la surface sont égaux à zéro, et il ne reste que ceux qui se rapportent aux deux bases dont la somme représente évidemment la différence des masses des portions des couches correspondantes. Cette différence est, d'après le théorème (472), égale au produit de 4π par la portion de masse attirante comprise dans l'intérieur du canal, et à zéro quand les deux couches sont extérieures à la masse attirante.

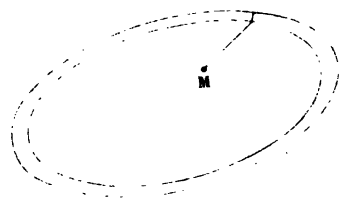
476. Si l'on divise par 4π la densité de chaque élément des couches définies (474), les énoncés précédents prennent une forme plus simple. La masse de chaque couche est égale à celle de la portion du corps attirant qui lui est intérieure, et les masses des deux portions correspondantes ont pour différence la masse de la portion du corps attirant intérieure au canal qui les réunit.

En adoptant cette modification à la définition des couches, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Une couche quelconque exerce sur les points intérieurs une attraction égale et de

signe contraire à celle de la portion du corps attirant qui lui est extérieure et sur les points extérieurs une attraction égale à celle de la portion du corps attirant qui lui est intérieure.

Soit en effet C l'une de ces couches et M un point situé dans son intérieur; le



potentiel U relatif à l'action de cette couche sur le point M est

$$U = \int \frac{dm}{r},$$

dm désignant la masse de l'un des éléments de la surface de niveau, en lui supposant une densité égale au produit de $\frac{1}{4\pi}$ par l'attraction $\frac{dV}{dn}$ exercée par la masse attirante à laquelle elle se rapporte. Cherchons l'accroissement de ce potentiel U lorsque, le point M restant fixe, la couche C est remplacée par la couche infiniment voisine qui l'enveloppe. Il faut, pour former $U + dU$, remplacer chaque élément dm de la couche par l'élément correspondant de la couche voisine, c'est-à-dire l'accroître (475) de la portion dm_1 de la masse attirante comprise entre les deux couches. On a par conséquent

$$dU = \int \left(\frac{dm_1}{r} + dm\, d\frac{1}{r} \right).$$

$d\frac{1}{r}$ est égal à $-\frac{1}{r^2}dr$, c'est-à-dire, en nommant dn la distance normale des deux couches et φ l'angle du rayon vecteur avec la normale,

$$-\frac{1}{r^2}\cos\varphi\, dn.$$

On a donc

$$dU = \int \frac{dm_1}{r} - \int \frac{1}{r^2}\, dm\, dn \cos\varphi,$$

et, en remplaçant dm par sa valeur $-\frac{d\sigma}{4\pi}\frac{dV}{dn}$, et remarquant que dV est constant,

$$dU = \int \frac{dm_1}{r} + \frac{dV}{4\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma,$$

c'est-à-dire (457)

$$dU = \int \frac{dm_1}{r} + dV,$$

et comme $\int \frac{dm_1}{r}$ est le potentiel de la portion de masse comprise entre les deux couches de niveau, on en conclut, en nommant U_1 et U_2 les potentiels relatifs à deux couches extérieures au point M,

$$U_2 - U_1 = V_2 - V_1 + W, \tag{15}$$

W étant le potentiel relatif à la portion du corps attirant compris entre les deux couches. Si les couches sont toutes deux extérieures au corps attirant, W est nul et l'on a

$$U_2 - U_1 = V_2 - V_1, \tag{16}$$

et comme U_2 et V_2 s'annulent en même temps quand la couche s'éloigne à l'infini, on en conclut

$$U_1 = V_1. \tag{17}$$

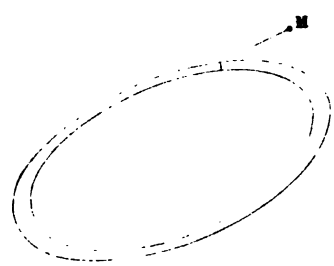
Le potentiel U_1 relatif à l'action d'une couche extérieure au corps attirant sur un point de son intérieur est donc égal à V_1, quelle que soit la position de ce point, les dérivées par rapport aux coordonnées du point attiré sont par conséquent nulles, et la couche est sans action sur les points qui lui sont intérieurs.

Si l'on considère actuellement deux couches comprenant toutes deux le point M dans leur intérieur et dont l'une soit extérieure au corps attirant tandis que l'autre en contient une portion seulement, en leur appliquant l'équation (15) et ayant égard à l'équation (17) qui a lieu pour la première, on aura pour la seconde

$$U_2 = V_2 - W, \tag{18}$$

et comme V_1 est indépendant de la position du point M, on en conclut que les dérivées de U_1 sont égales et de signes contraires à celles de W, et que par conséquent la couche qui coupe le corps attirant exerce sur les points intérieurs une action égale et de signe contraire à celle de la portion de masse attirante qui lui est extérieure.

477. Considérons en second lieu le potentiel U d'une couche par rapport à un point extérieur M.



On a

$$U = \int \frac{dm}{r},$$

et en nommant dU l'accroissement de U lorsque la couche est remplacée par la couche infiniment voisine extérieure, on trouvera comme (476) et en adoptant la même notation

$$dU = \int \frac{dm_1}{r} + \frac{dV}{4\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma,$$

c'est-à-dire (457)

$$dU = \int \frac{dm_1}{r};$$

d'où en intégrant

$$U_2 - U_1 = W',$$

W′ étant le potentiel relatif à l'action de la portion de masse comprise entre les couches C_1 et C_2 auxquelles se rapportent les potentiels U_1 et U_2. Si C_2 passe par le point M, on a (476)

$$U_2 = V_2 - W,$$

W étant le potentiel relatif à l'action de la partie du corps extérieur à la couche C_2. On a donc

$$V_2 - W + U_1 = W',$$

et par conséquent

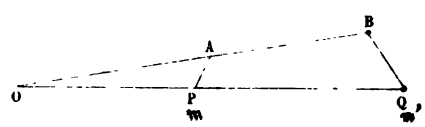
$$U_1 = V_2 - W - W'; \tag{18}$$

d'où l'on conclut, en prenant les dérivées par rapport aux coordonnées du point M, que l'action de C_1 sur le point M est égale à l'action du corps qui est la dérivée de V_2 diminuée de l'action de la portion comprise entre C_1 et C_2, qui est la dérivée de W′, et de l'action de la portion extérieure à C_1, qui est celle de W, c'est-à-dire enfin à l'action de la portion du corps intérieure à C_1.

Principe des images de M. Thomson.

478. Lorsque l'on connaît le potentiel d'un certain système de masses par rapport aux divers points de l'espace, on peut en déduire celui d'un autre système dépendant du premier suivant une loi simple que M. Thomson a indiquée.

Soit P un point appartenant au premier système et m la masse de ce point, le potentiel relatif au point A contiendra le terme $\frac{m}{PA}$. Soit O un point fixe, rempla-



çons le point P par un point Q déduit de P par la transformation, dite *par rayons vecteurs réciproques*, et telle que

$$OP.OQ = k^2,$$

k étant une constante, et soit B le point déduit de A par la même transformation, de telle sorte que l'on ait $OA.OB = k^2$. Le potentiel de la masse m_1 placée en Q sur le point B est $\frac{m_1}{QB}$, mais les triangles semblables OAP, OBQ donnent

$$\frac{PA}{QB} = \frac{OA}{OQ}.$$

Si l'on suppose

$$m_1 = m\frac{OQ}{OA}, = m.\frac{QB}{PA}$$

on aura

$$\frac{m_1}{QB} = \frac{m}{PA},$$

et les deux potentiels seront égaux.

Un système quelconque de masses étant donné, si l'on en déduit par conséquent un autre dans lequel chaque élément du premier soit représenté et ait en quelque sorte son *image* obtenue suivant la loi indiquée, le potentiel du second système sur le point désigné par B sera égal à celui du premier sur le point A.

479. Appliquons ce principe au cas où le corps attirant donné est une couche sphérique homogène. Une telle couche agit sur les points extérieurs comme si elle était réduite à son centre, et son potentiel, par rapport à ces points, est celui d'une masse égale et qui serait placée au centre; le potentiel de la couche transformée sur le point transformé d'un point extérieur sera donc le même que celui d'une masse placée au point qui est l'image du centre.

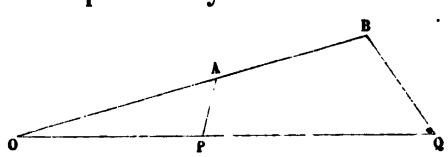
Quel que soit le pôle de transformation O, la surface transformée d'une surface sphérique est, comme on sait, une sphère, mais la couche n'est pas homogène. Soit en effet $d\sigma$ un élément de la surface donnée située en P, dont nous supposerons la densité égale à l'unité et la masse par conséquent représentée par $d\sigma$, l'élément correspondant de la masse transformée située en Q a pour surface

$$\frac{d\sigma.OQ^2}{\overline{OP}^2},$$

et la masse, d'après la convention,

$$\frac{d\sigma.OQ}{OA},$$

A étant le point attiré dans le premier système.



La densité, rapport de la masse à l'élément superficiel, est par conséquent, pour la surface transformée,

$$\frac{\overline{OP}^2}{OQ.OA}. \tag{19}$$

Mais

$$\overline{OP}^2.OQ^2 = k^4,$$

et par conséquent la densité (19) est égale à

$$\frac{k^4}{OA.OQ^3}, \tag{20}$$

et en raison inverse du cube de la distance au point O.

Nous voyons par conséquent qu'une couche sphérique dont la densité est inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe O attire comme une masse concentrée en un point convenablement choisi. Si le centre de transformation O est intérieur à la couche donnée, les points extérieurs à cette couche auront pour transformés les points intérieurs à la couche transformée, le centre aura pour transformée un point extérieur; et, par conséquent, une couche sphérique dont la densité en chaque point est inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe attire les points intérieurs comme le ferait un point matériel isolé placé convenablement en dehors d'elle.

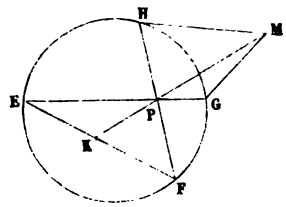
Si le pôle O est extérieur à la couche donnée, les points extérieurs à celle-ci auront pour transformés les points extérieurs à la transformée, et le centre se transformera en un point intérieur; par conséquent, une couche sphérique dont la densité est inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe attire les points extérieurs comme le ferait un point matériel convenablement placé dans son intérieur.

Il n'y a pas lieu de distinguer ici le cas où le point dont la distance règle la densité est intérieur ou extérieur à la couche, car les points intérieurs et extérieurs à une sphère sont, on le sait, conjugués deux à deux de telle sorte que le rapport de leurs distances à un point quelconque de la sphère est constant. La densité inversement proportionnelle au cube de l'une l'est donc aussi au cube de l'autre.

Démonstration directe du théorème précédent.

480. Il serait fort aisé de suivre jusqu'au détail les conséquences de la théorie des images en indiquant avec plus de précision la position des points intérieurs ou extérieurs dont l'attraction peut remplacer celle d'une couche sphérique hétéro-

gène suivant la loi indiquée. Il sera plus intéressant de traiter la question directement en rapportant la démonstration élégante donnée par M. Thomson lui-même.



Considérons une couche sphérique infiniment mince dont la densité en chaque point soit inversement proportionnelle au cube de la distance au point P, de telle sorte qu'un élément $d\sigma$ placé en H ait pour masse $\frac{\lambda\, d\sigma}{\overline{PH}^3}$, λ étant une constante, et que son attraction sur un point de masse μ placé en M soit représentée par

$$(21) \qquad \frac{\lambda f \mu\, d\sigma}{\overline{PH}^3 \,.\, \overline{HM}^2}.$$

Prenons dans l'intérieur de la couche un point K situé sur la droite MP prolongée et tel, que le produit PK.PM soit égal au produit constant k^2 des segments de deux cordes quelconques de la sphère qui se croisent en P. Pour décomposer la couche en éléments dont les actions sur le point M devront être réunies ensuite, nous procéderons de la manière suivante :

Par le point K menons une droite quelconque qui coupe la surface sphérique en E et en F; joignons EP et FP, ces lignes prolongées couperont la sphère en G et en H, et il est clair que si à EF on substitue un cône d'ouverture infiniment petite $d\omega$, ayant son sommet en K, les points F et E seront remplacés ainsi que G et H par des éléments superficiels. La méthode de M. Thomson consiste à prendre pour action élémentaire celle qui est exercée par les deux éléments G et H; cette action, résultante de deux forces dirigées suivant GM et HM, est toujours dirigée suivant MP, et la sommation relative à toutes les positions du cône EF s'effectue ensuite sans aucun calcul.

Pour évaluer l'action de l'élément H sur le point M, il faut chercher la masse de cet élément et pour cela multiplier sa surface par la densité $\frac{\lambda}{\overline{PH}^3}$. L'élément de surface sphérique intercepté en F sur le cône d'ouverture $d\omega$ est évidemment égal au produit $d\omega.\overline{KF}^2$ divisé par le cosinus de l'angle formé par KF avec le rayon de la sphère, c'est-à-dire à

$$\frac{d\omega\, \overline{KF}^2 \,.\, 2R}{EF}.$$

Mais les éléments F et G étant détachés sur la sphère par un même cône qui a son sommet en P et qui évidemment la coupe à l'entrée et à la sortie sous des angles égaux, la surface de l'élément H est

$$\frac{d\omega\,\overline{KF}^2 . 2R}{EF}\,\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PF}^2},$$

et l'action de cet élément sur la masse μ placée en M est

$$\frac{d\omega\,\overline{KF}^2 . 2R}{EF}\,\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PF}^2}\,\frac{\lambda}{\overline{PH}^3}\,\frac{f\mu}{\overline{HM}^2}.$$

Les triangles semblables PKF, PHM donnent

$$\frac{\overline{KF}^2}{\overline{PF}^2 . \overline{HM}^2} = \frac{1}{\overline{PM}^2}.$$

On a, de plus,

$$\frac{1}{PH} = \frac{PF}{h^2},$$

et l'expression de l'attraction suivant HM est

$$(22) \qquad \frac{\lambda f\mu\, d\omega . 2R}{h^2 . EF}\,\frac{1}{\overline{PM}^2}\,PF.$$

L'action dirigée suivant GM sera de même

$$(23) \qquad \frac{\lambda f\mu\, d\omega . 2R}{h^2 . EF}\,\frac{1}{\overline{PM}^2}\,PE,$$

et les deux forces que nous devons composer sont entre elles, par conséquent, comme les lignes PF et PE. La similitude des triangles EPK, PMG, HPM, PKF montre d'ailleurs que l'angle EPF est le supplément de HMG. Nous avons donc un triangle PEF dont les côtés PE et PF, proportionnels à nos deux forces, forment un angle supplémentaire de celui de leurs directions. Le troisième côté EF est donc proportionnel à la résultante qui forme avec MH et MG des angles égaux aux deux angles PEF et PFE et est, par conséquent, dirigée suivant MP. La grandeur de cette résultante s'obtiendra en remplaçant dans (22) PF par EF. On obtient ainsi

$$(24) \qquad \frac{\lambda f\mu\, d\omega . 2R}{h^2}\,\frac{1}{\overline{PM}^2};$$

et pour faire la somme relative à toutes les directions du cône EF autour du point K,

il suffit de remplacer $d\omega$ par 2π; l'action cherchée est donc

$$\frac{4\pi\lambda f\mu R}{k^2}\frac{1}{\overline{PM}^2}; \tag{25}$$

elle est dirigée vers le point P et inversement proportionnelle au carré de la distance à ce point. La couche attire donc les points extérieurs comme le ferait une masse

$$\frac{4\pi\lambda R}{k^2} \tag{26}$$

concentrée en P.

Cette masse, il est facile de le démontrer directement, est précisément celle de la couche. Il est impossible d'ailleurs qu'il en soit autrement, car si l'on éloigne à l'infini le point attiré M, toutes les forces agissant dans la même direction, leur résultante est égale à leur somme et doit être représentée par la masse de la couche divisée par le carré de sa distance au point M.

Lorsque le point attiré est intérieur à la couche, on peut reproduire la même démonstration en se servant du même texte avec une figure nouvelle dans laquelle le point P devra être extérieur et le point M intérieur, le produit PM.PK étant alors égal au produit d'une sécante issue du point P par la partie extérieure. L'action représentée par la formule (25) sera dirigée vers le point P, et la couche pourra être remplacée par une masse concentrée en ce point. Mais cette masse, toujours représentée par l'expression (26), n'est plus égale à celle de la couche; il faut, pour l'obtenir, multiplier celle-ci par un facteur égal à la distance du point P au centre divisée par le rayon de la sphère.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES.

Définition d'une intégrale multiple.

481. Nous avons été conduits, par l'évaluation des volumes et par celle des surfaces courbes, à considérer des intégrales qui ont été nommées *intégrales doubles* et dont le calcul exige deux intégrations successives. Nous allons, dans ce chapitre, étudier ces intégrales indépendamment des problèmes géométriques auxquels elles doivent leur origine et en généraliser la notion analytique en considérant des intégrales d'ordre quelconque, c'est-à-dire dans lesquelles figure un nombre quelconque d'intégrations.

Considérons un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indépendantes les unes des autres et assujetties à une ou plusieurs conditions d'inégalité de la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0, \tag{1}$$

analogues à celle qui, dans le cas où le nombre des variables est deux ou trois seulement, leur impose la condition de représenter les coordonnées d'un point intérieur à une certaine courbe ou à une certaine surface. Les systèmes des valeurs accessibles aux variables peuvent être partagés en groupes dont chacun comprenne toutes celles pour lesquelles les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont comprises chacune entre deux valeurs infiniment voisines qui seront pour x_i

$$x_i \quad \text{et} \quad x_i + dx_i.$$

Si nous multiplions une fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n$$

par le produit

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

la somme des valeurs de ce produit, étendue à tous les groupes, est l'intégrale multiple

$$\int\int\cdots\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

dont les limites sont définies par l'inégalité (1).

On peut d'ailleurs substituer à cette inégalité toute autre condition ou système de conditions indiquant avec précision quelles sont les valeurs qu'il faut accepter pour les variables; la définition reste la même.

482. Pour calculer une intégrale multiple telle que (2), on devra commencer par sommer tous les éléments qui correspondent aux mêmes valeurs de $n-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ par exemple, et leur somme

$$dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

s'obtiendra par une première intégration dont les limites seront, en général, des fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ que l'on calculera à l'aide de l'inégalité (1) ou des conditions qui la remplacent. L'expression de cette première somme étant obtenue et égale à

$$\psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n,$$

on réunira toutes celles qui correspondent aux mêmes valeurs de $x_3, x_4, \ldots, x_n$, et leur somme

$$dx_3\, dx_4 \ldots dx_n \int dx_2\, \psi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = dx_3\, dx_4 \ldots dx_n \int dx_2 \int dx_1\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

s'obtiendra par une intégration prise par rapport à x_2 entre des limites qui dépendent de $x_3, x_4, \ldots, x_n$ seulement. On continuera de même en faisant varier successivement les n variables, et la dernière intégration aura pour limites deux constantes qui sont les valeurs extrêmes de x_n lorsque les $n-1$ autres variables sont entièrement indéterminées.

L'ordre dans lequel les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont choisies dans les intégrations précédentes est absolument arbitraire, et l'on peut, dans le calcul d'une intégrale multiple, changer l'ordre des intégrations, pourvu que l'on change en conséquence les limites successives de manière à embrasser, en somme, les mêmes systèmes de valeurs de toutes les variables. La possibilité d'intervertir les intégrations repose sur ce principe évident qu'une somme reste la même quel que soit l'ordre dans lequel on ajoute les parties. Le théorème a pourtant des cas d'exception lorsque certains éléments deviennent infinis, et nous en avons donné un exemple (**225**).

483. Calculons, d'après les définitions précédentes, l'intégrale

$$(3) \qquad \int\int \cdots \int x_1^{k_1-1}\, x_2^{k_2-1} \ldots x_n^{k_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue aux valeurs positives des variables pour lesquelles on a

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1.$$

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une variable; on a

$$(4) \qquad \int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1 = \frac{1}{k_1}.$$

S'il y a deux variables, l'intégrale est

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\,dx_2.$$

La première intégration s'effectue immédiatement, et l'expression est ramenée à l'intégrale simple

$$\int_0^1 \frac{x_1^{k_1-1}(1-x_1)^{k_2}}{k_2}\,dx_1,$$

c'est-à-dire (322)

$$(5) \qquad \frac{1}{k_2}\,\frac{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2+1)}{\Gamma(k_1+k_2+1)} = \frac{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2+1)}.$$

Dans le cas de trois variables, l'intégrale triple est

$$(6) \qquad \int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}\,dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} x_3^{k_3-1}\,dx_3.$$

Il est clair en effet que la somme $x_1 + x_2 + x_3$ ne devant pas surpasser l'unité, si dans la première intégration x_1 et x_2 sont constants, x_3 ne peut pas surpasser $1 - x_1 - x_2$; dans la seconde, x_1 reste constant, et x_2 ne doit pas surpasser $1 - x_1$; la troisième enfin doit s'étendre à toutes les valeurs de x_1, c'est-à-dire de zéro à 1.

La première intégration s'effectue de suite, et la formule (6) devient

$$(7) \qquad \int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1 \int_0^{1-x_1} \frac{x_2^{k_2-1}(1-x_1-x_2)^{k_3}}{k_3}\,dx_2.$$

Pour effectuer l'intégration par rapport à x_2, posons

$$x_2 = v(1-x_1).$$

On aura

$$\int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}(1-x_1-x_2)^{k_3}\,dx_2 = \int_0^1 v^{k_2-1}(1-v)^{k_3}(1-x_1)^{k_2+k_3}\,dv$$
$$= (1-x_1)^{k_2+k_3}\,\frac{\Gamma(k_2)\,\Gamma(k_3+1)}{\Gamma(k_2+k_3+1)},$$

et la formule (7) devient

$$\frac{\Gamma(k_2)\Gamma(k_3+1)}{k_3\Gamma(k_2+k_3+1)}\int_0^1 x_1^{k_1-1}(1-x_1)^{k_2+k_3}\,dx_1 = \frac{\Gamma(k_2)\Gamma(k_3+1)}{k_3\Gamma(k_2+k_3+1)}\,\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2+k_3+1)}{\Gamma(k_1+k_2+k_3+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)}{\Gamma(k_1+k_2+k_3+1)}.$$

La méthode est générale; faisons encore, pour la mettre en évidence, le calcul de l'intégrale

$$(8)\qquad \int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1\int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}\,dx_2\int_0^{1-x_1-x_2} x_3^{k_3-1}\,dx_3\int_0^{1-x_1-x_2-x_3} x_4^{k_4-1}\,dx_4.$$

En effectuant l'intégration par rapport à x_4, on transforme cette expression en

$$(9)\qquad \int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1\int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}\,dx_2\int_0^{1-x_1-x_2} \frac{x_3^{k_3-1}(1-x_1-x_2-x_3)^{k_4}}{k_4}\,dx_3.$$

Pour effectuer l'intégration par rapport à x_3, posons

$$x_3 = (1-x_1-x_2)\,v.$$

Nous aurons

$$\int_0^{1-x_1-x_2} x_3^{k_3-1}(1-x_1-x_2-x_3)^{k_4}\,dx_3 = \int_0^1 v^{k_3-1}(1-v)^{k_4}(1-x_1-x_2)^{k_3+k_4}\,dv$$
$$= (1-x_1-x_2)^{k_3+k_4}\,\frac{\Gamma(k_3)\Gamma(k_4+1)}{\Gamma(k_3+k_4+1)},$$

et l'expression (9) devient

$$(10)\qquad \frac{\Gamma(k_3)\Gamma(k_4+1)}{k_4\Gamma(k_3+k_4+1)}\int_0^1 x_1^{k_1-1}\,dx_1\int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}(1-x_1-x_2)^{k_3+k_4}\,dx_2.$$

Pour effectuer l'intégration par rapport à x_2, on posera

$$x_2 = (1-x_1)\,u,$$

et on aura

$$\int_0^{1-x_1} x_2^{k_2-1}(1-x_1-x_2)^{k_3+k_4}\,dx_2 = \int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_3+k_4}(1-x_1)^{k_2+k_3+k_4}\,du$$
$$= (1-x_1)^{k_2+k_3+k_4}\,\frac{\Gamma(k_2)\Gamma(k_3+k_4+1)}{\Gamma(k_2+k_3+k_4+1)},$$

et la formule (10) devient

$$(11)\qquad \frac{\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)\Gamma(k_4)}{\Gamma(k_2+k_3+k_4+1)}\int_0^1 x_1^{k_1-1}(1-x_1)^{k_2+k_3+k_4}\,dx_1 = \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)\Gamma(k_4)}{\Gamma(k_1+k_2+k_3+k_4+1)}.$$

On a, en général,

$$(12)\qquad \int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n+1)},$$

les limites étant définies par la condition que $x_1, x_2,\ldots, x_n$ étant positifs satisfont à l'inégalité

$$x_1+x_2+\ldots+x_n<1.$$

484. La formule précédente comprend l'intégrale plus générale

$$(13)\qquad \int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

les limites étant telles que $x_1, x_2,\ldots, x_n$ étant positifs satisfassent à l'inégalité

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}<1.$$

Que l'on pose en effet

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}=u_1,\quad \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}=u_2,\ldots,\quad \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}=u_n,$$

les variables $u_1, u_2,\ldots, u_n$, toutes positives, seront assujetties à l'inégalité

$$u_1+u_2+\ldots+u_n<1;$$

mais, dans les intégrations que nécessite le calcul de la formule (13), on peut remplacer $x_1, x_2,\ldots, x_n$ respectivement par $u_1, u_2,\ldots, u_n$, et, comme il s'agit à chaque fois d'une intégrale simple, cette substitution ne fait naître aucune difficulté; l'intégrale deviendra

$$\frac{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}}{p_1p_2\ldots p_n}\int\int\cdots\int u_1^{\frac{k_1}{p_1}-1}u_2^{\frac{k_2}{p_2}-1}\ldots u_n^{\frac{k_n}{p_n}-1}\,du_1\,du_2\ldots du_n,$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad \frac{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}}{p_1p_2\ldots p_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}\right)}.$$

485. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$(15)\qquad \int\int\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

étendue aux valeurs positives pour lesquelles

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < R^2. \tag{16}$$

Elle est égale à

$$\frac{R^n}{2^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

Pour $n = 2$, elle représente le quart du cercle de rayon R, et l'on a en effet

$$\frac{R^2}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2)} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Pour $n = 3$, elle représente le huitième de la sphère de rayon R, et l'on a en effet

$$\frac{R^3}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\pi R^3}{6}.$$

Si l'on veut étendre l'intégrale (15) à toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à l'inégalité (16), il faut multiplier le résultat précédent par 2^n. Il est aisé de voir en effet que le signe de chaque variable étant assigné, l'intégrale, quelle que soit la combinaison choisie, aura la même valeur, et le nombre des combinaisons est 2^n.

486. L'intégrale

$$\int\int \cdots \int x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} \ldots x_n^{k_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{17}$$

étendue aux valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lesquelles

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < h$$

est égale (**484**) à

$$\frac{h^{k_1+k_2+\ldots+k_n}\, \Gamma(k_1)\, \Gamma(k_2) \ldots \Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1 + k_2 + \ldots + k_n + 1)}.$$

L'intégrale étendue aux valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont la somme est comprise entre h et $h + dh$, est par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\, h^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}\, dh\, \Gamma(k_1)\, \Gamma(k_2) \ldots \Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1 + k_2 + \ldots + k_n + 1)} \\ &= \frac{h^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}\, dh\, \Gamma(k_1)\, \Gamma(k_2) \ldots \Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)}. \end{aligned} \tag{18}$$

M. Liouville a déduit de cette remarque une formule de réduction pour l'intégrale

$$(19)\qquad \int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,\mathrm{F}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

étendue à toutes les valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquelles on a

$$x_1+x_2+\ldots+x_n<a.$$

L'intégrale relative aux valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquelles la somme est comprise entre h et $h+dh$ étant en effet

$$\frac{\mathrm{F}(h)\,h^{k_1+k_2+\cdots+k_n-1}\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)}\,dh,$$

la somme totale est évidemment

$$(20)\qquad \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)}\int_0^a \mathrm{F}(h)\,h^{k_1+k_2+\cdots+k_n-1}\,dh,$$

et l'intégrale multiple est ramenée à une intégrale simple.

On en conclut, par un changement de variables, la réduction de l'intégrale

$$(21)\qquad \int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,\varphi\left[\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Pour les valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}<a,$$

elle est équivalente à

$$(22)\qquad \frac{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}}{p_1p_2\ldots p_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}\right)}\int_0^a \varphi(h)\,h^{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}-1}\,dh.$$

Soit, par exemple, l'intégrale

$$(23)\qquad \int\int\cdots\int\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}},$$

étendue aux valeurs positives des variables qui laissent le radical réel. Cette inté-

grale est égale (323) à

$$(24)\qquad \frac{1}{2^n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 \frac{h^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{1-h^2}}\,dh = \frac{1}{2^n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)};$$

pour $n = 2$, on a

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

et l'intégrale, égale à $\frac{\pi}{2}$, représente alors le huitième de la surface d'une sphère de rayon unité.

Formule de Poisson.

487. Poisson, dans un de ses Mémoires, a transformé très-élégamment en une intégrale simple une intégrale double à laquelle l'avait conduit la solution d'un problème important.

Quelle que soit la fonction désignée par F et les constantes a, b, c, on a

$$(25)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\theta + b\sin\theta\cos\psi + c\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\,d\theta\,d\psi = 2\pi\int_{-1}^{+1} F(Ru)\,du$$

où

$$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Pour démontrer cette formule, regardons-y θ et ψ comme les coordonnées polaires des points d'une sphère de rayon unité; $\sin\theta\,d\theta\,d\psi$ (428) est l'élément de la surface de cette sphère. Pour donner une signification à l'expression

$$(26)\qquad a\cos\theta + b\sin\theta\cos\psi + c\sin\theta\sin\psi,$$

en nommant R, p, q les coordonnées polaires du point dont les coordonnées rectangulaires sont a, b, c, on aura

$$a = R\cos p,$$
$$b = R\sin p\cos q,$$
$$c = R\sin p\sin q,$$

et l'expression (26) est le produit de R par le cosinus de l'angle formé par les directions que définissent les angles θ et ψ d'une part, p et q d'autre part. En nom-

mant cet angle ω, et $d\sigma$ l'élément de la surface sphérique, l'intégrale devient

$$(27) \qquad \int F(R\cos\omega)\,d\sigma,$$

le signe $\int$ indiquant une intégration qui s'étend à la surface entière de la sphère de rayon unité.

Prenons pour pôle le point où le rayon vecteur R perce la sphère, θ_1 et ψ_1 étant les coordonnées polaires d'un point de la sphère, on aura

$$\omega = \theta_1,$$
$$d\sigma = \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\psi_1,$$

et l'intégrale (27) devient

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta_1\,F(R\cos\theta_1)\,d\theta_1\,d\psi_1.$$

L'intégration par rapport à ψ_1 s'effectue immédiatement, et l'intégrale double (25) est ramenée à l'intégrale simple

$$2\pi\int_0^{\pi} \sin\theta_1\,F(R\cos\theta_1)\,d\theta_1.$$

Si l'on pose

$$\cos\theta_1 = u,$$
$$\sin\theta_1\,d\theta_1 = -du,$$

l'intégrale devient

$$2\pi\int_{-1}^{+1} F(Ru)\,du:$$

c'est le théorème de Poisson.

Réduction par l'augmentation du nombre des intégrations.

488. Nous avons calculé plusieurs intégrales simples (**247**) en les ramenant à des intégrales doubles. Il arrive souvent aussi que la détermination d'une intégrale multiple se simplifie quand on remplace l'un des facteurs qui y figure par une intégrale équivalente, en augmentant ainsi pour les rendre plus simples le nombre des intégrations à effectuer, dont il est permis ensuite de changer l'ordre.

Soit à calculer l'intégrale

$$(28) \qquad \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} \frac{x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,e^{-(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n)}}{(a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^{k}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

On a

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)z}\,dz = \frac{\Gamma(\mu)}{(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)z}\,dz,$$

et l'intégrale (28) devient par suite

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}$$
$$\times e^{-(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)}\,e^{-(a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)z}\,z^{\mu-1}\,dz\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

c'est-à-dire, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-a_0z}\,dz\int_0^\infty x_1^{k_1-1}e^{-(\alpha_1+a_1z)x_1}\,dx_1$$
$$\times\int_0^\infty x_2^{k_2-1}e^{-(\alpha_2+a_2z)x_2}\,dx_2\ldots\int_0^\infty x_n^{k_n-1}e^{-(\alpha_n+a_nz)x_n}\,dx_n;$$

toutes les intégrations s'effectuent à l'exception de la dernière, et l'on trouve

$$(29)\qquad \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}e^{-a_0z}}{(\alpha_1+a_1z)^{k_1}(\alpha_2+a_2z)^{k_2}\ldots(\alpha_n+a_nz)^{k_n}}\,dz.$$

Méthode de Dirichlet.

489. Dirichlet a appliqué fort ingénieusement aux intégrales multiples la méthode employée (**256**) pour le calcul d'une intégrale simple, et qui consiste à introduire un facteur égal à l'unité dans les limites des intégrations et à zéro en dehors des mêmes limites, de manière à pouvoir ensuite prendre pour toutes les variables les limites $-\infty$ et ∞.

L'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos q\varphi\,d\varphi$$

est (**255**) égale à l'unité lorsque q est moindre que 1 et à zéro dans le cas contraire. Si donc une intégration doit être faite entre des limites définies par l'inégalité

$$F(x, y, z) < 1,$$

on pourra multiplier l'élément à intégrer par

$$\frac{2}{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{F}(x, y, z)\,d\varphi$$

et intégrer entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$, en substituant ainsi à l'intégrale proposée une intégrale nouvelle dans laquelle les variables x, y, z n'auront plus pour limites que $-\infty$ et ∞, car les éléments pour lesquels $\mathrm{F}(x, y, z)$ est supérieure à l'unité et qui ne doivent pas figurer dans la somme, sont multipliés par l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{F}(x, y, z)\,d\varphi$$

qui est égale à zéro. Les autres sont multipliés par l'unité, et le résultat n'est pas changé.

Appliquons cette méthode à l'intégrale

$$(30)\qquad \int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

prise entre les limites définies par l'inégalité

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}<1,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont supposés positifs.

Cette intégrale est égale, d'après la remarque de Dirichlet, à

$$(31)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}$$
$$\times\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\left[\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\cdots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,d\varphi;$$

elle est la partie réelle de

$$(32)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}$$
$$\times\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,e^{\varphi\sqrt{-1}\left[\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}\right]}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,d\varphi.$$

En intégrant d'abord par rapport à x_1, il faut calculer

$$\int_0^\infty x_1^{k_1-1}\,e^{\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}\varphi\sqrt{-1}}\,dx_1.$$

Posons

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}\varphi\sqrt{-1}=-u,$$

$$x_1=\alpha_1\left(\frac{u}{\varphi}\right)^{\frac{1}{p_1}}(-1)^{\frac{1}{2p_1}},$$

l'intégrale deviendra

$$\int_0^\infty \frac{\alpha_1^{k_1}u^{\frac{k_1}{p_1}-1}e^{-u}}{p_1\varphi^{\frac{k_1}{p_1}}}(-1)^{\frac{k_1}{2p_1}}du=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)}{p_1}\alpha_1^{k_1}\varphi^{-\frac{k_1}{p_1}}(-1)^{\frac{k}{2p_1}},$$

et on aura de même

$$\int_0^\infty x_2^{k_2-1}e^{\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{p_2}\varphi\sqrt{-1}}dx_2=\frac{\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)}{p_2}\alpha_2^{k_2}\varphi^{-\frac{k_2}{p_2}}(-1)^{\frac{k_2}{2p_2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\int_0^\infty x_n^{k_n-1}e^{\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{p_n}\varphi\sqrt{-1}}dx_n=\frac{\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)}{p_n}\alpha_n^{k_n}\varphi^{-\frac{k_n}{p_n}}(-1)^{\frac{k_n}{2p_n}},$$

et l'intégrale (32) devient

$$(33)\quad \frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)}{p_1p_2\cdots p_n}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_n^{k_n}(-1)^{\frac{k_1}{2p_1}+\frac{k_2}{2p_2}+\dots+\frac{k_n}{2p_n}}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi\varphi^{-\left(\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right)}.$$

Mais on a (325), en supposant μ compris entre 1 et 2,

$$(34)\qquad \int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^\mu}d\varphi=\frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi},$$

en sorte que l'intégrale demandée est la partie réelle de

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_n^{k_n}(-1)^{\frac{k}{2p_1}+\frac{k}{2p_2}+\dots+\frac{k_n}{2p_n}}}{p_1p_2\cdots p_n\Gamma\left(1+\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right)\sin\frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right)}.$$

Or on a

$$(-1)^{\frac{k_1}{2p_1}+\frac{k_2}{2p_2}+\dots+\frac{k_n}{2p_n}}=\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right)+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{k_1}{p_1}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right).$$

D'ailleurs

$$\sin\frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{k_1}{p_1}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right)=\cos\frac{1}{2}\pi\left(\frac{k_1}{p_1}+\dots+\frac{k_n}{p_n}\right),$$

et l'intégrale est enfin égale à

$$(35)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{p_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}\right)}\,\frac{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}}{p_1p_2\ldots p_n},$$

comme on l'a trouvé (**484**).

490. La démonstration précédente repose sur la formule (34) et suppose par conséquent

$$\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}<1.$$

Si cette condition n'est pas remplie, l'intégrale (33) est infinie. L'intégrale (30) est cependant finie, et la formule trouvée est encore applicable. La démonstration de Dirichlet est alors en défaut, et nous devons en chercher la cause. Il n'est pas toujours permis, nous l'avons dit, d'intervertir l'ordre des intégrations, et on ne doit le faire que dans le cas seulement où l'intégrale peut être considérée comme la somme de ses éléments infiniment petits, peu importe alors dans quel ordre ils sont réunis. Mais lorsque les éléments ne sont pas tous de même signe et que la somme des valeurs absolues (ou, s'il s'agit d'expressions imaginaires, la somme des modules) est infinie, l'ordre dans lequel on les ajoute peut exercer une influence sur la somme, et l'inversion de l'ordre des intégrations peut changer (**225**) complétement le résultat.

Dans l'exemple qui nous occupe, l'intégrale calculée d'abord

$$\int_0^\infty x_1^{k_1-1}\,e^{\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{p_1}\varphi\sqrt{-1}}\,dx_1$$

devient infinie pour $\varphi=0$, et la méthode fondée sur l'inversion de l'ordre des intégrations ne doit pas être considérée comme rigoureuse.

491. Dirichlet, en signalant lui-même la difficulté, a indiqué le moyen de la faire disparaître. Il considère pour cela l'intégrale

$$(36)\qquad \int\int\cdots\int e^{-\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\,x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

étendue aux valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquelles on a

$$x_1+x_2+\ldots+x_n<1,$$

et dont il déduit aisément celle qui vient de nous occuper.

L'intégrale peut être remplacée, comme dans le cas précédent, par

$$(37)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-a(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\,x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}$$
$$\times\, dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,d\varphi;$$

et cette fois, a désignant un nombre positif, les intégrations prises par rapport à l'une quelconque des variables donnent un résultat fini. L'expression est la partie réelle de l'intégrale

$$(38)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-a(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(x_1+x_2+\ldots+x_n)\varphi\sqrt{-1}}$$
$$\times\, x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,d\varphi.$$

On a

$$\int_0^\infty e^{-(a+\varphi\sqrt{-1})x_1}\,x_1^{k_1-1}\,dx_1=\frac{\Gamma(k_1)}{(a+\varphi\sqrt{-1})^{k_1}}.$$

On peut donc effectuer les intégrations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et l'on trouve

$$(39)\qquad \frac{2}{\pi}\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi(a+\varphi\sqrt{-1})^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}\,d\varphi.$$

Mais la même méthode de transformation montre que

$$(40)\qquad \int_0^1 e^{-az}\,z^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}\,dz$$

est la partie réelle de

$$(41)\qquad \frac{2}{\pi}\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi\,\frac{1}{(a+\varphi\sqrt{-1})^{k_1+k_2+\ldots+k_n}},$$

et l'intégrale (36) est par conséquent égale à

$$(42)\qquad \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)}\int_0^1 e^{-az}\,z^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}\,dz.$$

Cette formule étant démontrée quel que soit a, Dirichlet y suppose $a=0$, et on a enfin

$$\int\int\cdots\int x_1^{k_1-1}\,x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$
$$=\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)}\int_0^1 z^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}\,dz=\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n)(k_1+k_2+\ldots+k_n)}$$
$$=\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\ldots\Gamma(k_n)}{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_n+1)},$$

les intégrations étant toujours étendues aux valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquelles on a

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1.$$

Il faut remarquer enfin que, dans l'équation (42), l'hypothèse $a = 0$ est légitime, car les éléments qui la composent sont tous positifs.

Changement de variables dans les intégrales multiples.

492. Soit

$$U = \int\int\cdots\int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

une intégrale multiple dont les limites soient définies avec précision. Proposons-nous d'y substituer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables nouvelles $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui en soient des fonctions connues. La solution implique évidemment trois recherches distinctes.

1° La transformation de la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; 2° la détermination du nouveau système de limites; 3° la recherche de l'expression qu'il faut substituer à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. La solution des deux premières questions est purement algébrique, et nous nous occuperons seulement de la troisième.

Supposons d'abord que l'on change une seule des variables et qu'à x_n on substitue u_n; écrivons l'intégrale proposée de la manière suivante :

$$\int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} \int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

Dans la première intégration à effectuer par rapport à x_n, x_1, x_2, x_{n-1} sont des constantes; pour remplacer x_n par u_n, il suffit d'exprimer x_n en fonction de u_n et de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et de remplacer dx_n par $\frac{dx_n}{du_n} du_n$. On a donc, en nommant $\varphi_1(x_1, x_2, x_{n-1}, u_n)$ ce que devient la fonction φ,

$$U = \int\int\cdots\int \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u_n) \frac{dx_n}{du_n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \cdot du_n.$$

Dans l'intégrale qui forme le second membre, changeons l'ordre des intégrations et écrivons-la comme il suit :

$$\int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-2} \int du_n \int \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u_n) \frac{dx_n}{du_n} dx_{n-1}.$$

Cette fois, dans la première intégration indiquée, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, u_n$ sont des

constantes. Pour remplacer x_{n-1} par u_{n-1}, il suffit donc d'exprimer x_{n-1} en x_1, $x_2, \ldots, x_{n-2}, u_n, u_{n-1}$, et de remplacer dx_{n-1} par $\frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}} du_{n-1}$; l'intégrale proposée devient ainsi

$$U = \int\int\cdots\int \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \frac{dx_n}{du_n} \frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-2} du_{n-1} du_n.$$

En continuant ainsi et remplaçant successivement chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $u_1, u_2, \ldots, u_n$, l'intégrale proposée deviendra

$$\int\int\cdots\int \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \frac{dx_n}{du_n} \frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}} \cdots \frac{dx_1}{du_1} du_1 du_2 \ldots du_n,$$

$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ étant ce que devient la fonction φ lorsque les variables sont remplacées par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et $\frac{dx_n}{du_n}, \frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}}, \ldots, \frac{dx_1}{du_1}$, qui n'ont de sens (I, 51) qu'autant que l'on indique les variables qui, dans le calcul de chacune d'elles, doivent rester constantes, sont définies, comme cela résulte de la démonstration, de la manière suivante :

Dans $\frac{dx_n}{du_n}$, x_n est considéré comme fonction de u_n et de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, qui restent constantes dans la différentiation.

Dans $\frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}}$, x_{n-1} est fonction de u_{n-1} et de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ et u_n, qui restent constantes dans la différentiation.

Dans $\frac{dx_{n-2}}{du_{n-2}}$, x_{n-2} est fonction de u_{n-2} et de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, u_{n-1}, u_n$, qui restent constantes dans la différentiation.

Et ainsi de suite jusqu'à $\frac{dx_1}{du_1}$, où x_1 est considéré comme fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Le produit ainsi défini,

$$\left(\frac{dx_n}{du_n}\right)\left(\frac{dx_{n-1}}{du_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{dx_1}{du_1}\right),$$

est égal (I, 77) au déterminant du système des variables anciennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par rapport aux variables nouvelles $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et l'on doit enfin, dans la transformation d'une intégrale multiple, remplacer

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

par

$$du_1 du_2 \ldots du_n \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

493. Le résultat est d'accord avec ceux que nous avons trouvés (451) pour

l'évaluation des aires et des volumes, et en cherchant l'expression des intégrales

$$\int\int dx\,dy,$$

$$\int\int\int dx\,dy\,dz,$$

quand on adopte un système quelconque de variables, on retrouve les formules données (451).

494. Cherchons l'intégrale

$$(43)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta\,d\psi}{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

qui, représentant (450) le triple du volume de l'ellipsoïde dont les axes sont a, b, c, est égale, on le sait d'avance, à $4\pi abc$; remplaçons θ et ψ par deux angles nouveaux p et q définis par les équations

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} a\cos p &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}}},\\ b\sin p\cos q &= \frac{\sin\theta\cos\psi}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}}},\\ c\sin p\sin q &= \frac{\sin\theta\sin\psi}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}}}, \end{aligned}\right.$$

qui évidemment sont compatibles, puisqu'en ajoutant leurs carrés après les avoir divisées par a, b, c respectivement, on trouve l'identité $1=1$. On en déduit aisément

$$\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}}\,\sqrt{a^2\cos^2p+b^2\sin^2p\cos^2q+c^2\sin^2p\sin^2q}=1,$$

et par conséquent

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a\cos p}{\sqrt{a^2\cos^2p+b^2\sin^2p\cos^2q+c^2\sin^2p\sin^2q}},\\ \sin\theta\cos\psi &= \frac{b\sin p\cos q}{\sqrt{a^2\cos^2p+b^2\sin^2p\cos^2q+c^2\sin^2p\sin^2q}},\\ \sin\theta\sin\psi &= \frac{c\sin p\sin q}{\sqrt{a^2\cos^2p+b^2\sin^2p\cos^2q+c^2\sin^2p\sin^2q}}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$\text{(46)} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{c}{b}\operatorname{tang} q;$$

ψ étant exprimé en fonction de q seulement, le déterminant par lequel on doit multiplier $dp\,dq$ pour remplacer $d\psi\,d\theta$ se réduit à

$$\frac{d\psi}{dq}\frac{d\theta}{dp}.$$

On déduit des équations (45) et (46)

$$\frac{d\psi}{dq} = \frac{bc}{b^2\cos^2 q + c^2\sin^2 q},$$

$$\sin\theta\frac{d\theta}{dp} = \frac{a(b^2\cos^2 q + c^2\sin^2 q)\sin p}{(a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p\cos^2 q + c^2\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les limites, on le voit aisément, sont d'ailleurs les mêmes pour p et q que pour θ et ψ, et l'intégrale se réduit à

$$abc\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin p\,dp\,dq = 4\pi abc.$$

495. Nous indiquerons comme seconde application la démonstration élégante donnée par Jacobi d'une formule fondamentale dans la théorie des intégrales Eulériennes.

On a, par définition,

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}\,dx,$$

$$\Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-y}y^{k-1}\,dy.$$

On en conclut

$$\text{(47)} \qquad \Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{k-1}y^{k-1}\,dx\,dy;$$

car il suffit d'effectuer les intégrations indiquées (47) pour voir que l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples.

Remplaçons les variables x et y par deux variables u et v, liées aux premières par les relations

$$x = uv, \quad y = u(1-v).$$

Les limites seront 0 et ∞ pour u, 0 et 1 pour v, et l'on devra remplacer $dx\,dy$ par

$$du\,dv\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}\right) = u\,du\,dv;$$

et par conséquent

$$\Gamma(k)\Gamma(l)=\int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}u^{k+l-1}v^{k-1}(1-v)^{l-1}\,du\,dv,$$

d'où

$$\Gamma(k)\Gamma(l)=\Gamma(k+l)\int_0^1 v^{k-1}(1-v)^{l-1}\,dv,$$

et enfin

$$\int_0^1 v^{k-1}(1-v)^{l-1}\,dv=\frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)},$$

ce qui s'accorde avec la formule connue (**322**).

496. M. Schlomilch a élégamment généralisé le calcul précédent pour exprimer à l'aide de la fonction Γ une intégrale plus générale que l'intégrale Eulérienne de première espèce.

On a

$$\int_0^\infty x^{k-1}e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(k)}{a^k},$$

$$\int_0^\infty y^{l-1}e^{-by}\,dy=\frac{\Gamma(l)}{b^l}.$$

et l'on en déduit

$$(48)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty x^{k-1}y^{l-1}e^{-(ax+by)}\,dx\,dy=\frac{\Gamma(k)}{a^k}\,\frac{\Gamma(l)}{b^l}.$$

Posons

$$x=uv,\quad y=u(1-v).$$

$dx\,dy$ dans l'intégrale double devra être remplacé comme (**495**) par

$$u\,du\,dv,$$

et le premier membre de (48) deviendra

$$\int_0^\infty\int_0^1 u^{k+l-1}(1-v)^{l-1}v^{k-1}e^{-[b(1-v)+av]u}\,du\,dv,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(k+l)\int_0^1\frac{(1-v)^{l-1}v^{k-1}}{[b(1-v)+av]^{k+l}}\,dv,$$

et par conséquent

$$\int_0^1\frac{(1-v)^{l-1}v^{k-1}}{[b(1-v)+av]^{k+l}}\,dv=\frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}\,\frac{1}{a^kb^l}.$$

Si l'on pose $1 - v = z$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{z^{l-1}(1-z)^{k-1}}{[bz + a(1-z)]^{k+l}}\,dz = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}\,\frac{1}{a^l b^k},$$

et, en posant $\frac{z}{1-z} = t$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{l-1}\,dt}{(bt+a)^{k+l}} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}\,\frac{1}{a^l b^k}.$$

497. Considérons comme second exemple l'intégrale

$$\iint \frac{d\sigma}{\mathrm{RR}'},$$

dans laquelle $d\sigma$ désigne l'élément d'une surface fermée quelconque et RR′ le produit des rayons de courbure. On a, en adoptant des coordonnées rectilignes orthogonales,

$$d\sigma = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

p, q, r, s, t désignant les dérivées partielles du premier et du second ordre de z par rapport à x et à y, conformément aux notations adoptées (I, 634).

Substituons à x et à y les deux variables p et q : $dx\,dy$ doit être remplacé par

$$dp\,dq\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right) = \frac{dp\,dq}{\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}} = \frac{dp\,dq}{rt - s^2},$$

et l'intégrale proposée devient

$$\iint \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

les limites correspondant à toutes les directions de la normale définie par les valeurs de p et de q qui correspondent à la surface entière. Mais il est aisé de voir que p et q, dans une surface convexe, prennent deux fois chaque système de valeurs, savoir aux points pour lesquels la normale est parallèle. L'intégrale précédente doit donc être écrite

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit qu'elle est indépendante de la forme de la surface considérée.

Pour la calculer, posons

$$p^2 + q^2 = \rho^2,$$

$$\operatorname{tang} \frac{p}{q} = \omega.$$

En adoptant ainsi la transformation par laquelle on passe dans un plan des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, $dp\,dq$ devra être remplacé par $\rho\,d\rho\,d\omega$, et l'intégrale par

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi\int_0^{\infty} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi.$$

La géométrie rend d'ailleurs ce résultat évident : $\frac{d\sigma}{RR'}$ représente en effet (I, 722) la courbure totale de l'élément $d\sigma$, c'est-à-dire la partie correspondante de la sphère de rayon unité, dont la surface totale est représentée par l'intégrale qu'on vient de calculer.

498. La transformation de coordonnées rectilignes en coordonnées polaires qui transforme le produit $dx\,dy\,dz$ en $\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\psi$, a été généralisée par Jacobi.

Soit une intégrale d'ordre n effectuée sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\theta_1,\\
x_2 &= \rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
x_3 &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2.$$

En élevant ces équations au carré et remplaçant ρ^2 par sa valeur, elles prennent la forme indiquée (I, 77), et qui change le déterminant en un produit. La première en effet devient

$$x_1^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\cos^2\theta_1$$

ou

$$x_1^2 \sin^2\theta_1 = (x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)\cos^2\theta_1;$$

la seconde

$$\begin{aligned}
x_2^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 = (x_2^2 + \ldots + x_n^2)\cos^2\theta_2,\\
x_2^2 \sin^2\theta_2 &= (x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2)\cos^2\theta_2,
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
x_3^2 \sin^2\theta_3 &= (x_4^2 + x_5^2 + \ldots + x_n^2)\cos^2\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1}^2 \sin^2\theta_{n-1} &= x_n^2\cos^2\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

et le déterminant est alors (I, 77)

$$\frac{dx_1}{d\theta_1}\frac{dx_2}{d\theta_2}\cdots\frac{dx_{n-1}}{d\theta_{n-1}}\frac{dx_n}{d\rho}=\frac{1}{2^n x_1 x_2\ldots x_n}\frac{d(x_1^2)}{d\theta_1}\frac{d(x_2^2)}{d\theta_2}\cdots\frac{d(x_n^2)}{d\rho}.$$

Chacune des lettres $x_2, x_3, \ldots, x_n$ devant être considérée comme constante dans les dérivées de celles qui la précèdent, et en remarquant que

$$\begin{aligned}
&x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=\rho^2\sin^2\theta_1,\\
&x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2=\rho^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\\
&x_4^2+\ldots+x_n^2=\rho^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_{n-1}^2+x_n^2=\rho^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{n-2},\\
&x_n^2=\rho^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

on trouve, après des réductions faciles, la valeur de $dx_1\,dx_2\ldots dx_n$

$$\rho^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}\ldots\sin\theta_{n-1}\,d\rho\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{n-1},$$

qui, dans le cas de $n=3$, se réduit à

$$\rho^2\sin\theta_2\,d\theta_2\,d\theta_1.$$

Différentiation et intégration sous le signe $\int$.

499. Une intégrale multiple qui contient un paramètre dont les limites sont indépendantes peut être différentiée par rapport à ce paramètre, et la règle est la même, aussi bien que la démonstration, que dans le cas d'une intégrale simple.

M. Liouville en a déduit la valeur d'une intégrale multiple dont il fait élégamment l'application à la démonstration d'un théorème célèbre.

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{R}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x_1+x_2+\frac{a^3}{x_1x_2}\right)}x_1^{\frac{1}{3}-1}x_2^{\frac{2}{3}-1}\,dx_1\,dx_2.$$

On a

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}=-3a^2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x_1+x_2+\frac{a^3}{x_1x_2}\right)}x_1^{\frac{1}{3}-1}x_2^{\frac{2}{3}-1}\frac{dx_1\,dx_2}{x_1x_2}.$$

Substituons à la variable x_1 une autre variable y en posant

$$x_1=\frac{a^3}{yx_2},\quad \frac{a^3}{x_1x_2}=y,\quad \frac{dx_1}{x_1}=-\frac{dy}{y}.$$

Les limites de y sont ∞ et zéro, et on a par conséquent

$$\frac{dR}{da} = -3\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(y + x_2 + \frac{a^3}{yx_2}\right)} x_2^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1}\, dx_2\, dy,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{da} = -3R,$$

d'où l'on déduit

$$R = Ce^{-3a}.$$

En posant $a = 0$, C se réduit évidemment à $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$, et on a enfin

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)e^{-3a}.$$

500. Soit plus généralement

$$R = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{a^n}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}\right)} x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

On aura

$$\frac{dR}{da} = -na^{n-1}\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{a^n}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}\right)} x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}.$$

Substituons à x_1 une autre variable x_n en posant

$$x_1 = \frac{a^n}{x_2 x_3 \ldots x_n},$$

on trouvera

$$\frac{dR}{da} = -n\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \frac{a^n}{x_2 x_3 \ldots x_n}\right)} x_2^{\frac{1}{n}-1} x_3^{\frac{2}{n}-1} \ldots x_n^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{da} = -nR.$$

On en conclut

$$R = Ce^{-na},$$

et comme pour $a = 0$, on a évidemment (297)

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

on a enfin

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-na}.$$

501. M. Liouville a déduit de cette formule la démonstration du théorème de Gauss démontré déjà (299) et (303)

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\mu).$$

Le produit qui forme le premier membre est égal en effet, comme on s'en assure en effectuant les intégrations successives, à l'intégrale multiple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})} x_1^{\frac{\mu}{n}-1} x_2^{\frac{\mu+1}{n}-1} \ldots x_n^{\frac{\mu+n-1}{n}-1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Substituons à x_1 une variable a en posant

$$x_1 = \frac{a^n}{x_2 x_3 \ldots x_n}.$$

On en conclut

$$x_1^{\frac{\mu}{n}-1} dx_1 = \frac{n a^{\mu-1} da}{(x_2 x_3 \ldots x_n)^{\frac{\mu}{n}}}.$$

Le résultat de la substitution peut s'écrire

$$n \int_0^\infty R a^{\mu-1} da,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de R,

$$n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-na} a^{\mu-1} da = n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu),$$

ce qui démontre la formule de Gauss.

Théorème de Georges Green.

502. Nous devons placer ici, comme l'un des résultats les plus élégants et les plus féconds à la fois dans la théorie des intégrales multiples, un beau théorème de Georges Green relatif aux intégrales étendues à l'intérieur d'un volume quelconque. Si l'on désigne par U et par V deux fonctions quelconques de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, assujetties seulement à rester finies, ainsi que leurs coefficients différentiels, dans l'intérieur d'un volume terminé par une surface

fermée, considérons l'expression

$$(1)\qquad \int\int\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz+\int\int d\sigma\,U\frac{dV}{dn},$$

dans laquelle la première intégrale s'étend à tous les éléments du volume, et la seconde, où $d\sigma$ désigne l'élément de surface, à la surface qui le termine, et où enfin $\frac{dV}{dn}$ désigne comme (472) le rapport de l'accroissement infiniment petit dV correspondant à un déplacement dn effectué sur la normale intérieure, à la longueur dn de ce déplacement.

La somme (1) ne change pas quand on y permute les deux fonctions U et V, et elle est égale par conséquent à

$$(2)\qquad \int\int\int V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz+\int\int\int d\sigma\,V\frac{dU}{dn}.$$

Pour le démontrer, considérons l'intégrale

$$(3)\qquad \int\int\int dx\,dy\,dz\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)$$

étendue à tous les éléments du volume considéré. Désignons par les indices 1, 2, 3, 4,..., $2n$ les intersections, au nombre de deux si elle est convexe, de la surface qui limite le corps avec une parallèle à l'axe des X. L'intégration par parties donnera

$$(4)\qquad \int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}=\int\int dy\,dz\left(U_{2n}\frac{dV_{2n}}{dx}-U_{2n-1}\frac{dV_{2n-1}}{dx}+\cdots-U_1\frac{dV_1}{dx}\right)$$
$$-\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\frac{d^2V}{dx^2}.$$

Mais, en nommant $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, .., $d\sigma_{2n}$ les éléments de surface qui se projettent sur le rectangle $dy\,dz$, et α_1, α_2,..., α_{2n} les angles de la normale extérieure avec l'axe des X, on a

$$dy\,dz=\cos\alpha_{2n}\,d\sigma_{2n}=-\cos\alpha_{2n-1}\,d\sigma_{2n-1}=\ldots=-d\sigma_1\cos\alpha_1,$$

et la première intégrale du second membre de (4) devient

$$\int d\sigma\,U\frac{dV}{dx}\cos\alpha.$$

On a donc

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{dU}{dx}\,\frac{dV}{dx}=\int d\sigma\,U\,\frac{dV}{dx}\cos\alpha-\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\,\frac{d^2V}{dx^2}.$$

On trouverait de même

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{dU}{dy}\,\frac{dV}{dy}=\int d\sigma\,U\,\frac{dV}{dy}\cos\beta-\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\,\frac{d^2V}{dy^2},$$

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{dU}{dz}\,\frac{dV}{dz}=\int d\sigma\,U\,\frac{dV}{dz}\cos\gamma-\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\,\frac{d^2V}{dy^2},$$

et, en ajoutant, l'expression (3) se trouve transformée en

$$(5)\qquad \int d\sigma\,U\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos\beta+\frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)$$
$$-\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right).$$

Mais on a évidemment, en nommant $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées de l'extrémité de la normale intérieure dn,

$$\cos\alpha=-\frac{dx}{dn},\quad \cos\beta=-\frac{dy}{dn},\quad \cos\gamma=-\frac{dz}{dn},$$

et par conséquent

$$\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos\beta+\frac{dV}{dz}\cos\gamma=-\frac{dV}{dn}.$$

L'expression (5) ne diffère donc de (1) que par le signe, et puisqu'elle est égale à (3), évidemment symétrique par rapport aux fonctions U et V, on peut y changer aussi ces deux fonctions l'une dans l'autre.

On peut remarquer que dn désigne dans (1) l'élément de la normale *intérieure*. Si l'on veut le remplacer par l'élément de normale *extérieure*, il suffit de changer le signe de $\frac{dV}{dn}$, et par conséquent celui de la seconde intégrale.

503. La démonstration précédente suppose aux fonctions U et V, ainsi qu'à leurs dérivées, des valeurs finies dans l'intérieur du volume considéré. Cette condition est indispensable, et si elle n'était pas remplie, les intégrations par parties sur lesquelles repose la démonstration ne seraient plus légitimes. Supposons, par exemple, que la fonction V restant finie et continue ainsi que ses dérivées, la fonction U, dans le voisinage d'un point intérieur P, puisse être considérée comme égale à l'inverse $\frac{1}{r}$ de la distance à ce point. Décrivons une sphère infiniment petite de

rayon a autour du point P comme centre. Le théorème est applicable évidemment à la portion du corps extérieure à cette sphère, et comme on a

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}=0,$$

l'intégrale triple

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)$$

peut être étendue au volume tout entier. Il en est de même de

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right),$$

qui évidemment est pour l'étendue de la petite sphère un infiniment petit de l'ordre a^2. L'intégrale

$$\int\int d\sigma\,U\,\frac{dV}{dn}$$

étendue à la surface de la sphère est également infiniment petite, de même ordre que le rayon a; le seul terme à ajouter est donc

$$\int d\sigma\,V\,\frac{dU}{dn}$$

étendue à la surface de la petite sphère. On a

$$\frac{dU}{dn}=\frac{d\frac{1}{r}}{dr}=-\frac{1}{r^2},$$

c'est-à-dire, pour les points de la surface, $-\frac{1}{a^2}$, et par conséquent

$$\int d\sigma\,V\,\frac{dU}{dn}=-\frac{1}{a^2}V_P\int d\sigma=-\frac{4\pi a^2}{a^2}V_P=-4\pi V_P,$$

V_P désignant la valeur de la fonction V au point P, et l'on a enfin

$$(6)\qquad \int\int\int dx\,dy\,dz\,U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)+\int d\sigma\,U\,\frac{dV}{dn}$$
$$=\int\int\int dx\,dy\,dz\,V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)+\int\int d\sigma\,V\,\frac{dU}{dn}-4\pi V_P.$$

C'est le théorème de Georges Green.

504. Parmi les applications du théorème de Green, nous devons citer immédiatement la démonstration très-simple des propriétés des surfaces de niveau démontrées directement (**476**) d'après M. Chasles, qui les a trouvées indépendamment de lui, mais postérieurement à la publication de l'illustre géomètre.

Soient V_1 et V_2 deux fonctions finies et continues des coordonnées x, y, z d'un point de l'espace, la première donnée pour les points intérieurs à une surface fermée S, et la seconde pour les points extérieurs. Supposons que pour les points mêmes de S les deux fonctions soient égales, et que de plus on ait

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}+\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_1}{dz^2}=0,$$
$$\frac{d^2V_2}{dx^2}+\frac{d^2V_2}{dy^2}+\frac{d^2V_2}{dz^2}=0.$$

Admettons enfin que, pour les points situés à une distance infinie, V_2 soit infiniment petit de même ordre que l'inverse $\frac{1}{r}$ de la distance à l'origine, et les dérivées $\frac{dV_2}{dx}$, $\frac{dV_2}{dy}$, $\frac{dV_2}{dz}$ de même ordre que $\frac{1}{r^2}$; on peut attribuer à chaque élément $d\sigma$ de la surface S une masse $\rho\, d\sigma$ telle, que le potentiel de la surface sur les points extérieurs soit égal à V_2, et le potentiel sur les points intérieurs égal à V_1; la valeur de ρ qui remplit cette condition est

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\overline{V_1}}{dn}+\frac{d\overline{V_2}}{dn}\right).$$

$\overline{V_1}$ et $\overline{V_2}$ désignant ce que deviennent les fonctions V_1 et V_2 pour les points de la surface S, et les dérivées $\frac{d\overline{V_1}}{dn}$, $\frac{d\overline{V_2}}{dn}$ ayant la signification indiquée (**472**), où dn est pour la première une portion infiniment petite de la normale intérieure, et pour la seconde une portion infiniment petite de la normale extérieure.

Pour démontrer ce remarquable théorème, appliquons d'abord la formule de Green, en y supposant $V=V_1$, $U=\frac{1}{r}$, r étant la distance à un point M intérieur à S, et étendant les intégrales triples à la portion de l'espace intérieure à S; comme on a, par hypothèse,

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}+\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_1}{dz^2}=0,$$

et (**470**)

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}=0,$$

l'équation (6) se réduit à

$$(7)\qquad \int \frac{1}{r}\frac{d\overline{V_1}}{dn}\,d\sigma = \int \overline{V_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - 4\pi V'_1,$$

$\overline{V_1}$ désignant ce que devient V_1 pour les points de la surface S, et V'_1 la valeur que prend cette fonction au point M.

En appliquant le même théorème à la portion de l'espace comprise entre la surface S et une sphère de rayon infini, et remplaçant cette fois la fonction V par V_2, on aura, en remarquant que $\frac{1}{r}$ ne devient pas infini,

$$(8)\qquad \int \frac{1}{r}\frac{d\overline{V_2}}{dn}\,d\sigma = \int \overline{V_2}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma,$$

car la portion de l'intégrale relative aux éléments de la sphère de rayon infini est évidemment égale à zéro.

Si l'on ajoute les équations (7) et (8), en remarquant que $\overline{V_1} = \overline{V_2}$, et que les éléments dn étant pris dans des directions opposées, les valeurs de $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ sont égales et de signes contraires, on aura

$$(9)\qquad \int \left(\frac{d\overline{V_1}}{dn} + \frac{d\overline{V_2}}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r} = -4\pi V'_1,$$

c'est-à-dire, en posant $-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\overline{V_1}}{dn} + \frac{d\overline{V_2}}{dn}\right) = \rho$,

$$(10)\qquad \int \rho\frac{d\sigma}{r} = V'_1,$$

ce qui montre que le potentiel de la couche de densité ρ sur le point quelconque M de son intérieur est égal à la valeur V'_1 que prend en ce point la fonction V_1.

On prouvera absolument de même en plaçant le point M à l'extérieur, que le potentiel de la même couche sur les points extérieurs est représenté par V_2.

505. Considérons actuellement une masse attirante quelconque et une de ses surfaces de niveau S sur laquelle le potentiel ait une valeur C. Soit V′ le potentiel de la portion de masse extérieure à S, et V″ celui de la portion intérieure, on aura

$$V' + V'' = V,$$

et, pour les points de S,

$$\overline{V'} + \overline{V''} = C.$$

Appliquons le théorème précédent, en prenant

$$V_2 = V'',$$
$$V_1 = C - V',$$

les deux fonctions V_2 et V_1 satisfont évidemment aux conditions supposées (**504**), et par conséquent, en prenant

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\overline{V_2}}{dn} + \frac{d\overline{V_1}}{dn}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\overline{V'}}{dn} - \frac{d\overline{V''}}{dn}\right),$$

on obtiendra une couche dont le potentiel sur les points extérieurs sera V'', et sur les points intérieurs $C - V'$; cette couche attirera par conséquent les points extérieurs comme la portion de masse qui lui est intérieure, et son action sur les points intérieurs sera égale et contraire à celle de la portion de masse qui lui est extérieure.

Dans la différence

$$(11) \qquad \frac{d\overline{V'}}{dn} - \frac{d\overline{V''}}{dn}$$

il faut remarquer que l'élément dn de la normale a dans les deux termes une direction opposée; si l'on veut adopter pour les deux dérivées la direction de la normale intérieure, l'expression (11) devient

$$\frac{dV''}{dn} + \frac{dV'}{dn} = \frac{dV}{dn},$$

et la densité de la couche, égale à

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn},$$

est, on le voit, proportionnelle à l'intensité de l'attraction en chaque point.

Théorème de M. Crofton.

506. Nous indiquerons, pour terminer ce chapitre, un théorème d'une rare élégance découvert par M. Crofton et dont l'ingénieuse démonstration accroît singulièrement l'intérêt. Quoique l'auteur ait su la rendre indépendante du calcul des probabilités, c'est en s'appuyant sur les premiers principes de cette doctrine qu'on peut lui donner, je crois, la forme la plus simple et la plus nette.

Concevons sur un plan une série de lignes parallèles équidistantes et supposons que l'on projette au hasard sur ce plan un disque de forme convexe de dimensions

assez petites pour ne pouvoir pas rencontrer deux lignes à la fois. Quelle est la probabilité pour que ce disque en rencontre une et la recouvre en partie? Indépendante de la forme du disque, comme l'a ingénieusement remarqué M. E. Barbier, elle est la même pour tous ceux qui ont même périmètre. Il est clair, en effet, que le disque étant jeté au hasard, les éléments infiniment petits qui composent son contour ont chacun la même chance de se trouver sur l'une des parallèles. Si un avantage était attaché à la rencontre, celui qui l'attend pourrait équitablement vendre à prix égaux les chances relatives à chaque élément de longueur ds et suivant un tarif tel que la somme totale des prix représentât le double de la somme promise en cas de rencontre, car, d'après la forme du disque, s'il y a un *élément gagnant*, il y en aura nécessairement deux, ni plus ni moins.

Cela posé, la distance des parallèles étant $2a$, si le disque est un cercle de rayon r, la probabilité pour qu'il y ait rencontre est évidemment $\frac{r}{a}$, car il faut et il suffit pour cela que le centre se trouve à une distance moindre que r de l'une des parallèles entre lesquelles il est tombé, et que, par conséquent, sur une distance $2a$ dont tous les points sont également possibles, le centre du cercle se place dans une portion dont la longueur totale est $2r$.

Si l'on nomme L le périmètre de la circonférence, on a

$$L = 2\pi r,$$

et la probabilité demandée est par conséquent

$$(1) \qquad p = \frac{r}{a} = \frac{L}{2a\pi}.$$

Telle est la formule relative à une courbe convexe quelconque de périmètre L. Une ligne droite ou aiguille de longueur l doit être évidemment considérée comme une courbe fermée de longueur $2l$.

507. La formule (1) suppose au disque projeté une forme convexe qui ne permette pas à son contour d'être coupé en plus de deux points par une ligne droite. Si l'on calcule au lieu de la probabilité p l'*espérance mathématique* E d'un joueur qui, pour chaque intersection du contour du disque avec une des lignes tracées sur le papier, recevrait une somme égale à *un*, on aura évidemment, dans le cas du disque convexe,

$$E = 2p = \frac{L}{a\pi}:$$

mais cette formule s'applique alors à une courbe de forme quelconque que l'on projette sur l'ensemble des lignes parallèles. En nommant L sa longueur totale et supposant que chaque intersection avec l'une des parallèles soit payée *un franc*,

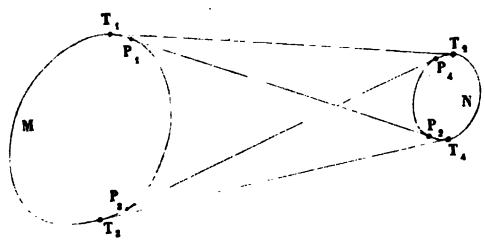
l'espérance mathématique est, pour chaque épreuve,

$$E = \frac{L}{a\pi}.$$

Il est clair, en effet, qu'à chaque élément correspond une espérance mathématique indépendante de sa liaison avec les autres, et que l'espérance totale dépend par conséquent de la seule longueur L.

508. Supposons que la figure projetée sur l'ensemble des parallèles se compose de deux courbes convexes invariablement liées l'une à l'autre et cherchons la probabilité pour que toutes deux soient rencontrées par une même ligne, en admettant que, d'après l'écartement des parallèles, la rencontre simultanée avec deux d'entre elles soit impossible.

Menons aux deux courbes les tangentes communes croisées P_1P_2, P_3P_4, et supposons que l'on projette la figure $P_3MP_1P_2NP_4P_3$. En nommant X sa longueur



totale et supposant que chaque intersection avec l'une des parallèles soit payée *un franc*, l'espérance mathématique relative à une épreuve est

$$\frac{X}{a\pi}.$$

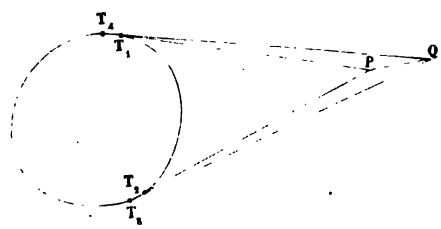
Les sommes éventuelles auxquelles se rapporte cette espérance mathématique comprennent toutes celles que l'on pourrait toucher s'il était convenu qu'il sera payé *quatre francs* chaque fois que les deux courbes seront simultanément rencontrées par une des parallèles, mais elles en contiennent d'autres aussi, et il est aisé de voir que ces dernières sont distinguées par cette circonstance qu'elles correspondent à deux intersections seulement de contour $P_3MP_1P_2NP_4P_3$, tandis que les lignes qui rencontrent à la fois les deux courbes données coupent nécessairement ce contour en quatre points. D'un autre côté, il est évident aussi que les lignes qui rencontrent ce contour en deux points seulement coupent aussi en deux points le contour $T_1T_2NT_4T_3MT_1$, formé par les deux tangentes T_1T_2, T_3T_4 et les arcs T_1MT_3, T_2NT_4 qui réunissent leurs points de contact, les positions pour lesquelles le premier contour $P_3MP_1P_2NP_4P_3$ offre quatre intersections, en

fournissent également deux pour le second, de sorte que si de l'espérance mathématique relative au premier on retranche celle qui se rapporte au second, on aura l'espérance mathématique d'un joueur qui devrait recevoir *deux francs* à chaque fois que le système des deux courbes serait rencontré par une des parallèles. Si donc on nomme ϖ la probabilité de cette double rencontre et Y la longueur du contour $T_1MT_3T_2NT_4$, on aura

$$2\varpi = \frac{X - Y}{a\pi},$$

$$\varpi = \frac{X - Y}{2a\pi}.$$

509. Supposons que l'une des courbes soit remplacée par une droite infiniment petite λ et cherchons d'après la formule précédente la probabilité pour que le système composé d'une courbe de longueur L et de la droite infiniment petite $PQ = \lambda$



étant projeté sur le plan recouvert des lignes parallèles, une de ces parallèles coupe à la fois la courbe et la droite PQ. Soient PT_2, PT_1, QT_3, QT_4 les tangentes menées à la courbe par les extrémités de la droite PQ, la probabilité est (**508**)

$$\varpi = \frac{T_4T_1 + T_3T_2 + PT_2 - QT_3 + PT_1 - QT_4 + 2PQ}{2a\pi}.$$

Mais (I, **21**), en nommant α et β les angles PQT_3 et PQT_4,

$$PT_2 - QT_3 = -T_3T_2 - PQ\cos\alpha,$$
$$PT_1 - QT_4 = -T_4T_1 - PQ\cos\beta;$$

et la probabilité est par conséquent

$$\varpi = \frac{2PQ - PQ\cos\alpha - PQ\cos\beta}{2a\pi}.$$

510. Les résultats qui précèdent vont nous permettre de résoudre le problème suivant :

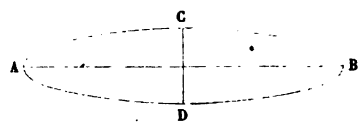
Une courbe convexe étant donnée, on y considère deux cordes choisies au hasard,

quelle est la probabilité pour qu'elles se rencontrent au dedans de la courbe et celle pour qu'elles se rencontrent au dehors dans un espace déterminé?

Commençons par définir avec plus de précision ce que nous entendons par corde choisie *au hasard*.

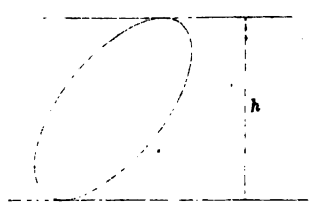
Je suppose que la courbe soit projetée sur le système de parallèles défini plus haut et qu'on recommence l'épreuve jusqu'à ce qu'il y ait intersection. La corde détachée par celle des lignes qui est rencontrée sera pour nous la première des cordes choisies au hasard; la seconde s'obtiendra par une autre épreuve renouvelée, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle ait donné un résultat.

Toutes les cordes d'une courbe, d'après cette définition, ne doivent pas être considérées comme également probables, et si par exemple la courbe a la forme



indiquée sur la figure, les cordes parallèles à CD auront une probabilité plus grande que les cordes parallèles à AB.

Cherchons, en général, la probabilité pour qu'une corde prise au hasard soit comprise entre deux directions données faisant entre elles un angle infiniment



petit $d\theta$. Lorsqu'on projette la courbe sur le système des parallèles, toutes les directions que ces parallèles peuvent avoir par rapport à la courbe sont également probables, mais la chance pour que l'épreuve soit *efficace* et donne une intersection dépend de la distance h des deux tangentes parallèles à la direction considérée. La probabilité d'une telle rencontre, lorsque l'on sait que les deux tangentes ont pris la direction des lignes parallèles tracées sur le plan, est évidemment $\frac{h}{2a}$, et la probabilité pour qu'on obtienne une corde inclinée sur les tangentes T et T', et dans un sens assigné, d'un angle moindre que $d\theta$, est

$$\frac{d\theta}{\pi}\,\frac{h}{2a},$$

car il faut, d'une part, que l'on tombe sur la direction demandée, ce dont la probabilité est $\frac{d\theta}{\pi}$, et d'autre part qu'il y ait rencontre.

Mais en nommant ϖ la probabilité cherchée, il faut évidemment, pour que la courbe projetée au hasard soit coupée suivant une corde ayant la direction donnée, en premier lieu qu'il y ait intersection, ce dont la probabilité, en nommant L le périmètre de la courbe, est $\frac{L}{2a\pi}$, et en second lieu que la direction soit celle assignée, ce dont la probabilité est ϖ; on a donc

$$\frac{L}{2a\pi}\varpi = \frac{h\,d\theta}{2a\pi},$$

$$\varpi = \frac{h\,d\theta}{L}.$$

Telle est la probabilité pour qu'une corde prise au hasard soit comprise entre deux directions données faisant l'angle $d\theta$; elle est proportionnelle à la distance h des tangentes parallèles à ces directions.

Nous pouvons faire ici une vérification. Si l'on considère successivement toutes les directions possibles, il faut nécessairement que la corde coïncide avec l'une d'elles, et par conséquent, pour une courbe quelconque dont le périmètre est L, on doit avoir

$$\frac{1}{L}\int_0^\pi h\,d\theta = 1,$$

corollaire facile du théorème démontré (**407**).

511. Lorsqu'on sait qu'une corde prise au hasard est parallèle à une direction donnée, toutes les distances aux deux tangentes entre lesquelles elle est comprise sont également probables, et si l'on nomme dh un élément de la distance h de ces tangentes, la probabilité pour qu'elle traverse cet élément est par conséquent

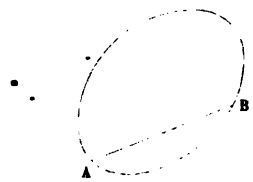
$$\frac{dh}{h}.$$

La probabilité pour que la corde soit parallèle à la direction donnée et passe par l'élément dh est par conséquent

$$\frac{h\,d\theta}{L}\,\frac{dh}{h} = \frac{d\theta\,dh}{L}.$$

Cela posé, la première corde étant AB, cherchons la probabilité pour qu'elle soit

rencontrée par la seconde; en nommant x cette probabilité, il est clair qu'en pro-



jetant la figure tracée sur le système des parallèles, la probabilité $\frac{AB}{a\pi}$ pour que AB soit rencontrée (506) est une probabilité composée; il faut d'abord en effet que la courbe le soit et suivant une corde qui coupe AB; on a donc

$$\frac{AB}{a\pi} = x\,\frac{L}{2a\pi}$$

et

$$x = \frac{2AB}{L}.$$

La probabilité pour que la première corde soit AB et qu'elle soit rencontrée par la seconde est par suite

$$\frac{2AB}{L}\,\frac{dh\,d\theta}{L} = \frac{2AB\,dh\,d\theta}{L^2},$$

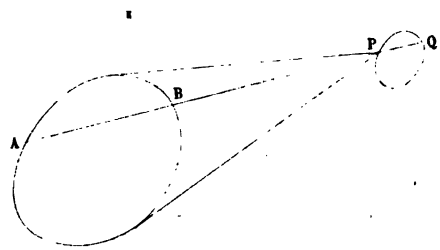
et la somme de toutes ces probabilités étendues à toutes les valeurs de dh et de θ est la probabilité cherchée. Mais en nommant Ω l'aire de la courbe, on a

$$\int AB\,dh = \Omega;$$

la probabilité est donc

$$\frac{2\Omega}{L^2}\int d\theta = \frac{2\pi\Omega}{L^2}.$$

512. Cherchons enfin la probabilité pour que les deux cordes prises au hasard se rencontrent dans l'intérieur d'une surface infiniment petite $d\sigma$ occupant sur le plan une position donnée extérieure à la courbe Ω, cette probabilité, pour un point donné du plan, est évidemment proportionnelle à $d\sigma$, et nous pouvons donner à cette petite surface la forme qui nous sera le plus commode; supposons-la un petit cercle de rayon r.



Considérons d'abord la direction qui forme avec une droite donnée un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$; la probabilité pour que la première des cordes menées au hasard ait une telle direction est

$$\frac{h\,d\theta}{L}.$$

L désignant toujours le contour de la courbe et h la distance des tangentes parallèles à la direction considérée. Toutes les cordes parallèles à cette direction ayant le même degré de probabilité, la probabilité pour que celle que l'on prend au hasard rencontre le cercle dont le diamètre est $2r$ est évidemment

$$\frac{2r}{h},$$

et par conséquent la probabilité de la rencontre des deux courbes par une corde ayant la direction assignée est le produit $\frac{2r\,d\theta}{L}$, et la probabilité pour que la rencontre ait lieu dans un élément dr du diamètre perpendiculaire à PQ est

$$\text{(A)} \qquad \frac{dr\,d\theta}{L}.$$

Soit ABPQ une telle corde, la probabilité pour que la seconde corde coupe la première dans l'intérieur du petit cercle de rayon r est la même que celle pour qu'elle coupe la ligne infiniment petite PQ. Or si l'on projette la figure sur le plan couvert de lignes parallèles, la probabilité de la rencontre d'une de ces parallèles avec la courbe et avec la petite droite est (509), en nommant α et β les angles formés par PQ avec les tangentes menées à la courbe par un de ses points,

$$\frac{2PQ - PQ\cos\alpha - PQ\cos\beta}{2a\pi}.$$

La probabilité de la rencontre avec la courbe est (506)

$$\frac{L}{2a\pi}.$$

Mais pour la double rencontre dont la probabilité est un événement composé, il faut d'abord que la courbe soit rencontrée et que la corde ainsi détachée au hasard rencontre PQ. Soit x la probabilité de ce dernier événement, on aura

$$\frac{2PQ - PQ\cos\alpha - PQ\cos\beta}{2a\pi} = \frac{L}{2a\pi}x,$$

$$\text{(B)} \qquad x = \frac{PQ}{L}(2 - \cos\alpha - \cos\beta).$$

La probabilité pour qu'il y ait rencontre, l'une des cordes étant PQ, est le produit des probabilités (A) et (B) :

$$\frac{PQ\,dr\,d\theta}{L^2}(2-\cos\alpha-\cos\beta);$$

et la probabilité pour qu'il y ait une rencontre dans l'intérieur du petit cercle est évidemment l'intégrale de cette expression lorsque dr et θ prennent toutes leurs valeurs; l'intégration par rapport à dr se fait immédiatement. La somme

$$\int PQ\,dr$$

est précisément l'aire du cercle que nous nommerons σ, et le résultat de cette première sommation est

$$\frac{\sigma\,d\theta}{L^2}(2-\cos\alpha-\cos\beta).$$

Soit ω l'angle sous lequel la courbe est vue d'un point du cercle infiniment petit, on a

$$\beta=\omega-\alpha \quad \text{et} \quad d\theta=d\alpha.$$

La probabilité demandée est donc enfin

$$(2) \qquad \frac{\sigma}{L^2}\int_0^\omega[2-\cos\alpha-\cos(\omega-\alpha)]\,d\alpha=\frac{2\sigma}{L^2}(\omega-\sin\omega).$$

La probabilité pour que les deux cordes se coupent en dehors de la courbe est l'intégrale de cette expression lorsque $d\sigma$ coïncide successivement avec tous les éléments du plan extérieur à la courbe, et comme il faut que les cordes se coupent à l'extérieur ou à l'intérieur de la courbe, la probabilité (2) ajoutée à l'expression trouvée (511) doit donner pour somme l'unité. On a donc

$$\frac{2\pi\Omega}{L^2}+\frac{2}{L^2}\int d\sigma(\omega-\sin\omega)=1,$$

c'est-à-dire

$$\int d\sigma(\omega-\sin\omega)=\frac{L^2}{2}-\pi\Omega,$$

$d\sigma$ désignant un élément quelconque du plan extérieur à une courbe convexe dont l'aire est Ω et la longueur L, et ω l'angle sous lequel cette courbe est vue d'un point situé sur l'élément $d\sigma$.

C'est le théorème de M. Crofton.

CHAPITRE VI.

CALCUL INVERSE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Indétermination du Problème.

513. La recherche d'une intégrale définie de valeur donnée est un problème essentiellement indéterminé. Parmi les solutions en nombre infini, il en est souvent de fort utiles pour les transformations analytiques. Nous en avons déjà, en indiquant les applications de l'intégration sous le signe $\int$, cité quelques exemples élégants. Nous en réunissons quelques autres dans ce chapitre, en y joignant la solution de quelques problèmes dans lesquels la forme assignée d'avance à l'intégrale cherchée fait disparaître l'indétermination.

Proposons-nous, par exemple, de remplacer la fraction $\frac{1}{n}$ par une intégrale définie. Il suffit évidemment de chercher une fonction $\varphi(x)$ qui, s'annulant pour $x=\alpha$, soit égale à $\frac{1}{n}$ pour $x=\beta$, et en nommant $\varphi'(x)$ la dérivée de cette fonction, on aura

$$\frac{1}{n}=\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\,dx.$$

On a, par exemple,

$$\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\int_0^\infty e^{-nx}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos nx\,dx,$$

et les solutions sont évidemment en nombre infini.

Transformation d'une série numérique en intégrale définie.

514. Donnons immédiatement quelques applications de ce genre de transformation. Considérons la série

$$y=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{8n+1}+\frac{1}{8n+3}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+7}+\cdots,$$

on a

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\,dx,$$

et par conséquent

$$y = \int_0^1 dx\,(1 + x^2 - x^4 - x^6 + \ldots) = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

On trouvera, par une transformation semblable,

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots - \frac{1}{8n-1} + \frac{1}{8n+1} - \cdots = \int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x^8}\,dx = \frac{\pi}{4}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

et de même la série

$$\frac{1}{4} - \frac{1.3}{2.6} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{5}{8} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{7}{10} + \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{2n+1}{2n+4} \mp \cdots$$

est égale à

$$\int_0^1 dx\left(x^3 - \frac{1}{2}\,3x^5 + \frac{1.3}{2.4}\,5x^7 - \frac{1.3}{2.4.6}\,\frac{5}{7}\,7x^9 - \cdots\right) = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 2.$$

515. Considérons la somme

$$(1)\quad \frac{1}{m} - \frac{n}{m+p} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{m+2p} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{m+3p} + \cdots + (-1)^n\,\frac{1}{m+np};$$

elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^\infty dx\left[e^{-mx} - ne^{-(m+p)x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,e^{-(m+2p)x} + \ldots + (-1)^n\,e^{-(m+np)x}\right],$$

c'est-à-dire à

$$\int_0^\infty e^{-mx}\,dx\,(1 - e^{-px})^n,$$

qui devient, en posant $e^{-px} = z$,

$$\frac{1}{p}\int_0^1 z^{\frac{m}{p}-1}(1-z)^n\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(n+1)}{p\,\Gamma\left[\frac{m}{p} + (n+1)\right]} = \frac{1.2\ldots n}{p\,\frac{m}{p}\left(\frac{m}{p}+1\right)\cdots\left(\frac{m}{p}+n\right)}.$$

Pour appliquer cette formule, proposons-nous le problème suivant :

Transformer la série

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{(n+2)(1-x)} + \frac{x^2}{(n+4)(1-x)^2} - \frac{x^3}{(n+6)(1-x)^3} + \cdots$$

en une autre série ordonnée suivant les puissances de x.

En développant les différents termes et supposant bien entendu x moindre que l'unité pour que les développements soient convergents, on voit que le coefficient de x^r est

$$-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4}(r-1) - \frac{1}{(n+6)}\frac{(r-1)(r-2)}{1.2} + \cdots,$$

c'est-à-dire précisément la somme (1) changée de signe dans laquelle m est remplacée par $n+2$, p par 2 et n par $r-1$; on en conclut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} - \frac{x}{(n+2)(1-x)} + \frac{x^2}{(n+4)(1-x)^2} + \cdots\\ &= \frac{1}{n} - \frac{x}{n+2} + \frac{2}{n+2}\frac{x^2}{n+4} + \frac{2.4}{(n+2)(n+4)}\frac{x^3}{n+6} - \cdots.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$x = \sin^2\theta,$$
$$\frac{x}{1-x} = \tang^2\theta,$$

cette équation devient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} - \frac{\tang^2\theta}{n+2} + \frac{\tang^4\theta}{n+4} - \frac{\tang^6\theta}{n+6} + \cdots\\ &= \frac{1}{n} - \frac{\sin^2\theta}{n+2} + \frac{2\sin^4\theta}{(n+2)(n+4)} - \frac{2.4\sin^6\theta}{(n+2)(n+4)(n+6)} + \cdots.\end{aligned}$$

Si l'on fait $n=1$, d'après la formule connue

$$\theta = \tang\theta - \frac{\tang^3\theta}{3} + \frac{\tang^5\theta}{5} - \cdots,$$

on aura

$$\frac{\theta}{\tang\theta} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{3} + \frac{2\sin^4\theta}{3.5} - \frac{2.4\sin^6\theta}{3.5.7} + \cdots.$$

516. Cherchons encore à représenter la fraction

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)}.$$

On a (293)

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Mais (322)

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} = \mathrm{B}(p, n+1) = \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx.$$

Le problème est donc résolu par la formule

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1} dx,$$

à laquelle on pourrait, bien entendu, en substituer une infinité d'autres.

Proposons-nous, pour appliquer la formule précédente, de sommer la série

$$\mathrm{S} = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \cdots,$$

on aura

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 (1-x)^n (x^{p-1} + x^{p+m-1} + \ldots) dx = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \int_0^1 \frac{(1-x)^n x^{p-1}}{1-x^m} dx,$$

et de cette formule on peut déduire la sommation d'un grand nombre de séries

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2} dx = l2 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2} dx = \frac{3}{4} - l2,$$

$$\frac{1}{1.2.3\,4} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{7.8.9.10} + \cdots = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3} dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} l3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}.$$

517. Considérons la série très-célèbre

$$(2) \qquad 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots,$$

et, en la supposant convergente, proposons-nous de la convertir en intégrale définie.

On a (293)

$$\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)},$$

$$\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1) = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)},$$

et le coefficient du terme général de la série est par conséquent

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{1.2\ldots n\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)},$$

c'est-à-dire (322)

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1(1-u)^{\gamma-\beta-1}u^{\beta+n-1}du,$$

et par conséquent, en faisant entrer $\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}$ sous le signe $\int$, la série (2) est égale à

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1(1-u)^{\gamma-\beta-1}u^{\beta-1}du\left[1+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}ux+\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{u^2x^2}{1.2}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{u^nx^n}{1.2\ldots n}+\cdots\right].$$

La série placée entre parenthèses sous le signe d'intégration est égale à

$$1+\frac{\alpha ux}{1}+\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}u^2x^2+\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{1.2.3}u^3x^3+\cdots.$$

Elle représente le développement de $(1-ux)^{-\alpha}$; on a donc enfin

$$(3)\quad 1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}du.$$

Si l'on suppose $x=1$, il vient

$$(4)\quad 1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\cdots$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-\alpha-1}du=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)};$$

cette formule n'étant exacte, bien entendu, que lorsque le premier membre est une série convergente, c'est-à-dire lorsque (I, 242) $\alpha+\beta$ est moindre que $\gamma+1$.

On a (322)

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}=\int_0^1u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du;$$

par conséquent la formule (3) peut s'écrire

$$(5)\quad 1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots=\frac{\int_0^1u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du}{\int_0^1u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}.$$

518. La série

$$1 + \frac{\beta}{1.\gamma} y + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} y^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} y^3 + \cdots$$

peut se déduire de la précédente en posant $x = \frac{y}{\alpha}$ et supposant ensuite que α croisse indéfiniment. Le numérateur du second membre de (5) devient ainsi

$$\lim. \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left(1 - \frac{uy}{\alpha}\right)^{-\alpha} du.$$

Mais

$$\lim. \left(1 - \frac{uy}{\alpha}\right)^{-\alpha} = e^{uy},$$

et par conséquent

$$1 + \frac{\beta}{1.\gamma} y + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} y^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} y^3 + \cdots$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} e^{uy}\, du.$$

519. On a

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\, dx.$$

Dans la série

$$S = \varphi(0) + \frac{\alpha^2}{1}\varphi''(0) + \cdots \frac{\alpha^{2n}}{1.2.3\ldots n}\varphi^{2n}(0) + \cdots,$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction quelconque, remplaçons chaque coefficient par sa valeur déduite de la formule précédente

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} = \frac{1.3\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{2^{2n}}{2^n} = \frac{2^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\, dx,$$

elle deviendra

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \left[\varphi(0) + \frac{(2\alpha x)^2 \varphi''(0)}{1.2} + \cdots + \frac{(2\alpha x)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\varphi^{2n}(0) + \cdots\right],$$

et comme on a, quel que soit l'entier n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1}\, dx = 0,$$

on peut ajouter, dans la série qui multiplie e^{-x^2}, les termes qui complètent le dé-

veloppement de $\varphi(2\alpha x)$, et l'on a enfin

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi(2\alpha x)\, dx.$$

En remplaçant α par $\sqrt{\alpha}$, multipliant les deux membres par $d\alpha$ et intégrant entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, on en conclut

$$\varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{1.2} + \cdots + \frac{\varphi^{2n}(0)}{1.2.3\ldots(n+1)} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^1 \varphi(2x\sqrt{\alpha})\, d\alpha.$$

Si l'on pose, par exemple,

$$\varphi(x) = \cos x,$$

on a

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \cdots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^1 \cos(2x\sqrt{\alpha})\, d\alpha.$$

La série qui forme le premier membre est égale à $1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$. Quant au second membre, on peut le réduire à une intégrale simple. On a en effet

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(2x\sqrt{\alpha})\, d\alpha &= \int_0^1 d\alpha \left(1 - \frac{2^2 x^2 \alpha}{1.2} + \frac{2^4 x^4 \alpha^2}{1.2.3.4} - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{2^2 x^2}{1.2}\frac{1}{2} + \frac{2^4 x^4}{1.2.3.4}\frac{1}{3} - \frac{2^6 x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{1}{4} + \cdots \\ &= \frac{\sin 2x}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\cos 2x}{2x^2} = \frac{x \sin 2x - \sin^2 x}{x^2},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{x \sin 2x - \sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{e-1}{e};$$

et en remarquant que la fonction intégrée étant paire on peut prendre 0 et ∞ pour limites et doubler l'intégrale, on en déduit

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{x \sin 2x - \sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}.$$

520. Cherchons encore à exprimer, par des intégrales définies, le plus grand coefficient de la puissance $2n$ d'un binôme, c'est-à-dire

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce coefficient est évidemment le terme indépendant de $e^{\alpha\sqrt{-1}}$ dans le développe-

ment de

$$(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}})^{2n}.$$

En réunissant les termes également distants des extrêmes, ce développement prend la forme

$$A_0 + A_1 \cos 2\alpha + A_2 \cos 4\alpha + \ldots + A_n \cos 2n\alpha,$$

et A_0 est précisément le coefficient que nous voulons calculer.

On a, quel que soit le nombre entier k,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\alpha \, d\alpha = 0;$$

par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}})^{2n} \, d\alpha = \frac{\pi}{2} A_0,$$

on en déduit

$$A_0 = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \alpha \, d\alpha,$$

et le problème est ainsi résolu.

521. Poisson a résolu, en suivant une marche analogue, un problème beaucoup moins simple qui s'est présenté à lui à l'occasion du calcul des probabilités.

Considérons le produit

$$(6) \qquad (up_1 + vq_1)(up_2 + vq_2)\ldots(up_\mu + vq_\mu).$$

Le coefficient de $u^m v^n$ y représente la probabilité pour que, sur p épreuves assignant à deux événements contraires A et B les probabilités successives p_1, q_1, p_2, $q_2, \ldots, p_n$, q_n, le premier arrive m fois et le second n fois.

Pour transformer ce coefficient en une intégrale définie, posons

$$(7) \qquad u = e^{x\sqrt{-1}}, \quad v = e^{-x\sqrt{-1}},$$

le produit $u^m v^n$ deviendra $e^{(m-n)x\sqrt{-1}}$, et tous les autres termes renferment des exponentielles différentes, car la somme $m + n$ est la même pour tous et égale à μ. Si donc on désigne par X ce que devient le produit (6) après la substitution (7), le coefficient cherché U est égal, on le voit aisément, à

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(m-n)x\sqrt{-1}} \, dx.$$

On a, en effet, pour toutes les valeurs inégales de m et de m',

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{mx\sqrt{-1}}\, e^{-m'x\sqrt{-1}}\, dx = 0,$$

et pour $m = m'$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-mx\sqrt{-1}}\, e^{mx\sqrt{-1}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

La formule (8) donne donc une solution du problème : on peut en éliminer les imaginaires.

On a, à cause de $p_i + q_i = 1$,

$$p_i e^{x\sqrt{-1}} + q_i e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x + (p_i - q_i)\sqrt{-1}\sin x.$$

Soit

$$\cos^2 x + (p_i - q_i)^2 \sin^2 x = \rho_i^2 = 1 - 4p_i q_i \sin^2 x,$$

$$\frac{1}{\rho_i}\cos x = \cos\varphi_i,$$

$$\frac{1}{\rho_i}(p_i - q_i)\sin x = \sin\varphi_i,$$

il en résultera

$$up_i + vq_i = \rho_i e^{\varphi_i\sqrt{-1}},$$

et si l'on fait

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_\mu = \mathrm{Y},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\mu = y,$$

le produit désigné par X deviendra

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} e^{y\sqrt{-1}},$$

et l'expression (8) du coefficient cherché est par conséquent

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Y}\cos[y - (m-n)x]\,dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Y}\sin[y - (m-n)x]\,dx.$$

La seconde intégrale est nécessairement nulle puisque le coefficient U est réel. On peut voir qu'en effet elle se compose d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires, et l'on a enfin, pour l'expression cherchée,

$$(9)\qquad \mathrm{U} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Y}\cos[y - (m-n)x]\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Y}\cos[y - (m-n)x]\,dx,$$

et l'intégration pourra s'effectuer par les règles les plus simples du calcul intégral.

Dans les cas simples et lorsque les facteurs sont peu nombreux, il serait plus aisé de faire la multiplication directement, mais il en est tout autrement lorsque leur nombre est très-considérable et que l'on veut seulement calculer le résultat par approximation. Si μ en effet est un très-grand nombre, les facteurs ρ_i, dont le produit est égal à Y étant tous plus petits que l'unité et en différant notablement toutes les fois que x n'est pas très-petit, tous les éléments pour lesquels x a une valeur finie sont négligeables, et l'on peut par conséquent poser, sans erreur sensible,

$$\rho_i^2 = 1 - 4p_i q_i \sin^2 x = 1 - 4p_i q_i x^2,$$

c'est-à-dire, x étant très-petit,

$$\rho_i = 1 - 2p_i q_i x^2.$$

L'erreur commise est en effet insignifiante lorsque x est très-petit, et, lorsqu'il ne l'est pas, l'élément de l'intégrale est négligeable aussi bien que celui qu'on lui substitue. On aura alors, en regardant toujours x comme très-petit,

$$l\rho_i = -2p_i q_i x^2,$$

$$lY = -x^2(2p_1 q_1 + 2p_2 q_2 + \ldots + 2p_\mu q_\mu) = -\mu k^2 x^2, \tag{10}$$

en posant

$$2p_1 q_1 + 2p_2 q_2 + \ldots + 2p_\mu q_\mu = \mu k^2,$$

c'est-à-dire en nommant k^2 la valeur moyenne du produit $2p_i q_i$.

L'équation (10) donne

$$Y = e^{-\mu k^2 x^2}.$$

On a aussi, en négligeant x^2,

$$\varphi_i = (p_i - q_i)x,$$

$$y = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\mu = x(p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu) - x(q_1 + q_2 + \ldots + q_\mu),$$

et, en nommant p la valeur moyenne de p_i et q celle de q_i,

$$y = \mu x(p - q),$$

$$\cos[y - (m - n)x] = \cos x\,[\mu(p - q) - (m - n)],$$

et on pourra prendre enfin

$$U = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu k^2 x^2} \cos x\,[\mu(p - q) - (m - n)]\,dx. \tag{11}$$

Car les éléments de cette intégrale pour lesquels x n'est pas très-petit sont évidemment négligeables à cause que μk^2 est un grand nombre, et les deux expres-

sions (9) et (11) coïncident approximativement pour tous les éléments dont l'influence est sensible. On a enfin (182)

$$(12)\qquad U = \frac{1}{k\sqrt{\pi\mu}}\, e^{-\frac{[\mu(p-q)-(m-n)]^2}{\mu k^2}},$$

ce qui, dans le cas où p_i et q_i sont constants, s'accorde avec l'expression donnée (320) pour la valeur approchée d'un terme de $(p+q)^\mu$.

Transformation de la fonction X_n en intégrale définie.

522. On a (199), en désignant par A et B deux nombres réels,

$$(13)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A + B\sqrt{-1}\cos\omega} = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 + \frac{B}{A}\sqrt{-1}\cos\omega} = \frac{2\pi}{A\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Posons

$$A = 1 - \alpha\cos\varphi,$$
$$B = \alpha\sin\varphi,$$

la formule (13) donnera

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{(1-\alpha\cos\varphi) + \alpha\sin\varphi\sqrt{-1}\cos\omega}.$$

Développons les deux membres suivant les puissances de α. Le coefficient de α^n dans le premier membre est ce que devient la fonction X_n quand on y remplace x par $\cos\varphi$; nommons-le P_n. En l'égalant au coefficient de α^n dans le second membre facilement obtenu en développant en série la fonction placée sous le signe $\int$, on trouve

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\cos\omega)^n d\omega.$$

Si l'on pose $\cos\varphi = x$, cette formule devient

$$(14)\qquad X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n d\omega.$$

On peut en conclure aisément que, pour chaque valeur de x moindre que l'unité en valeur absolue, X_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Si, en effet, dans l'intégrale (14), on remplace chaque élément par son module, le module

de la somme, comme on sait, sera augmenté; on a par conséquent

$$X_n < \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x^2+(1-x^2)\cos^2\omega]^{\frac{n}{2}}d\omega,$$

et tous les éléments du second membre tendent vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

523. Dirichlet a donné une autre expression de X_n. On a, en adoptant les notations précédentes,

$$(15)\qquad (1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots+P_n\alpha^n+\ldots.$$

Posons

$$\alpha = e^{\theta\sqrt{-1}},$$

nous aurons

$$(1-2e^{\theta\sqrt{-1}}\cos\varphi+e^{2\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = P_0+P_1\cos\theta+\ldots+P_n\cos n\theta+\ldots$$
$$+\sqrt{-1}(P_1\sin\theta+\ldots+P_n\sin n\theta+\ldots).$$

Si donc on pose

$$(1-2e^{\theta\sqrt{-1}}\cos\varphi+e^{2\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = G+H\sqrt{-1},$$

on aura

$$(16)\qquad G = P_0+P_1\cos\theta+P_2\cos 2\theta+\ldots+P_n\cos n\theta+\ldots,$$

$$(17)\qquad H = P_1\sin\theta+P_2\sin 2\theta+\ldots+P_n\sin n\theta+\ldots.$$

Les expressions de G et de H sont faciles à former; mais elles changent de forme avec la valeur de θ et ne sont pas les mêmes, suivant que $\cos\theta$ est plus petit ou plus grand que $\cos\varphi$. On a identiquement

$$1-2e^{\theta\sqrt{-1}}\cos\varphi+e^{2\theta\sqrt{-1}} = 2e^{\theta\sqrt{-1}}(\cos\theta-\cos\varphi).$$

Si donc $\cos\theta > \cos\varphi$, $\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}$ est réel et l'on a

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}2^{-\frac{1}{2}}(\cos\theta-\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}.$$

Mais si l'on a au contraire $\cos\theta < \cos\varphi$, il faudra écrire

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{-1}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}},$$

et par conséquent, dans le premier cas, $\cos\theta$ étant plus grand que $\cos\varphi$, on a

$$(18)\qquad G = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

$$(19)\qquad H = \frac{-\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

et, dans le second cas, lorsque $\cos\theta$ est plus petit que $\cos\varphi$,

$$(20)\qquad G = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}},$$

$$(21)\qquad H = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}.$$

Ajoutant les équations (18), (19), après avoir multiplié la première par $\sin\frac{1}{2}\theta$ et la seconde par $\cos\frac{1}{2}\theta$, on aura, en supposant $\cos\theta > \cos\varphi$,

$$(22)\qquad 0 = P_0 \sin\frac{1}{2}\theta + P_1 \sin\frac{3}{2}\theta + \ldots + P_n \sin\frac{2n+1}{2}\theta + \ldots,$$

et, en supposant $\cos\theta < \cos\varphi$, les équations (20) et (21) donnent

$$\frac{1}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} = P_0 \sin\frac{1}{2}\theta + P_1 \sin\frac{3}{2}\theta + \ldots + P_n \sin\frac{2n+1}{2}\theta + \ldots.$$

De même, en retranchant les équations (18) et (19), après avoir multiplié la première par $\cos\frac{1}{2}\theta$ et la seconde par $\sin\frac{1}{2}\theta$, nous en déduirons, en supposant $\cos\theta > \cos\varphi$,

$$\frac{1}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}} = P_0 \cos\frac{1}{2}\theta + P_1 \cos\frac{3\theta}{2} + P_2 \cos\frac{5\theta}{2} + \ldots + P_n \cos\frac{2n+1}{2}\theta + \ldots,$$

et, en supposant $\cos\theta < \cos\varphi$, (20) et (21) donnent

$$0 = P_0 \cos\frac{1}{2}\theta + P_1 \cos\frac{3\theta}{2} + P_2 \cos\frac{5\theta}{2} + \ldots + P_n \cos\frac{2n+1}{2}\theta + \ldots.$$

L'équation (16) donne évidemment, lorsque n est différent de zéro,

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi G \cos n\theta \, d\theta$$

et

$$P_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi G\,d\theta.$$

On déduit aussi de (17)

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi H \sin n\theta\,d\theta,$$

et, en remplaçant dans ces équations G et H par leurs valeurs, on a les deux expressions de P_n :

$$(23)\quad \begin{cases} P_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\varphi \frac{\cos\frac{1}{2}\theta\cos n\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}\,d\theta + \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\theta\cos n\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\theta, \\ P_n = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\varphi \frac{\sin\frac{1}{2}\theta\sin n\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}\,d\theta + \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \frac{\cos\frac{1}{2}\theta\sin n\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\theta. \end{cases}$$

La valeur de P_0 serait donnée par la première de ces équations, dans laquelle, après avoir fait $n = 0$, il faudra diviser le second membre par 2.

Solution d'un problème plus général.

524. Laplace a résolu un problème plus général et indéterminé comme le précédent :

Exprimer par des intégrales définies le coefficient de x^n dans le développement suivant les puissances de x de l'expression

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^\mu.$$

Posons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^\mu = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots + y_n x^n + \ldots;$$

prenons les logarithmes des deux membres et égalons les dérivées par rapport à x : nous aurons

$$\frac{\mu(a_1 + 2a_2 x + \ldots + m a_m x^{m-1})}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m} = \frac{y_1 + 2y_2 x + \ldots + n y_n x^{n-1} + \ldots}{y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots + y_n x^n + \ldots}.$$

En chassant les dénominateurs et égalant le coefficient de x^{n-1} dans les deux membres, on trouve la relation

$$(24)\quad n a_0 y_n + (n-1) a_1 y_{n-1} + \ldots + (n-m) a_m y_{n-m} = \mu(a_1 y_{n-1} + 2a_2 y_{n-2} + \ldots + m a_m y_{n-m}),$$

et cette équation permettra de calculer le coefficient y_n lorsque les précédents seront connus. Pour y satisfaire, posons

$$(25)\qquad y_n = \int_p^q x^{n-1}\varphi(x)\,dx,$$

et cherchons à déterminer les limites p et q ainsi que la fonction $\varphi(x)$, de telle façon que l'équation (24) soit satisfaite.

Cette équation devient, lorsqu'on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs valeurs

$$na_0\int_p^q x^{n-1}\varphi(x)\,dx + (n-1)a_1\int_p^q x^{n-2}\varphi(x)\,dx + \ldots + (n-m)a_m\int_p^q x^{n-m-1}\varphi(x)\,dx$$
$$= \mu\int_p^q \varphi(x)\,dx\,(a_1x^{n-2} + 2a_2x^{n-3} + \ldots + ma_mx^{n-m-1}).$$

En intégrant par parties les intégrales qui figurent au premier membre, on transforme cette équation en

$$\varphi(x)(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_mx^{n-m})_p^q - \int_p^q \varphi'(x)\,dx\,(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_mx^{n-m})$$
$$= \mu\int_p^q \varphi(x)\,dx\,(a_1x^{n-2} + 2a_2x^{n-3} + \ldots + ma_mx^{n-m-1}),$$

et cette équation sera satisfaite si l'on pose

$$(26)\qquad 0 = \varphi'(x)(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_mx^{n-m}) + \mu\varphi(x)(a_1x^{n-2} + 2a_2x^{n-3} + \ldots + ma_mx^{n-m-1})$$

et en même temps

$$(27)\qquad \begin{cases} \varphi(p)(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_mp^{n-m}) = 0, \\ \varphi(q)(a_0q^n + a_1q^{n-1} + \ldots + a_mq^{n-m}) = 0. \end{cases}$$

De l'équation (26), on déduit

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\mu\,\frac{a_1x^{n-2} + 2a_2x^{n-3} + \ldots + ma_mx^{n-m-1}}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_mx^{n-m}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \mu\,\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_m}{x^m}\right)}{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_m}{x^m}},$$

et par conséquent

$$\varphi(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}\right)^{\mu}.$$

Les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont au nombre de m; de plus, et c'est ce qui fait le succès de la méthode, elles sont, de même que la fonction $\varphi(x)$, indépendantes de n. En les nommant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, on pourra les adopter pour valeur des limites p et q. Les équations (27) seront satisfaites, et l'on aura

$$(28) \qquad y_n = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} x^{n-1} \varphi(x)\, dx,$$

et on pourra prendre plus généralement

$$(29) \quad y_n = A_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{n-1} \varphi(x)\, dx + A_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} x^{n-1} \varphi(x)\, dx + \ldots + A_m \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} x^{n-1} \varphi(x)\, dx,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des coefficients arbitraires que l'on déterminera de manière à faire coïncider, pour $n = 1$, $n = 2, \ldots, n = m$, l'expression (29) avec le coefficient correspondant du développement; et l'équation (24) étant satisfaite, la formule (29) représentera alors, quel que soit n, le coefficient de la série.

Expression des racines d'une équation.

525. Soit

$$\varphi(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

une équation algébrique dont les racines rangées d'après l'ordre de grandeur de leur module, sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Nous allons exprimer par le moyen d'intégrales définies la somme

$$\alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_i^p,$$

i étant un nombre quelconque inférieur à m, et p un exposant entier arbitraire. Il est clair qu'en changeant i en $i + 1$, on aura une expression nouvelle dont l'excès sur la première sera α_{i+1}^p.

On a

$$(30) \qquad \varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

et par conséquent

$$(31) \qquad l\varphi(x) = l(x - \alpha_1) + l(x - \alpha_2) + \ldots + l(x - \alpha_m).$$

Soit k un nombre compris entre le module de α_i et celui de α_{i+1}. Posons

$$x = k e^{u\sqrt{-1}}.$$

Les i premiers termes du second membre de (31) seront développables suivant les

puissances de $\frac{1}{k}$, et les suivants suivant les puissances de k. On aura, par exemple,

$$l(x-\alpha_i)=l\left(1-\frac{\alpha_i}{x}\right)+lx=lx-\frac{\alpha_i}{x}-\frac{\alpha_i^2}{2x^2}-\frac{\alpha_i^3}{3x^3}-\cdots,$$

$$l(x-\alpha_{i+1})=l\left(1-\frac{x}{\alpha_{i+1}}\right)+l(-\alpha_{i+1})=l(-\alpha_{i+1})-\frac{x}{\alpha_{i+1}}-\frac{x^2}{2\alpha_{i+1}^2}-\cdots.$$

Si l'on développe de cette manière tous les termes du second membre de (31) en y remplaçant successivement x par $ke^{\omega\sqrt{-1}}$ et par $ke^{-\omega\sqrt{-1}}$, et faisant la somme et la différence des résultats obtenus, on aura

$$l\varphi(ke^{\omega\sqrt{-1}})+l\varphi(ke^{-\omega\sqrt{-1}})$$
$$=ilh^2-2\sum_1^i\frac{\alpha_n}{k}\cos\omega+\frac{\alpha_n^2}{2h^2}\cos 2\omega+\cdots+2\sum_{i+1}^m\frac{1}{2}l\alpha_n^2-\frac{k}{\alpha_n}\cos\omega-\frac{k^2}{2\alpha_n^2}\cos 2\omega+\cdots;$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[l\varphi(ke^{\omega\sqrt{-1}})-l\varphi(ke^{-\omega\sqrt{-1}})\right]$$
$$=i\omega+\sum_1^i\frac{\alpha_n}{k}\sin\omega+\frac{\alpha_n^2}{2h^2}\sin 2\omega+\cdots-\sum_{i+1}^m\frac{k}{\alpha_n}\sin\omega+\frac{h^2}{2\alpha_n^2}\sin 2\omega+\cdots.$$

Multiplions les deux membres de ces équations respectivement par $\cos p\omega\, d\omega$ et par $\sin p\omega\, d\omega$, et intégrons entre les limites $\omega=-\pi$ et $\omega=+\pi$, nous obtiendrons, en ayant égard aux formules (138),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[l\varphi(e^{k\omega\sqrt{-1}})+l\varphi(e^{-k\omega\sqrt{-1}})\right]\cos p\omega\, d\omega$$
$$=\frac{1}{pk^p}(\alpha_1^p+\alpha_2^p+\ldots+\alpha_m^p)+\frac{k^p}{p}\left(\frac{1}{\alpha_{i+1}^p}+\frac{1}{\alpha_{i+2}^p}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m^p}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[l\varphi(e^{k\omega\sqrt{-1}})-l\varphi(e^{-k\omega\sqrt{-1}})\right]\sin p\omega\, d\omega$$
$$=\pm\frac{2i}{p}+\frac{1}{pk^p}(\alpha_1^p+\alpha_2^p+\ldots+\alpha_i^p)-\frac{k^p}{p}\left(\frac{1}{\alpha_{i+1}^p}+\frac{1}{\alpha_{i+2}^p}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m^p}\right);$$

et, de ces deux formules, on déduira les sommes

$$\alpha_1^p+\alpha_2^p+\ldots+\alpha_i^p,$$
$$\frac{1}{\alpha_{i+1}^p}+\frac{1}{\alpha_{i+2}^p}+\cdots+\frac{1}{\alpha_p^m},$$

exprimées chacune au moyen d'intégrales définies.

Nous n'insisterons pas sur ces formules plus curieuses qu'utiles, données par Jacobi dans l'un de ses premiers Mémoires.

Fonctions génératrices d'Abel.

526. Abel a résolu plusieurs problèmes de la nature de ceux auquel est consacré ce chapitre en substituant à la recherche d'une fonction inconnue celle d'une autre fonction que, suivant une analogie déjà signalée par Laplace, il nomme la *fonction génératrice*.

Si l'on a

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xz} F(z)\,dz,$$

$F(z)$ est nommée la *fonction génératrice* de $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ est la *déterminante* de $F(z)$.

Abel ne s'est nullement occupé de rechercher s'il est vrai qu'à toute fonction correspond une fonction génératrice, ni à plus forte raison comment une fonction étant donnée, on peut en trouver la fonction génératrice.

Un géomètre anglais, Murphy, a donné de ce problème une solution qui, malgré les cas d'exception très-nombreux qu'elle présente, mérite d'être rapportée.

Si l'on a

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xz} F(z)\,dz,$$

en posant $e^{-z} = t$ et nommant $\psi(t)$ ce que devient $F(z)$, on en conclura

$$\varphi(x) = \int_0^1 t^{x-1}\,\psi(t)\,dt.$$

Murphy énonce le théorème suivant :

La fonction $\psi(t)$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\varphi(x)\,t^{-x}$ en série ordonnée suivant les puissances de x.

Supposons, en effet, que $\varphi(x)$ soit développable en série de la forme

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots.$$

On a identiquement

$$\int_0^1 \frac{\varphi(a)}{t^a}\,t^{x-1}\,dt = \varphi(a)\int_0^1 t^{x-a-1}\,dt = \frac{\varphi(a)}{x-a}.$$

Développons les deux membres suivant les puissances de $\frac{1}{a}$ et égalons les coeffi-

cients de $\frac{1}{a}$. On aura, en nommant T le coefficient de $\frac{1}{a}$ dans le développement de $\frac{\varphi(a)}{t^a}$,

$$\int_0^1 \mathrm{T}\, t^{x-1}\, dt = \text{coeff. de } \frac{1}{a} \text{ dans } \frac{\varphi(a)}{x-a};$$

mais, par hypothèse,

$$\varphi(a) = \frac{\mathrm{A}_1}{a} + \frac{\mathrm{A}_2}{a^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{a^3} + \cdots$$

et

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \cdots\right);$$

par conséquent, en multipliant,

$$\text{coeff. de } \frac{1}{a} \text{ dans } \frac{\varphi(a)}{x-a} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{x^3} + \cdots = \varphi(x),$$

et par suite

$$\int_0^1 \mathrm{T}\, t^{x-1}\, dt = \varphi(x),$$

où T est le coefficient de $\frac{1}{a}$ dans $\frac{\varphi(a)}{t^a}$, ou, ce qui revient au même, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans $\frac{\varphi(x)}{t^x}$.

527. Quoique l'ingénieuse solution qui précède soit évidemment soumise à bien des restrictions, elle peut être utilisée dans un grand nombre de cas.

Cherchons par exemple à déterminer la fonction $\psi(t)$ telle, que

$$\int_0^1 \psi(t)\, t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x+m}.$$

On a, dans ce cas,

$$\frac{\varphi(x)}{t^x} = \frac{t^{-x}}{x+m}.$$

Or

$$t^{-x} = e^{-xl} = 1 - x\,lt + \frac{x^2}{1.2}(lt)^2 - \cdots,$$

$$\frac{1}{x+m} = \frac{1}{x\left(1+\frac{m}{x}\right)} = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} + \frac{m^2}{x^3} - \cdots,$$

et, par la multiplication, on voit que le coefficient de $\frac{1}{x}$, dans le produit $\frac{t^{-x}}{x+m}$,

est

$$1 + m\,lt + \frac{m^2}{1.2}(lt)^2 + \ldots = e^{m\,lt} = t^m.$$

On a, en effet,

$$\int_0^1 t^m t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x+m}.$$

528. Cherchons encore à déterminer $\psi(t)$ par la condition

$$\int_0^1 \psi(t)\,t^{x-1}\,dt = \frac{1}{(x+\alpha)^m}.$$

$\psi(t)$ est, d'après le théorème de Murphy, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{t^{-x}}{(x+\alpha)^m}$. Or, on a

$$t^{-x} = e^{-x\,lt} = 1 - x\,lt + \frac{x^2(lt)^2}{1.2} - \cdots,$$

$$\frac{1}{(x+\alpha)^m} = \frac{1}{x^m}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{-m} = \frac{1}{x^m} - \frac{m\alpha}{x^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{\alpha^2}{x^{m+2}} - \cdots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{x}$ est

$$\frac{(-1)^{m-1}(lt)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\left(1 + \alpha\,lt + \frac{\alpha^2(lt)^2}{1.2} + \cdots\right) = \frac{t^\alpha\left[l\left(\frac{1}{t}\right)^{m-1}\right]}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

et l'on a

$$\int_0^1 \frac{t^{x+\alpha-1}\,l\left(\frac{1}{t}\right)^{m-1}dt}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{1}{(x+\alpha)^m}.$$

En remplaçant le produit $1.2.3\ldots(m-1)$ par $\Gamma(m)$, on obtient une formule exacte quel que soit m.

Solution de quelques problèmes.

529. Problème I. — *Trouver une fonction $\varphi(t)$ telle, que l'on ait, pour toutes les valeurs entières de n inférieures à un nombre donné m,*

$$\int_0^1 \varphi(t)\,t^n\,dt = 0.$$

Le problème étant indéterminé, nous pouvons supposer à la fonction $\varphi(t)$ une

forme particulière

$$\varphi(t) = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_m t^m,$$

en y introduisant, pour rendre la solution déterminée, un nombre m de coefficients précisément égal au nombre des conditions à remplir.

On a

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^n\, dt = \frac{1}{n+1} + \frac{A_1}{n+2} + \cdots + \frac{A_m}{n+m+1}.$$

Le second membre est une fraction rationnelle ayant pour dénominateur

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1),$$

et, comme il doit s'annuler pour $n = 0$, $n = 1, \ldots$, $n = m - 1$, il faut que le numérateur soit de la forme

$$Cn(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Posons donc

$$\frac{1}{n+1} + \frac{A_1}{n+2} + \cdots + \frac{A_m}{n+m+1} = C\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)},$$

et, en décomposant le second membre en fractions simples, on obtiendra, par l'identification du résultat avec le premier membre, les valeurs de C, A_1, $A_2, \ldots$, A_m, savoir :

$$C = (-1)^m, \quad A_1 = -\frac{m(m+1)}{1.1}, \quad A_2 = +\frac{m(m-1)(m+1)(m+2)}{1.2.1.2},$$

$$A_3 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3},$$

en sorte que

$$\varphi(t) = 1 - \frac{m(m+1)}{1.1}t + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}t^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}t^3 + \ldots,$$

et l'on reconnaît dans le second membre la dérivée $m^{ième}$ du produit

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}t^m\left[1 - mt + \frac{m(m-1)}{1.2}t^2 + \ldots \pm t^m\right] = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^m t^m (1-t)^m}{dt^m},$$

ce qui s'accorde avec (369).

Si l'on pose $t = \frac{1+x}{2}$, on en déduit

$$t(1-t) = \frac{1-x^2}{4}, \quad dt = \frac{1}{2}\,dx,$$

et l'expression de $\varphi(t)$ devient, on le vérifie aisément,

$$\frac{1}{2^m}\,\frac{1}{1.2.3\ldots m}\,\frac{d^m(1-x^2)^m}{dx^m},$$

ce qui (I, 288) est l'expression de X_m. Les limites 0 et 1 de t correspondant aux limites -1 et $+1$ de x, on voit que le résultat précédent équivaut à ce théorème très-important dans la théorie des fonctions X_m :

Pour toute valeur de l'exposant p inférieure à m, on a

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_m\,dx = 0;$$

on en conclut que, p désignant un nombre entier quelconque moindre que m,

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_p\,dx = 0,$$

cette équation s'applique évidemment toutes les fois que les indices m et p sont inégaux, car l'un des deux alors est plus grand que l'autre.

530. Problème II. — *Trouver une fonction $f(x)$ par la condition*

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f'(x)}{(a-x)^n}\,dx.$$

On a (322)

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Soit $\beta = 1-n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}}{(1-y)^n}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire, en faisant $y = \frac{z}{a}$,

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}}{(a-z)^n}\,dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)}\,a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on trouvera

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}}{(a-z)^n}\,dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}}{(x-a)^{1-n}}\,da.$$

En faisant $a=xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n}}{(x-a)^{1-n}}\,da = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}}{(1-y)^{1-n}}\,dy = \frac{x^\alpha\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+1)};$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}}{(a-z)^n}\,dz = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Gamma(n)\Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha\varphi(\alpha)\,d\alpha$ et intégrant par rapport à α entre les limites 0 et ∞, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{\left[\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,\alpha z^{\alpha-1}\,d\alpha\right]}{(a-z)^n}\,dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n)\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,x^\alpha\,d\alpha.$$

Soit

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,x^\alpha\,d\alpha = f(x).$$

On tire en différentiant

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,\alpha x^{\alpha-1}\,d\alpha = f'(x),$$

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\,\alpha z^{\alpha-1}\,d\alpha = f'(z),$$

par conséquent

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)}{(a-z)^n}\,dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x),$$

c'est-à-dire (295)

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)}{(a-z)^n}\,dz.$$

Revenons à l'équation proposée

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f'(x)}{(a-x)^n}\,dx.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et intégrons entre les limites zéro et x, nous aurons

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{1-n}}\,dx = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'(x)}{(a-x)^n}\,dx;$$

donc, en vertu de l'équation (A),

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{1-n}}\,da.$$

Telle est la solution fort élégante qu'Abel a donnée de ce problème.

CHAPITRE VII.

QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

Théorème de Taylor.

531. L'étude des intégrales imaginaires conduit à une démonstration du théorème de Taylor par laquelle les conditions d'exactitude et de convergence énoncées (I, 380) sont immédiatement mises en évidence.

Soit $\varphi(z)$ une fonction de la variable imaginaire z; supposons-la finie, continue et bien déterminée pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à une limite R. On entend par là, ainsi qu'il a été expliqué (I, 380), que pour toute valeur de z de module inférieur à R la fonction est finie, qu'elle n'a qu'une seule valeur, et que, de plus, pour un accroissement infiniment petit dz attribué à z, le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable est déterminé et indépendant de z.

Soit α une constante de module inférieur à R, la fraction

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}$$

a, d'après nos hypothèses, une valeur finie et déterminée pour toute valeur de z de module inférieur à R. Le numérateur est en effet toujours fini, et, si l'on suppose $z=\alpha$, la fraction se réduit à $\varphi'(\alpha)$.

D'après cela, l'intégrale

$$(1)\qquad \int \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz,$$

prise autour de la circonférence du cercle de rayon R ayant l'origine pour centre, est égale à zéro (335), et l'on a

$$(2)\qquad \int \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}\,dz = \int \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz.$$

Les intégrations étant effectuées autour de la même circonférence. Le second

membre de l'équation (2) se calcule aisément. On a (344)

$$\int \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$\int \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha).$$

L'équation (2) donne par conséquent

$$(3) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}\,dz.$$

Pour tous les points du cercle le long duquel on intègre, le module de z est égal à R et plus grand par conséquent que celui de α. On peut donc remplacer $\frac{1}{z-\alpha}$ par la série convergente

$$\frac{1}{z}\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z^2} + \cdots + \frac{\alpha^n}{z^n} + \cdots\right),$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)}{z}\,dz\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z^2} + \cdots + \frac{\alpha^n}{z^n} + \cdots\right).$$

Si l'on pose par conséquent

$$(5) \qquad \int \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\,dz = A_n,$$

l'intégrale, prise le long d'une circonférence pour aucun des points de laquelle la fonction ne devient infinie, est évidemment finie et déterminée, et l'on a

$$(6) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots + A_n\alpha^n + \ldots).$$

La fonction $\varphi(\alpha)$ est ainsi développée en série *convergente* ordonnée suivant les puissances de α.

La possibilité du développement étant démontrée, la méthode des coefficients indéterminés devient légitime. En faisant $\alpha = 0$ successivement dans l'équation (6) et dans ses dérivées prises par rapport à α, on trouve

$$(7) \qquad A_n = \frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi^n(0)}{1.2.3\ldots n},$$

et enfin

$$(8)\qquad \varphi(\alpha)=\varphi(0)+\alpha\varphi'(0)+\frac{\alpha^2}{1.2}\varphi''(0)+\cdots+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(0)+\cdots.$$

C'est la formule de Taylor qui se trouve ainsi démontrée pour toute valeur de la variable dont le module est inférieur à celui pour lequel la fonction peut devenir infinie ou mal déterminée.

532. La comparaison des équations (5) et (7) donne la formule

$$(9)\qquad \frac{\varphi^n(0)}{1.2.3\ldots n}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

où l'intégration est effectuée sur le contour du cercle de rayon R, ayant l'origine pour centre.

533. La démonstration précédente suppose que la fonction

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}$$

ne soit pas infinie pour $z=\alpha$ et que par conséquent la dérivée $\varphi'(\alpha)$ ne devienne pas infinie. Cette condition sera toujours satisfaite, et quand une fonction est bien définie, finie et continue, la valeur de la dérivée est toujours finie.

La série (6) est démontrée en effet pour les valeurs de α qui ne rendent pas $\varphi'(\alpha)$ infini. Mais les deux membres de l'équation (6) sont (I, 267) des fonctions continues de α et ne peuvent être égaux pour les valeurs de α infiniment voisines de celles pour lesquelles l'exception est à craindre sans l'être aussi pour celles-là. Le développement est donc applicable à tous les cas, et l'on en conclut que la dérivée $\varphi'(\alpha)$ ne peut pas devenir infinie.

Théorème de Laurent.

534. Lorsqu'une fonction devient infinie pour la valeur $z=0$ de la variable, elle ne peut pas évidemment être développée en série ordonnée suivant les puissances entières de z, mais on peut quelquefois remplacer ce développement devenu impossible par un autre dans lequel figurent les puissances positives et négatives de z.

Soit $\varphi(z)$ une fonction continue, définie sans ambiguïté pour chaque valeur de z et restant finie ainsi que sa dérivée lorsque le module de z est compris entre deux limites R′ et R″. Soit α une constante dont le module soit compris entre les mêmes

limites, la fraction

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}$$

est finie et continue pour les valeurs de z qui correspondent aux points du plan compris entre les deux circonférences de rayon R′ et R″ décrits de l'origine comme centre. L'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz$$

a par suite la même valeur quand on la prend le long de l'une ou de l'autre de ces circonférences. En désignant par $\int^{R'}$ et $\int^{R''}$ les intégrales relatives à ces deux contours, on a par conséquent

$$(10)\qquad \int^{R'} \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = \int^{R''} \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz,$$

et, en transposant,

$$(11)\qquad \int^{R''} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz - \int^{R'} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = \int^{R''} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}\,dz - \int^{R'} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}\,dz.$$

R″ étant plus grand que R′, le seul point par lequel la différentielle $\frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz$ devienne infinie est intérieur au cercle R″ et extérieur au cercle R′. On a par conséquent

$$\int^{R''} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = 2\pi\,\varphi(\alpha)\sqrt{-1},$$

$$\int^{R'} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = 0.$$

Le premier membre de (11) se réduit donc à $2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha)$. Pour transformer le second membre, remarquons que pour les valeurs qui correspondent aux points du cercle de rayon R″, le module de z étant supérieur à celui de α, on a

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha^2}{z^2}+\cdots+\frac{\alpha^n}{z^n}+\cdots\right).$$

Pour les valeurs qui correspondent aux points du cercle de rayon R′, le module de z est inférieur au contraire à celui de α, et l'on a

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{z}{\alpha}+\frac{z^2}{\alpha^2}+\cdots+\frac{z^n}{\alpha^n}+\cdots\right).$$

Remplaçons dans chacune des intégrales qui forment le second membre de (11)

$\frac{1}{z-\alpha}$ par la série convergente qui lui est égale, et la formule devient

$$(12)\quad 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha)=\int^{R''}\frac{\varphi(z)}{z}dz+\alpha\int^{R''}\frac{\varphi(z)}{z^2}dz+\cdots+\alpha^n\int^{R''}\frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}dz+\cdots$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int^{R'}\varphi(z)\,dz+\cdots+\frac{1}{\alpha^n}\int^{R'}z^{n-1}\varphi(z)\,dz+\cdots.$$

La fonction $\varphi(z)$ ne devenant infinie pour aucune valeur de z correspondant au contour de l'un ou de l'autre cercle, les coefficients de cette formule sont finis et l'on voit que $\varphi(\alpha)$ est développable en série ordonnée suivant les puissances positives ou négatives de la variable.

La démonstration n'impose à α qu'une seule condition, celle d'avoir un module compris entre R′ et R″. Si la fonction considérée ne devient infinie pour aucune valeur de z de module inférieur à R′, l'intégrale

$$\int^{R'}z^{n-1}\varphi(z)\,dz$$

est égale à zéro, et l'on retrouve le développement suivant les puissances positives de la variable.

Quelques propriétés des fonctions bien définies.

535. La possibilité de développer en série convergente toute fonction finie et bien déterminée d'une variable entraîne des conséquences très-importantes dont l'influence sur l'étude générale des fonctions et sur l'ensemble du calcul intégral devient chaque jour plus considérable.

Nous indiquerons dès à présent quelques-uns de ces théorèmes et dont nous aurons à signaler plus d'une conséquence.

Lorsqu'une fonction $\varphi(z)$ d'une variable z s'annule pour une valeur $z=\alpha$ de la variable, α est une racine de l'équation

$$\varphi(z)=0,$$

et si la fraction

$$\frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^m}$$

prend pour $z=\alpha$ une valeur finie, le degré de multiplicité de α est m.

Quand la fonction $\varphi(z)$ est bien déterminée, le degré de multiplicité de chaque racine est toujours un nombre entier.

Décrivons en effet autour du point qui correspond à $z=\alpha$ un cercle assez petit pour que la valeur de $\varphi(z)$ relative à aucun point de son intérieur ne soit infinie,

posons

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha + z - \alpha),$$

et développons cette fonction suivant les puissances de $z - \alpha$, nous aurons, puisque $\varphi(\alpha) = 0$,

$$(13) \qquad \varphi(z) = \varphi'(\alpha)(z-\alpha) + \varphi''(\alpha)\frac{(z-\alpha)^2}{1.2} + \cdots + \varphi^n(\alpha)\frac{(z-\alpha)^n}{1.2\ldots n} + \cdots,$$

et la série est convergente (531) pour toutes les valeurs de z qui correspondent aux points de l'intérieur du cercle. On en conclut évidemment que si $\varphi'(\alpha)$ n'est pas nul, $\frac{\varphi(z)}{z-\alpha}$ a une valeur finie pour $z = \alpha$, et que α est une racine simple. Si $\varphi'(\alpha)$ est nul, $\frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^2}$ se réduit pour $z = \alpha$ à $\frac{\varphi''(\alpha)}{1.2}$, et α est une racine double. Si $\varphi''(\alpha)$ est nul, $\frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^3}$ se réduit pour $z = \alpha$ à $\frac{\varphi'''(\alpha)}{1.2.3}$, et α est une racine triple. En général, si les $m - 1$ premières dérivées de $\varphi(z)$ s'annulent pour $z = \alpha$, le degré de multiplicité de la racine est précisément égal à m.

Il est impossible d'ailleurs que toutes les dérivées soient nulles à la fois, car le second membre de la formule (13) se réduirait à zéro, et l'on aurait, pour toute valeur de z, $\varphi(z) = 0$.

536. Le théorème précédent, pour être bien compris, ne doit pas être séparé des explications données (I, 373) sur la définition d'une fonction bien définie. On peut aisément former en effet des équations dont les racines aient un degré de multiplicité fractionnaire ou même infiniment petit. Ainsi, par exemple, α est racine de

$$\sqrt{z-\alpha} = 0,$$

$$\frac{1}{l(z-\alpha)} = 0,$$

et le degré de multiplicité est $\frac{1}{2}$ dans le premier cas et infiniment petit dans le second. Mais notre théorème ne s'applique plus ici, parce que les fonctions $\sqrt{z-\alpha}$ et $l(z-\alpha)$ ne sont pas des fonctions bien définies.

537. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont racines simples d'une même équation $\varphi(z) = 0$, on aura évidemment

$$\varphi(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction bien définie qui ne s'annule pour aucune des valeurs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la variable.

Le théorème s'étend au cas où les racines sont multiples, pourvu que l'on re-

garde une racine du degré de multiplicité m comme la réunion de m racines égales entre elles, et le facteur $(x-\alpha)^m$ étant alors remplacé par m facteurs égaux à $x-\alpha$.

538. Lorsque la fonction $\varphi(z)$ devient infinie pour une valeur $z=\alpha$ de la variable, α est racine de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(z)}=0,$$

et le degré de multiplicité de cette racine est un nombre entier. Si nous le désignons par m, la fraction

$$\frac{1}{\varphi(z)(z-\alpha)^m}$$

aura pour $z=\alpha$ une valeur finie, et par conséquent le produit

$$\varphi(z)(z-\alpha)^m$$

prendra lui-même une valeur finie pour $z=\alpha$, et comme il est évidemment fonction bien déterminée de z, il sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de $z-\alpha$, représentant exactement la fonction pour toutes les valeurs de z qui correspondent à l'intérieur d'un cercle suffisamment petit. Soit

$$\varphi(z)(z-\alpha)^m=A_0+A_1(z-\alpha)+A_2(z-\alpha)^2+\ldots+A_m(z-\alpha)^m+\ldots;$$

on en conclura

$$\varphi(z)=\frac{A_0}{(z-\alpha)^m}+\frac{A_1}{(z-\alpha)^{m-1}}+\cdots+A_m+\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction bien déterminée qui ne devient pas infinie pour $z=\alpha$.

539. *Toute fonction bien déterminée devient nécessairement infinie pour une valeur finie ou infinie de la variable.*

Soit $\varphi(z)$ une fonction bien déterminée et supposons que pour toute valeur finie ou infinie de z son module soit inférieur à une limite finie M.

Décrivons un cercle de rayon arbitraire R ayant pour centre l'origine des coordonnées. La fonction $\varphi(z)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de z et applicable à toutes les valeurs (531) qui correspondent à l'intérieur du cercle. On en conclut (532)

$$(9)\qquad \frac{\varphi^n(0)}{1.2\ldots n}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale du second membre étant prise le long de la circonférence du cercle de

rayon R. Mais on a pour ces points

$$z = R(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = Re^{\omega\sqrt{-1}},$$
$$dz = \sqrt{-1}\,Re^{\omega\sqrt{-1}}\,d\omega,$$

et la formule (9) peut s'écrire

$$\frac{\varphi^n(0)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\omega\sqrt{-1}})\,e^{-n\omega\sqrt{-1}}\,d\omega,$$

et puisque par hypothèse le module de $\varphi(Re^{\omega\sqrt{-1}})$ est inférieur à M, celui de $e^{-n\omega\sqrt{-1}}$ étant l'unité, le module de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\omega\sqrt{-1}})\,e^{-n\omega\sqrt{-1}}\,d\omega$$

est moindre que

$$\int_0^{2\pi} M\,d\omega = 2\pi M,$$

et par conséquent le module de $\frac{\varphi^n(0)}{1.2\ldots n}$ est moindre que

$$\frac{M}{R^n},$$

et sa valeur est zéro puisque R est arbitraire et peut être pris aussi grand qu'on le voudra. $\varphi^n(0)$ étant nul, la série qui *représente* la fonction a tous ses termes nuls à l'exception du premier $\varphi(0)$ auquel la démonstration ne s'applique pas, et la fonction est par conséquent une constante. Dans tout autre cas, il est impossible que le module reste inférieur à une limite, si grande qu'elle soit, et le théorème est par conséquent démontré.

540. On déduit du théorème précédent que toute équation

$$\varphi(z) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction *bien déterminée,* a nécessairement une racine au moins. Si en effet la fonction $\varphi(z)$ est bien déterminée, $\frac{1}{\varphi(z)}$ l'est nécessairement aussi et il peut donc devenir infini (539), et par conséquent $\varphi(z)$ peut devenir nul.

541. Les racines d'une équation peuvent être en nombre infini, mais elles ne peuvent jamais former une suite continue correspondant à tous les points d'une

courbe tracée sur le plan. S'il existait en effet une telle courbe, la racine α qui correspond à l'un de ses points serait évidemment de degré infini, car

$$\varphi(z)(z-\alpha)^m$$

serait nul quel que soit m pour une valeur de z aussi voisine de α que l'on voudra et correspondant à un point voisin de la courbe qui représente les racines, et cette hypothèse (535) ne peut pas être admise.

542. *Lorsque deux fonctions bien définies $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont telles que les équations*

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi(z)=0, & \psi(z)=0, \\ \dfrac{1}{\varphi(z)}=0, & \dfrac{1}{\psi(z)}=0 \end{cases}$$

aient les mêmes racines avec le même degré de multiplicité, le rapport $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ est égal à une constante.

Si en effet le rapport $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ n'est pas constant, il est lui-même une fonction bien définie de z qui doit nécessairement devenir nulle et infinie. Mais cela ne peut avoir lieu évidemment que pour les valeurs de z qui sont racines des équations (14), et, pour celles-là, le degré de multiplicité étant par hypothèse le même pour les deux fonctions, le rapport $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ a une valeur finie.

Il faut bien remarquer que le théorème précédent ne s'appliquerait pas si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ devenaient nulles ou infinies pour des valeurs infinies de la variable. La fonction e^z par exemple ne devient nulle ou infinie que pour des valeurs infinies de z, et par conséquent, si l'on ne tient pas compte des racines infinies, les deux fonctions $\varphi(z)$ et $e^z\varphi(z)$ deviendraient nulles et infinies pour les mêmes valeurs de z, et leur rapport cependant n'est pas constant.

Série de Lagrange.

543. Soit l'équation

$$(15)\qquad u=x+\alpha\varphi(u).$$

Nous avons donné (I, 313) le développement de l'une de ses racines en série ordonnée suivant les puissances de α. Nous pouvons maintenant préciser davantage les conditions de convergence de la série et le caractère de la racine représentée par le développement. Si nous posons $u-x=z$, l'équation (15) devient

$$(16)\qquad z=\alpha\varphi(x+z).$$

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant, sur lequel M. Rouché, profitant habilement des belles recherches de Cauchy sur le même sujet, a fondé une démonstration très-simple et très-nette de la formule de Lagrange.

Si la constante α est telle, que, pour toute valeur de z dont le module est égal à r, la fonction

$$\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}$$

ait un module moindre que l'unité, et que de plus $\varphi(x+z)$ soit finie et bien déterminée pour les valeurs de z dont le module est inférieur à r, l'équation (16), *où l'on considère z comme inconnue, aura une racine, et une seule, de module inférieur à r.*

Soient en effet $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les racines égales ou inégales dont le module est inférieur à r, on aura (537)

$$(17)\qquad z-\alpha\varphi(x+z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction bien déterminée et finie et qui ne s'annule pas pour les valeurs de z dont le module est moindre que r.

On déduit de là

$$(18)\quad l\left[1-\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right]-l\psi(z)=l(z-z_1)+l(z-z_2)+\ldots+l(z-z_m)-lz,$$

et en différentiant

$$(19)\quad \frac{d}{dz}\left\{l\left[1-\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right]-l\psi(z)\right\}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{z_1}{z}}+\frac{1}{1-\frac{z_2}{z}}+\cdots+\frac{1}{1-\frac{z_m}{z}}-1\right).$$

Attribuons à z l'une quelconque des valeurs dont le module est r, $\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}$ ayant par hypothèse un module moindre que l'unité, $l\left[1-\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right]$ est développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}$, et comme $\varphi(x+z)$ a été supposé fini et continu pour les valeurs de z dont le module est moindre que r, il est lui-même développable en série ordonnée suivant les puissances de z, et par conséquent

$$l\left[1-\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right]$$

donnera une série ordonnée suivant les puissances entières, positives ou négatives de z.

$\psi(z)$ étant aussi fini et bien déterminé pour les valeurs de z dont le module est inférieur à r, $l\psi(z)$ est développable (531) en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de z, la fonction dont la dérivée forme le premier membre de (19) étant développable en série ordonnée suivant les puissances de z, sa dérivée ne contient pas de terme en $\frac{1}{z}$, et le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement du second membre doit par conséquent être aussi égal à zéro; mais $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ayant par hypothèse des modules inférieurs à celui de z, les fractions qui figurent dans le second membre sont développables en séries convergentes, et l'on a

$$\frac{1}{1-\frac{z_k}{z}} = 1 + \frac{z_k}{z} + \frac{z_k^2}{z^2} + \cdots + \frac{z_k^n}{z^n} + \cdots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le second membre est donc égal à $m-1$, et, puiqu'il est nul, on doit avoir

$$m = 1.$$

544. Les conditions du théorème précédent étant supposées satisfaites, si l'on désigne par z_1 la racine unique de l'équation (16) dont le module est inférieur à r, et par $F(x+z)$ une fonction bien déterminée, finie et continue pour les valeurs de z dont le module ne surpasse pas r, $F(x+z_1)$ sera développable en série convergente par la formule

$$(20)\qquad F(x+z_1) = F(x) + \frac{\alpha}{1}F'(x)\varphi(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}[F'(x)\varphi(x)]^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[F'(x)\varphi(x)]^n + \cdots.$$

Puisqu'il n'existe qu'une seule racine z_1 de module inférieur à r, l'équation (18) du numéro précédent devient en effet

$$l\left[1 - \frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right] - l\psi(z) = l\left(1 - \frac{z_1}{z}\right);$$

d'où, en multipliant par $F'(x+z)$,

$$(21)\qquad F'(x+z)\,l\left[1 - \frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right] - F'(x+z)\,l\psi(z) = F'(x+z)\,l\left(1 - \frac{z_1}{z}\right).$$

Si nous donnons à z le module r, les deux membres seront développables en série ordonnée suivant les puissances de z. Calculons les coefficients de $\frac{1}{z}$ pour égaler leurs valeurs.

Le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le premier membre provient seulement du terme

$$(22)\qquad F'(x+z)\,l\left[1-\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}\right],$$

car le second terme étant fini et bien déterminé pour toutes les valeurs de z de module inférieur à z, est développable en série ordonnée suivant les puissances de z. Le module de $\frac{\alpha\varphi(x+z)}{z}$ étant plus petit que l'unité, l'expression (22) peut s'écrire

$$-F'(x+z)\left[\frac{\alpha}{z}\varphi(x+z)+\frac{\alpha^2}{2z^2}\varphi(x+z)^2+\cdots+\frac{\alpha^n}{nz^n}\varphi(x+z)^n+\cdots\right],$$

et le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le terme général est le produit de $\frac{\alpha^n}{n}$ par le coefficient

$$-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F'(x)\varphi(x)^n$$

de z^{n-1} dans le développement de $F'(x+z)\,[\varphi(x+z)]^n$. Le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le premier membre de (21) est donc représenté par la série

$$(23)\qquad -\left[\frac{\alpha}{1}F'(x)\varphi(x)+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}F'(x)[\varphi(x)]^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F'(x)[\varphi(x)]^n+\cdots\right].$$

Dans le second membre de (21) les deux facteurs sont développables, et l'on a

$$F'(x+z)\,l\left(1-\frac{z_1}{z}\right)=-\left(\frac{z_1}{z}+\frac{z_1^2}{2z^2}+\cdots\right)\left[F'(x)+\frac{z}{1}F''(x)+\frac{z^2}{1.2}F'''(x)+\cdots\right].$$

Le coefficient de $\frac{1}{z}$ forme la série

$$-z_1F'(x)-\frac{z_1^2}{1.2}F''(x)-\frac{z_1^3}{1.2.3}F'''(x)-\cdots,$$

qui, puisque le module de z est inférieur à r, est convergente et représente

$$-[F(x+z_1)-F(x)].$$

Telle est donc la somme de la série (23), et l'on a

$$(24)\qquad F(x+z_1)=F(x)+\alpha F(x)\varphi(x)+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}F'(x)[\varphi(x)]^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F'(x)[\varphi(x)]^n+\cdots.$$

Si l'on prend la fonction $F(x+z)$ égale à la variable, on aura le développement de $x+z_1$, c'est-à-dire de la racine u de l'équation (15), qui se trouve ainsi distinguée de toutes les autres.

Séries trigonométriques.

545. Nous avons rencontré déjà plusieurs séries de la forme

$$A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \ldots + A_n \sin nx + \ldots,$$

mais les conditions de convergence et d'exactitude n'ont pas été discutées, et la démonstration fondée sur l'emploi d'expressions imaginaires n'aurait pu être rendue rigoureuse qu'en anticipant sur quelques-unes des théories exposées dans ce volume.

Nous allons reprendre dans sa généralité cette théorie importante et démontrer le théorème suivant :

Une fonction réelle $\varphi(x)$ peut toujours être représentée pour les valeurs réelles de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ par une série de la forme

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \ldots + A_n \sin nx + \ldots \\ + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \ldots + B_n \cos nx + \ldots. \end{aligned}$$

Commençons par admettre la possibilité du développement, nous déterminerons, dans cette hypothèse, les coefficients des différents termes pour prouver ensuite l'exactitude de la formule obtenue.

Soit donc l'équation

$$(25) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \ldots + A_n \sin nx + \ldots \\ + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \ldots + B_n \cos nx + \ldots. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par $\sin nx\, dx$ et intégrons entre les limites $x = -\pi$, $x = +\pi$, on a, quels que soient les nombres entiers m et n,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi;$$

et par conséquent l'équation (25) donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx = \pi A_n.$$

En multipliant les deux membres de (25) par $\cos nx\, dx$ et intégrant entre les limites $x = -\pi$, $x = +\pi$, on trouvera de même

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx = \pi B_n.$$

Le coefficient A_0 s'obtiendra enfin en multipliant par dx les deux membres de l'équation (25) et intégrant ensuite entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, on aura ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = 2\pi A_0,$$

et par la substitution des valeurs trouvées pour les coefficients, l'équation (25) deviendra

$$(26) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx$$
$$+ \frac{1}{\pi}\Big[\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin x\, dx + \sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin 2x\, dx + \cdots$$
$$+ \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos x\, dx + \cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos 2x\, dx + \cdots\Big].$$

546. L'emploi des coefficients indéterminés est une simple méthode de recherche, et il est indispensable de prouver *à posteriori* l'égalité des deux membres. Remarquons d'abord que les intégrales définies qui figurent dans le second membre de (26) sont indépendantes du nom donné à la variable placée sous le signe $\int$; il est donc permis d'y remplacer x par une nouvelle variable α, et cette substitution permettra de réunir celles-ci en une seule après avoir introduit sous le signe intégral les facteurs indépendants de α qui les multiplient. La formule (26) devient ainsi

$$(27) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha)\, d\alpha \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x) + \ldots\right].$$

Pour en prouver l'exactitude, nous allons calculer le second membre et constater que sa valeur est égale à $\varphi(x)$.

Supposons d'abord que la série qui sous le signe d'intégration multiplie $\varphi(\alpha)\, d\alpha$

soit arrêtée au terme $\cos n(\alpha - x)$, on pourra la réduire à l'aide de la formule connue

$$\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)},$$

et le second membre de (27) est par conséquent la limite de l'intégrale

$$(28) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha)\, d\alpha \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)},$$

lorsque n augmente indéfiniment.

x étant par hypothèse compris entre $-\pi$ et $+\pi$, on peut partager l'intégrale en deux autres, l'une prise entre les limites $-\pi$ et x, l'autre entre x et π; en posant dans la première $\alpha = x - 2\beta$ et dans la seconde $\alpha = x + 2\beta$, l'intégrale (28) devient

$$(29) \quad \int_0^{\frac{1}{2}(\pi + x)} \varphi(x - 2\beta)\, d\beta \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - x)} \varphi(x + 2\beta)\, d\beta \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta},$$

$\frac{1}{2}(\pi + x)$ et $\frac{1}{2}(\pi - x)$ étant l'un et l'autre compris entre zéro et π, chacune de ces intégrales (284) a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x)$, et l'expression (29), qui est leur somme, a pour limite $\pi\varphi(x)$, ce qui démontre l'exactitude de la formule (27).

547. Lorsque, pour la valeur considérée de x, $\varphi(x)$ est discontinue et passe brusquement d'une valeur à une autre de telle sorte que, ε étant infiniment petit, $\varphi(x - \varepsilon)$ et $\varphi(x + \varepsilon)$ ne soient pas égaux à la limite, la première des intégrales (29) est le produit de $\frac{\pi}{2}$ par la fonction $\varphi(x - 2\beta)$, dans laquelle on suppose $\beta = 0$, et la seconde le produit de $\frac{\pi}{2}$ par la fonction $\varphi(x + 2\beta)$, dans laquelle on fait la même hypothèse; β étant positif dans les deux cas avant de s'annuler, on voit que la somme (29) est égale au produit de π par la demi-somme des valeurs de la fonction $\varphi(x)$, et que par conséquent la série représente dans ce cas la demi-somme des valeurs de $\varphi(x)$.

548. Le cas où x est égal à l'une des deux limites $-\pi$ et $+\pi$ doit être examiné à part. La seconde intégrale est alors égale à zéro et la première devient

$$\int_0^{\pi} \varphi(\pi - 2\beta) \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta;$$

il résulte de la démonstration donnée (286) qu'elle a pour limite, lorsque n augmente indéfiniment,

$$\frac{1}{2}\pi[\varphi(\pi)+\varphi(-\pi)].$$

L'équation (27) n'est donc applicable aux valeurs limites que dans le cas où l'on a

$$\varphi(\pi)=\varphi(-\pi).$$

Il était évident d'ailleurs *à priori* que dans toute autre hypothèse la série prenant la même valeur aux deux limites $x=-\pi$, $x=+\pi$, ne peut dans ce cas représenter la fonction. Elle représente, on le voit, la demi-somme des valeurs correspondantes à ces limites.

549. On pourrait, dans la démonstration précédente, substituer aux limites $-\pi$ et $+\pi$ deux autres limites a et $a+2\pi$ différant de 2π. La série représenterait la fonction entre ces deux limites, qui seraient alors celles des intégrales qui expriment les coefficients. La fonction étant arbitraire, on peut la supposer nulle lorsque la variable varie entre certaines limites et restreindre les intégrations qui servent à exprimer les coefficients aux limites arbitraires a et b entre lesquelles on veut représenter la fonction, la différence de ces limites étant nécessairement moindre que 2π. Pour les valeurs de la variable comprises entre b et $a+2\pi$, la série sera alors constamment égale à zéro.

Il est évident, enfin, que pour substituer aux limites $-\pi$ et $+\pi$ deux autres limites $-a$ et $+a$, il suffit de considérer $\frac{\pi x}{a}$ comme étant la variable; les termes de développement seront alors de la forme $A_n \cos\frac{n\pi x}{a}$ et $B_n \sin\frac{n\pi x}{a}$, et l'on aura

$$\varphi(x)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}\varphi(\beta)\,d\beta\left[\frac{1}{2}+\sum\cos\frac{n(\beta-x)}{a}\pi\right],$$

où l'on pourra enfin, aux limites $-a$ et $+a$, substituer deux autres limites quelconques dont la différence soit égale à $2a$.

550. Lorsque la fonction $\varphi(x)$ est impaire, c'est-à-dire quand on a

$$\varphi(x)=-\varphi(-x),$$

l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx$$

est égale à zéro. Les coefficients des cosinus sont donc nuls dans le développement, et la série ne contient que des sinus. On voit de même que le développement d'une fonction paire ne contient que des cosinus.

551. *Développement de* $\frac{1}{2}x$. — La série qui entre les limites $x = -\pi$ et $x = +\pi$ représente $\frac{1}{2}x$, ne doit contenir (550) que des sinus.

On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n},$$

et par conséquent

$$(31) \qquad \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots.$$

Pour $x = \pi$, le second membre se réduit à zéro. Il représente en effet (548) $\frac{1}{2}(-\pi + \pi)$, et l'équation (31) n'est pas exacte.

En changeant x en $\pi - x$, on a

$$(32) \qquad \frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots,$$

et en ajoutant membre à membre

$$(33) \qquad \frac{1}{2}\pi = 2\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$

Cette équation suppose x et $\pi - x$ compris tous deux entre $-\pi$ et $+\pi$; x doit donc être compris entre zéro et π sans atteindre l'une des deux limites.

Pour obtenir directement l'équation (33), il suffit d'appliquer la formule générale de développement à une fonction $\varphi(x)$ égale à $\frac{\pi}{2}$ pour x compris entre zéro et π et à $-\frac{\pi}{2}$ pour x compris entre $-\pi$ et zéro.

552. Le développement trouvé (551) est le seul de cette forme qui entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ puisse représenter $\frac{1}{2}x$, mais on en peut former une infinité d'autres qui représentent cette même fonction dans une partie seulement de l'intervalle.

En supposant par exemple $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$ lorsque x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$,

et $\varphi(x) = 0$ lorsque x est compris entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ ou entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on trouve

$$(34) \qquad \frac{x}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \frac{1}{49}\sin 7x + \cdots\right).$$

Si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, le second membre devient

$$\frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots\right).$$

Il représente la demi-somme des valeurs $\frac{\pi}{4}$ et zéro, c'est-à-dire $\frac{\pi}{8}$, et l'on a

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots,$$

comme on l'a trouvé (I, 414).

Supposons $\varphi(x) = \frac{x}{2}$ lorsque x varie de zéro à α, $\varphi(x) = \frac{\alpha}{2}$ lorsque x varie de α à $\pi - \alpha$ et $\varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}$ quand x varie de $\pi - \alpha$ à π; ajoutons enfin que l'on suppose la fonction impaire et l'on trouvera aisément

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left(\sin x \sin\alpha + \frac{1}{9}\sin 3x \sin 3\alpha + \frac{1}{25}\sin 5x \sin 5\alpha + \cdots\right).$$

Si l'on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\sin\alpha - \frac{1}{9}\sin 3\alpha + \frac{1}{25}\sin 5\alpha + \cdots\right),$$

ce qui s'accorde avec la formule (34).

553. Pour représenter la fonction $\frac{1}{2}x$ par une série qui ne contienne que des cosinus, il suffit de supposer $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$ lorsque x varie de zéro à π et $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x$ lorsqu'il varie de $-\pi$ à zéro. On a alors

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

et tous les sinus disparaissent du développement. On trouve alors

$$(35) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \cdots\right).$$

Si l'on fait $x = 0$, on retrouve

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots.$$

554. *Développement de* $\sin mx$ *et de* $\cos mx$. — On trouve aisément, n étant entier et m quelconque,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{n \sin(m\pi)(-1)^{n+1}}{n^2 - m^2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx = 0.$$

On en conclut

$$(36) \qquad \sin mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{\sin x}{1 - m^2} - \frac{2 \sin 2x}{4 - m^2} + \frac{3 \sin 3x}{9 - m^2} + \cdots \right).$$

On trouvera de même

$$(37) \qquad \cos mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{1}{2m} + \frac{m \cos x}{1 - m^2} - \frac{m \cos 2x}{4 - m^2} + \frac{m \cos 3x}{9 - m^2} - \cdots \right).$$

Dans cette dernière équation on peut supposer $x = \pi$, car la fonction a la même valeur aux deux limites $x = -\pi$, $x = \pi$, et l'on a par conséquent

$$(38) \qquad \cot m\pi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2m} - \frac{m}{1 - m^2} - \frac{m}{4 - m^2} - \frac{m}{9 - m^2} - \cdots \right).$$

555. *Développement de* $e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$. — Cette fonction étant paire, son développement ne contient que des cosinus. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \cos nx \, dx = \frac{2\alpha \cos n\pi}{\alpha^2 + n^2} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}),$$

et

$$(39) \qquad e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha \cos x}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha \cos 2x}{4 + \alpha^2} - \cdots \right).$$

On trouverait de même

$$(40) \qquad e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) \left(\frac{\sin x}{1 + \alpha^2} - \frac{2 \sin 2x}{4 + \alpha^2} + \frac{3 \sin 3x}{9 + \alpha^2} - \cdots \right).$$

556. *Développement de* $\cos x$. — Considérons une fonction égale à $\cos x$ lorsque x est compris entre zéro et π et à $-\cos x$ lorsqu'il est compris entre $-\pi$ et zéro. Cette fonction étant impaire, le développement ne contiendra que des sinus. Si on

la désigne par $\varphi(x)$, on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx.$$

Cette intégrale est nulle si n est impair, et égale à $\frac{2n}{n^2-1}$ si n est pair; on en conclut

$$(41) \qquad \cos x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{1.3}\sin 2x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \frac{6}{5.7}\sin 6x + \cdots\right).$$

557. La formule (27) (546) contient implicitement le développement de toutes les fonctions en séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de la variable. Dans certains cas cependant il est plus aisé de trouver directement le développement qui fait connaître alors la valeur des intégrales qui représentent les coefficients.

Développement de $l \sin x$. — On a identiquement

$$\cos x = \cos x - \cos 3x + \cos 3x - \cos 5x + \cos 5x - \cos 7x + \cos 7x - \ldots,$$

c'est-à-dire, en réunissant les termes deux à deux,

$$\cos x = 2 \sin x (\sin 2x + \sin 4x + \ldots + \sin 2nx) + \cos(2n+1)x,$$

et par conséquent

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \sin 2x + 2 \sin 4x + \cdots + 2 \sin 2nx + \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}.$$

Multiplions les deux membres par dx et intégrons depuis la limite x jusqu'à la limite $\frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$-l \sin x = (1 + \cos 2x) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + \cdots$$
$$+ \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}\cos 2nx\right] + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} dx.$$

Si dans cette équation on fait croître n indéfiniment, en remarquant que

$$l 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

on a

$$l \sin x = -l 2 - \cos 2x - \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 6x}{3} - \cdots - \frac{\cos 2nx}{n} - \lim. \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} dx,$$

l'intégrale

$$(42)\qquad \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\,dx$$

a pour limite zéro. On peut la partager en effet en intégrales partielles prises entre des limites telles que les éléments soient alternativement positifs et négatifs, et la différence de deux éléments consécutifs est infiniment petite par rapport à la somme de leurs valeurs absolues. Or la somme de toutes les valeurs absolues est finie, car elle est moindre que

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$$

L'intégrale (42) a donc pour limite zéro, et l'on a enfin

$$(43)\qquad l\sin x = -l2 - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{3}\cos 6x - \cdots.$$

Cette formule se trouve démontrée ainsi pour les valeurs de x comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, mais elle est évidemment exacte lorsque x varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, car le second membre ne change pas non plus que le premier quand on y change x en $\pi - x$.

La comparaison de l'équation (43) avec le théorème (545) donne aisément

$$(44)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,l2,$$

$$(45)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx\, l\sin x\,dx = -\frac{\pi}{4n}.$$

558. *Développement de $l\Gamma(x)$.* — M. Kummer a très-élégamment associé la méthode des coefficients indéterminés avec l'emploi des formules générales pour développer $l\Gamma(x)$ en série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de $2\pi x$.

Posons

$$(46)\qquad \begin{aligned} l\Gamma(x) = A_0 &+ 2A_1\cos 2\pi x + 2A_2\cos 4\pi x + \ldots \\ &+ 2B_1\sin 2\pi x + 2B_2\sin 4\pi x + \ldots, \end{aligned}$$

la formule s'appliquant (549) aux valeurs de x comprises entre zéro et l'unité.

On a (295)

$$(47)\qquad l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l\Gamma(x)\Gamma(1-x) = l2\pi - l(2\sin\pi x).$$

D'ailleurs (557)

$$(48)\qquad -l2\sin\pi x = \cos 2\pi x + \frac{1}{2}\cos 4\pi x + \frac{1}{3}\cos 6\pi x + \cdots.$$

En remplaçant $l\Gamma(x)$ et $l\Gamma(1-x)$ par leurs développements déduits de (46) et $l2\sin\pi x$ par la formule (48), nous aurons

$$\begin{aligned}&2A_0 + 4A_1\cos 2\pi x + 4A_2\cos 4\pi x + \ldots\\ &\quad = l2\pi + \cos 2\pi x + \frac{1}{2}\cos 4\pi x + \frac{1}{3}\cos 6\pi x + \cdots;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$A_0 = \frac{1}{2}l2\pi,\quad A_n = \frac{1}{4n}.$$

Les coefficients des cosinus étant connus, nous aurons recours, pour calculer les autres, à la formule générale (549)

$$B_n = \int_0^1 l\Gamma(x)\sin 2n\pi x\,dx.$$

On a (314)

$$l\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right)\frac{dz}{lz};$$

par conséquent

$$B_n = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right)\frac{\sin 2n\pi x\,dx\,dz}{lz}.$$

L'intégration par rapport à x peut s'effectuer. On a

$$\int_0^1 \sin 2n\pi x\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx = -\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 z^{x-1}\sin 2n\pi x\,dx = \frac{1}{z}\int_0^1 e^{xlz}\sin 2n\pi x\,dx = \frac{(1-z)\,2n\pi}{z\left[(lz)^2 + 4n^2\pi^2\right]};$$

par conséquent

$$B_n = \int_0^1 \left[\frac{-2n\pi}{z\left[(lz)^2 + 4n^2\pi^2\right]} + \frac{1}{2n\pi}\right]\frac{dz}{lz}.$$

En posant $z = e^{-2n\pi t}$,

$$B_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - e^{-2n\pi t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Si l'on fait $n = 1$,

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - e^{-2\pi t}\right)\frac{dt}{t}$$

et

$$nB_n - B_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (e^{-2\pi t} - e^{-2n\pi t})\frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire (241)

$$nB_n - B_1 = \frac{1}{2\pi}\, ln,$$

et tous les coefficients B_n se déduisent par conséquent du premier B_1.

B_1 lui-même peut se déduire d'une intégrale dont la valeur numérique très-exactement calculée joue un rôle dans plusieurs recherches.

Posons

$$C = \int_0^\infty \left(e^{-t} + \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t} = 0{,}5772156649,$$ Pr. Roy. Soc. t. 15. p. 429

nous aurons, d'après la valeur de B_1,

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} + e^{-t} - e^{-2\pi t}\right)\frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire (241)

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}\, l2\pi + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Mais l'intégrale qui forme le dernier terme du second membre est égale à zéro; si l'on y change en effet t en $\frac{1}{t}$, elle se transforme en une expression identiquement égale et de signe contraire qui doit lui être égale.

On a donc enfin

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}C + \frac{1}{2\pi}\, l2\pi,$$

et

$$(49)\qquad \begin{aligned} l\Gamma(x) = {} & \frac{1}{2}\, l(2\pi) + \frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{1}{4}\cos 4\pi x + \cdots \\ & + \frac{1}{\pi}(C + l2\pi)\left(\sin 2\pi x + \frac{1}{2}\sin 4\pi x + \cdots\right) \\ & + \frac{1}{\pi}\left(l1 \sin 2\pi x + \frac{1}{2}\, l2 \sin 4\pi x + \frac{1}{3}\, l3 \sin 6\pi x + \cdots\right). \end{aligned}$$

559. On peut aisément rattacher à cette formule la propriété de la fonction $\Gamma(x)$

démontrée (289) et (303). On a, comme on sait, lorsque l'entier k n'est pas un multiple de n,

$$\cos 2k\pi x + \cos 2k\pi\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \cos 2k\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = 0,$$

$$\sin 2k\pi x + \sin 2k\pi\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \sin 2k\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = 0.$$

Si l'on suppose $k = \mu n$, tous les termes deviennent égaux, et l'on a

$$\cos 2k\pi x + \cos 2k\pi\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \cos 2k\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n\cos 2k\pi x,$$

$$\sin 2k\pi x + \sin 2k\pi\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \sin 2k\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n\sin 2k\pi x.$$

Cela posé, en remplaçant dans l'équation (49) x par x, $x+\frac{1}{n}$, $x+\frac{2}{n}$, ..., $x+\frac{n-1}{n}$, et ajoutant les résultats, on trouve

$$(50)\qquad \begin{aligned} &l\Gamma(x) + l\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + l\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}n\,l2\pi + \frac{1}{2}n\left(\frac{\cos 2n\pi x}{n} + \frac{\cos 4n\pi x}{2n} + \frac{\cos 6n\pi x}{3n} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{n}{\pi}(C + l2\pi)\left(\frac{\sin 2n\pi x}{n} + \frac{\sin 4n\pi x}{2n} + \frac{\sin 6n\pi x}{3n} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{n}{\pi}\left(\frac{ln}{n}\sin 2n\pi x + \frac{l2n}{2n}\sin 4n\pi x + \cdots\right), \end{aligned}$$

qui s'applique lorsque x est compris entre zéro et $\frac{1}{n}$, afin que x, $x+\frac{1}{n}$, ..., $x+\frac{n-1}{n}$ soient tous compris entre zéro et l'unité.

Si de l'équation (50) on retranche $l\Gamma(nx)$ développé au moyen de la série (49), on a

$$\begin{aligned} &l\Gamma(x) + l\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + l\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) - l\Gamma(nx) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)\,l2\pi + \frac{ln}{\pi}\left(\sin 2n\pi x + \frac{1}{2}\sin 4n\pi x + \cdots\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire (551)

$$l\,\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} = \frac{1}{2}(n-1)\,l2\pi + \frac{1}{2}(1-2nx)\,ln,$$

et

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1-2nx}{2}}\,\Gamma(nx).$$

Digression sur les fonctions nommées Y_n.

560. La fonction qui représente l'unité divisée par la distance de deux points joue un grand rôle dans un grand nombre de problèmes de Mécanique. Elle contient évidemment les coordonnées de ces points et peut s'exprimer par exemple au moyen de leurs coordonnées polaires ρ, θ, ψ, ρ', θ', ψ'. La distance r de deux points ainsi définis est donnée par la formule

$$r^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos V,$$

V étant l'angle des deux rayons vecteurs. On a d'ailleurs

$$\cos V=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi'),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\{\rho'^2-2\rho\rho'[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')]+\rho^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Prenons pour unité la plus grande ρ' des distances ρ et ρ', on aura

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\{1-2\rho[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')]+\rho^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette expression peut se développer au moyen de la série étudiée (I, 354), et l'on aura

$$(51)\qquad \frac{1}{r}=P_0+P_1\rho+P_2\rho^2+\ldots+P_n\rho^n+\ldots,$$

P_n étant ce que devient X_n quand on y fait

$$x=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi').$$

561. Le coefficient P_n est une fonction entière et de degré n de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$ et $\cos(\psi-\psi')$. Considéré comme fonction de θ et de ψ seulement, il satisfait à une équation différentielle que nous allons former.

En nommant x, y, z, x', y', z' les coordonnées rectilignes des deux points con-

sidérés, on a

$$\frac{1}{r} = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

On en déduit aisément

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

et en posant

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\psi,$$
$$z = \rho \cos\theta,$$

cette équation devient (I, 182)

$$(52) \qquad \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\psi^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\rho} = 0.$$

En multipliant cette équation par ρ^2 et remplaçant $\frac{1}{r}$ par son développement (51), l'équation obtenue ayant lieu quel que soit ρ exigera que le coefficient de chaque puissance de ρ soit nul. On aura ainsi

$$(53) \qquad \frac{d^2 P_n}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dP_n}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d^2 P_n}{d\psi^2} + n(n+1)P_n = 0,$$

que l'on peut transformer, en posant $\cos\theta = \mu$, en

$$(54) \qquad \frac{d\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right]}{d\mu} + \frac{\frac{d^2 P_n}{d\psi^2}}{1-\mu^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

La fonction P_n, qui satisfait à cette équation, est parfaitement définie et ne conserve rien d'arbitraire, mais elle n'en est pas la seule solution qui soit une fonction rationnelle et entière de degré n de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$ et $\sin\theta\sin\psi$. La solution la plus générale de cette forme, et dont P_n n'est qu'un cas très-particulier, a été nommée par Laplace la fonction Y_n.

Commençons par prouver qu'une telle fonction existe en en donnant la forme générale.

Si l'on pose en effet

$$U = (x + \alpha y + \beta z)^n,$$

en supposant

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0,$$

on aura évidemment

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0;$$

et si l'on pose

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta \cos\psi, \quad z = \rho \sin\theta \sin\psi,$$

la fonction transformée sera le produit ρ^n par une solution de l'équation (53), et la somme de $2n+1$ termes pareils multipliés par des constantes réelles ou imaginaires satisfera à la même équation et pourra être prise pour expression générale de Y_n.

562. Les fonctions Y_n jouissent de deux propriétés importantes dont se déduit la possibilité d'un développement en série souvent employé par les géomètres et qui doit trouver place dans ce chapitre.

Y_n, d'après sa définition, est une fonction homogène et de degré n des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta \cos\psi$, $\sin\theta \sin\psi$, et le produit $\rho^n Y_n$ satisfera à l'équation (52), dont le premier membre en effet, quand on y substitue ce produit à $\frac{1}{r}$, devient le produit de ρ^{n-2} par le premier membre de l'équation qui définit Y_n. Si donc on pose

$$V = \rho^n Y_n,$$

la fonction V, exprimée en x, y, z, satisfera à l'équation

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0. \tag{55}$$

Appliquons le théorème de Green (503) à cette fonction V et à la fonction $\frac{1}{r}$, qui représente l'inverse de la distance du point dont les coordonnées sont x, y, z, à un point A situé dans l'intérieur d'une sphère de rayon R, nous aurons

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} = 0, \tag{56}$$

et, en ayant égard aux équations (55) et (56),

$$\int \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma = 4\pi V_A. \tag{57}$$

L'intégrale qui figure au premier membre étant prise pour tous les éléments $d\sigma$ de la surface de la sphère de rayon R et V_A désignant la valeur de la fonction V au

point A, on a, d'après la valeur de V,

$$\frac{dV}{dn} = nR^{n-1}Y_n = \frac{nV}{R}.$$

On a donc

$$(58) \qquad 4\pi V_A = \int V d\sigma \left(\frac{n}{R}\frac{1}{r} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right).$$

Mais, en développant $\frac{1}{r}$ en série, la formule (51) donne, en désignant par a la distance du point A au centre,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(P_0 + P_1\frac{a}{R} + P_2\frac{a^2}{R^2} + \cdots + P_n\frac{a^n}{R^n} + \cdots\right).$$

D'ailleurs $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ est la dérivée de $\frac{1}{r}$ lorsque θ et ψ, qui figurent seuls dans P_n, restent constants, et l'on a pour les points de la surface sphérique

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{P_0}{R^2} - \frac{2aP_1}{R^3} - \cdots - \frac{(n+1)P_n a^n}{R^{n+2}} - \cdots.$$

L'équation (58) devient donc, en remplaçant V par sa valeur $\rho^n Y_n$ et $d\sigma$ par $R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$,

$$\begin{aligned} 4\pi a^n Y'_n &= R^n \int\int Y_n R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi \left(\frac{n}{R}\frac{1}{r} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) \\ &= R^n \int\int \left[Y_n n \sum \frac{a^n P_n}{R^n} + \sum \frac{(n+1)a^n P_n}{R^n}\right] \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \end{aligned}$$

et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de a dans les deux membres,

$$(59) \qquad 4\pi Y'_n = (2n+1)\int\int Y_n P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

$$(60) \qquad 0 = \int\int Y_n P_{n'} \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

Y'_n étant ce que devient la fonction Y_n quand on y remplace θ et ψ par les coordonnées θ' et ψ' du point A qui figurent avec θ et ψ dans l'expression de P_n, et les intégrations s'étendent à toute la surface de la sphère, c'est-à-dire aux valeurs de θ comprises entre 0 et π et à celles de ψ entre 0 et 2π.

Développement d'une fonction de deux variables.

563. Toute fonction de deux variables θ et ψ peut être représentée par une série de la forme

$$\varphi(\theta, \psi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n + \ldots, \tag{61}$$

Y_n désignant une fonction homogène de $\cos\theta$, $\cos\theta\cos\psi$ et $\sin\theta\sin\psi$, qui satisfait à la condition énoncée plus haut.

La série est toujours convergente et le développement s'applique aux valeurs de θ et de ψ représentant toutes les directions.

On a donné de ce théorème un grand nombre de démonstrations; la suivante, due à M. Darboux, nous paraît de beaucoup la plus simple. Commençons, comme nous l'avons fait (545), par admettre la possibilité du développement, et après avoir cherché l'expression du terme général Y_n, nous prouverons que la somme de la série représente bien $\varphi(\theta, \psi)$.

Multiplions les deux membres de (61) par $P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ et intégrons entre les limites zéro et π pour θ, zéro et 2π pour ψ. P_n désignant ce que devient la fonction X_n quand on y remplace x par

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

nous aurons, d'après les équations (59) et (60),

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, \psi) P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n,$$

et cette formule fait connaître Y'_n, c'est-à-dire ce que devient Y_n quand on y remplace θ par θ' et ψ par ψ'; on aura par conséquent Y_n en changeant dans le premier résultat θ et ψ en θ' et ψ', et réciproquement. La série (61) devient ainsi

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n \varphi(\theta', \psi')\, d\psi'. \tag{62}$$

Nous allons déterminer la somme des n premiers termes et montrer que, n croissant indéfiniment, la limite de cette somme est en effet $\varphi(\theta, \psi)$.

Les variables θ et ψ peuvent être considérées comme des coordonnées polaires déterminant la position d'un point sur une sphère de rayon unité, θ désignant la distance à un pôle fixe et ψ l'angle formé par le rayon vecteur θ avec un arc de cercle fixe passant par le pôle et pris pour origine.

Changeons de coordonnées et prenons pour pôle le point de la sphère dont les coordonnées sont θ et ψ. Soient θ_1 et ψ_1 les coordonnées nouvelles qui remplacent θ et ψ. On a évidemment

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi') = \cos\theta_1.$$

De plus, l'élément de surface sphérique $\sin\theta' d\theta' d\psi'$ sera remplacé par $\sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1$, et l'on aura

$$(63)\quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n \sin\theta' \varphi(\theta', \psi') d\theta' d\psi' = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n(\cos\theta_1)\varphi(\theta_1, \psi_1)\sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1,$$

$P_n(\cos\theta_1)$ étant ce que devient X_n quand on y remplace x par $\cos\theta_1$. En effectuant l'intégration par rapport à ψ_1 et posant

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta_1, \psi_1) d\psi_1 = 2\pi F(\cos\theta_1),$$

en sorte que $F(\cos\theta_1)$ puisse être considéré comme la valeur moyenne de $\varphi(\theta_1, \psi_1)$ sur le cercle situé à la distance θ_1 du pôle, l'expression (63) devient

$$2\pi \int_0^\pi P_n(\cos\theta_1) F(\cos\theta_1)\sin\theta_1 d\theta_1,$$

et, en posant $\cos\theta_1 = x$,

$$2\pi \int_{-1}^{+1} X_n F(x) dx.$$

La série (62) est par conséquent réduite à

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x) dx [X_0 + 3X_1 + \ldots + (2n+1)X_n],$$

c'est-à-dire (I, 358)

$$(64)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x) dx \left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right),$$

et c'est cette expression dont il faut chercher la limite lorsque n croît indéfiniment. On a, en intégrant par parties,

$$\frac{1}{2}\int F(x) dx \left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) = \frac{1}{2} F(x)(X_n + X_{n+1}) - \frac{1}{2}\int F'(x) dx (X_n + X_{n+1}).$$

Aux deux limites $x = -1$ et $x = +1$, X_n et X_{n+1} deviennent respectivement $(-1)^n(+1)^n$ et $(-1)^{n+1}(+1)^{n+1}$, le terme intégré

$$F(x)(X_n + X_{n+1})$$

donne donc entre les deux limites

$$\frac{1}{2}F(1)(1+1)=F(1).$$

Quant à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)(X_n+X_{n+1})\,dx,$$

elle tend évidemment vers zéro, puisque, lorsque n augmente, X_n tend vers zéro pour toute valeur de x (522). La limite de (64) est donc enfin $F(1)$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta_1,\psi_1)\,d\psi_1;$$

pour $\cos\theta_1=1$, c'est-à-dire $\theta_1=0$; mais, pour $\theta_1=0$, la fonction $\varphi(\theta_1,\psi_1)$ est indépendante de ψ et devient précisément la valeur de $\varphi(\theta',\psi')$ correspondante à la nouvelle origine, dont les coordonnées primitives sont θ et ψ. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta_1,\psi_1)\,d\psi_1$$

se réduit donc à cette valeur de $\varphi(\theta,\psi)$, qui représente par conséquent la somme de la série.

Développement d'une fonction d'une seule variable.

564. Pour appliquer les formules précédentes au développement d'une fonction d'une seule variable, il faut supposer que la fonction $\varphi(\theta,\psi)$ devienne indépendante de ψ et ne contienne que la seule variable θ. Désignons-la par $\varphi(\cos\theta)$, on aura

$$\varphi(\cos\theta)=Y_0+Y_1+Y_2+\ldots+Y_n+\ldots. \tag{65}$$

Les fonctions $Y_0, Y_1,\ldots, Y_n,\ldots$, dans ce cas, dépendent de la seule variable θ; on a en effet (563)

$$Y_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi'\,P_n,$$

P_n désignant une fonction de la somme

$$\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi').$$

Or l'intégration par rapport à ψ' donnera un résultat indépendant de ψ', parce que

l'on a, quelle que soit la fonction $F(\cos\psi - \psi')$,

$$\int_0^{2\pi} F[\cos(\psi - \psi')]\,d\psi = \int_{\psi'}^{2\pi+\psi'} F(\cos u)\,du = \int_0^{2\pi} F(\cos u)\,du;$$

car les éléments de l'intégrale correspondant aux valeurs de la variable comprises entre o et ψ' sont évidemment les mêmes que ceux qui correspondent aux valeurs comprises entre 2π et $2\pi + \psi'$.

L'équation différentielle qui définit Y_n est, en posant $\cos\theta = x$,

$$(66)\qquad \frac{d(1-x^2)\dfrac{dY_n}{dx}}{dx} + \frac{\dfrac{d^2Y_n}{d\psi^2}}{1-x^2} + n(n+1)Y_n = 0.$$

Elle se réduit, lorsque Y_n est indépendant de ψ, à

$$\frac{d(1-x^2)\dfrac{dY_n}{dx}}{dx} + n(n+1)Y_n = 0.$$

On peut trouver aisément la solution générale de cette équation. On y satisfait (I, 357) en posant $Y_n = AX_n$, A étant une constante. Pour trouver la solution la plus générale, posons

$$Y_n = VX_n.$$

On trouvera

$$(1-x^2)\left(X_n\frac{d^2V}{dx^2} + 2\frac{dX_n}{dx}\frac{dV}{dx} + V\frac{d^2X_n}{dx^2}\right) - 2x\left(V\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dV}{dx}\right) + n(n+1)VX_n = 0,$$

et, d'après l'équation à laquelle satisfait X_n,

$$(1-x^2)X_n\frac{d^2V}{dx^2} + \left[2(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} - 2xX_n\right]\frac{dV}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\dfrac{d^2V}{dx}}{\dfrac{dV}{dx}} = -\frac{2\dfrac{dXn}{dx}}{X_n} + \frac{2x}{1-x^2},$$

$$l\frac{dV}{dx} = -2lX_n - l(1-x^2),$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{C}{X_n^2(1-x)^2},$$

$$V = C' + C\int\frac{dx}{X_n^2(1-x^2)},$$

et la solution de l'équation (66) étant VX_n, la seule solution entière et rationnelle en x est évidemment $C'X_n$, en sorte que le développement (65) devient, en posant $\cos\theta = x$,

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n + \ldots, \tag{67}$$

dont la possibilité se trouve ainsi démontrée.

Pour calculer le coefficient A_n, multiplions les deux membres de (67) par $X_n dx$ et intégrons entre les limites $x = -1$, $x = +1$.

Nous avons (529)

$$\int_{-1}^{+1} X_n X'_n \, dx = 0, \tag{68}$$

On déduit d'ailleurs aisément de la formule (60), en y supposant $Y_n = P_n$, $\theta' = 0$, $\psi' = 0$,

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}, \tag{69}$$

et par conséquent

$$\frac{2}{2n+1} A_n = \int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x) \, dx.$$

565. Le développement qui nous occupe jouit d'une propriété remarquable.

Dans la série qui représente $\varphi(x)$, un nombre quelconque n de termes, pris à partir du premier, forme un polynôme Z qui, parmi tous ceux de même degré, donne à l'intégrale

$$U = \int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - Z]^2 \, dx \tag{70}$$

une valeur minima.

Pour le démontrer, cherchons directement à déterminer Z par la condition de rendre l'intégrale (70) minima. Il faut que la dérivée de U par rapport à chacune des constantes qui entrent dans Z soit égale à zéro, ou, ce qui revient au même, en nommant δZ la différentielle de Z prise par rapport à ces seules constantes, on doit avoir

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - Z] \, \delta Z \, dx = 0. \tag{71}$$

Or, quelle que soit la fonction Z, on peut la mettre sous la forme

$$Z = A_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n.$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ étant des constantes convenablement choisies, on a alors

$$\delta Z = \delta A_0 + X_1 \delta A_1 + \ldots + X_n \delta A_n,$$

et comme $\delta A_0, \delta A_1, \ldots, \delta A_n$ sont arbitraires, l'équation (71) exige que l'on ait, pour toute valeur de p non supérieure à n,

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - Z] X_p \, dx = 0,$$

et en remplaçant Z par sa valeur et appliquant la propriété exprimée par les équations (68) et (69), on en déduit

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_p \, dx = \frac{2}{2p+1} A_p,$$

et l'expression de Z coïncide par conséquent avec les n premiers termes du développement.

Cet élégant théorème a été énoncé pour la première fois par M. Plarr.

CHAPITRE VIII.

INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES.

Intégration des différentielles qui contiennent plusieurs variables indépendantes.

566. La différentielle d'une fonction de deux variables x et y est de la forme

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy, \tag{1}$$

M et N désignant des fonctions de x et de y. Intégrer l'expression (1) c'est former la fonction dont elle est la différentielle; le problème se ramène aisément, quand il est possible, à l'intégration des fonctions d'une seule variable, mais il ne l'est pas toujours, et il existe une condition d'intégrabilité que la méthode même d'intégration va nous faire connaître.

La différentielle

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$$

étant donnée, la fonction primitive F, si elle existe, doit avoir pour dérivée par rapport à x le coefficient M de dx. Posons donc

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \mathrm{M}, \tag{2}$$

on en déduit

$$\mathrm{F} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{M}dx + \psi(y), \tag{3}$$

x_0 étant une constante arbitraire et $\psi(y)$ une fonction de la seule variable y qui doit être déterminée de telle sorte que l'on ait en outre

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy} = \mathrm{N}. \tag{4}$$

Cette équation (4) devient, en ayant égard à (3),

$$\mathrm{N} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\mathrm{M}}{dy} dx + \psi'(y), \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$\psi'(y) = \mathrm{N} - \int_{x_0}^{x} \frac{d\mathrm{M}}{dy}\, dx, \tag{6}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse en déduire $\psi(y)$ est évidemment que le second membre de (6) ne dépende que de la seule variable y, c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à x soit égale à zéro; on obtient ainsi pour la condition d'intégrabilité

$$\frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0. \tag{7}$$

En la supposant satisfaite, l'équation (6) devient

$$\psi'(y) = \mathrm{N} - \int_{x_0}^{x} \frac{d\mathrm{N}}{dx}\, dx, \tag{8}$$

ou, en désignant par N_0 ce que devient N quand on y fait $x = x_0$,

$$\psi'(y) = \mathrm{N} - (\mathrm{N} - \mathrm{N}_0) = \mathrm{N}_0; \tag{9}$$

d'où l'on déduit

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{N}_0\, dy + \mathrm{C}$$

et

$$\mathrm{F} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{M}\, dx + \int_{y_0}^{y} \mathrm{N}_0\, dy + \mathrm{C}. \tag{10}$$

Cette équation (10) donne la solution du problème et F est l'intégrale de $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ lorsqu'on suppose toutefois la condition d'intégrabilité satisfaite.

567. La méthode précédente s'étend aisément aux différentielles qui contiennent un nombre quelconque de variables indépendantes. Soit à intégrer

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz, \tag{11}$$

l'équation

$$d\mathrm{F} = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz \tag{12}$$

équivaut à

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \mathrm{M}, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = \mathrm{N}, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dz} = \mathrm{P}. \tag{13}$$

De la première des équations (13) on déduit

$$F = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \varphi(y, z), \tag{14}$$

et cette expression de F, dans laquelle $\varphi(y, z)$ est une fonction entièrement arbitraire de y et de z, comprend toutes les fonctions dont la dérivée par rapport à x est égale à M.

Il faut, si cela est possible, déterminer φ de manière à satisfaire aux deux dernières équations (13), et l'on doit avoir

$$N = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}, \quad P = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx + \frac{d\varphi}{dz},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx, \quad \frac{d\varphi}{dz} = P - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx. \tag{15}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces équations soient compatibles est que les seconds membres étant des fonctions de y et de z seulement, satisfassent à la condition trouvée (566), c'est-à-dire que la dérivée du premier par rapport à z soit égale à celle du second par rapport à x. Pour que les seconds membres dépendent de y et de z seulement, il faut que leurs dérivées par rapport à x soient égales à zéro, et l'on trouve ainsi

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}, \tag{16}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz}. \tag{17}$$

En remarquant que $\frac{d^2M}{dy\,dz} = \frac{d^2M}{dz\,dy}$, la troisième condition se réduit à

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}, \tag{18}$$

et les équations (16), (17), (18) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression (11) soit intégrable.

En les supposant satisfaites, on a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx}\,dx = N - N_0,$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dP}{dx}\,dx = P - P_0,$$

N_0 et P_0 étant ce que deviennent N et P quand on y remplace x par x_0; les équations (15) deviennent alors

$$\frac{d\varphi}{dy} = N_0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = P_0,$$

d'où l'on déduit (566)

$$\varphi = \int_{y_0}^{y} N_0\, dy + \int_{z_0}^{z} P_{0,0}\, dz + C,$$

$P_{0,0}$ désignant ce que devient P_0 quand on y remplace y par y_0, et l'on a enfin, en se reportant à l'équation (14),

$$(19) \qquad F = \int_{x_0}^{x} M\, dx + \int_{y_0}^{y} N_0\, dy + \int_{z_0}^{z} P_{0,0}\, dz.$$

568. Si la différentielle donnée était

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n,$$

la condition d'intégrabilité qui s'obtiendrait exactement de la même manière serait exprimée par l'équation

$$\frac{dX_i}{dx_{i'}} = \frac{dX_{i'}}{dx_i},$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs des indices i et i', et l'intégrale, lorsque cette condition est remplie, est exprimée par la formule

$$\int_{x_1^0}^{x_1} X_1\, dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} X_2^0\, dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} X_3^{0,0}\, dx_3 + \cdots + \int_{x_n^0}^{x_n} X_n^{0,0000}\, dx_n + C,$$

x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$ étant des constantes arbitrairement choisies, et X_2^0, $X_3^{0,0}, \ldots,$ $X_n^{0,0000}$ ce que deviennent les fonctions $X_2, X_3, \ldots, X_n$ quand on y remplace x_1 par x_1^0, x_2 par $x_2^0, \ldots, x_n$ par x_n^0.

569. Lorsque les coefficients des différentielles arbitraires, au lieu d'être donnés explicitement, sont définis par des équations non résolues, les conditions d'intégrabilité prennent une forme remarquable dont nous aurons à faire d'importantes applications.

Soient d'abord deux équations

$$(20) \qquad F_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0,$$

$$(21) \qquad F_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0.$$

Cherchons la condition pour que les fonctions p_1 et p_2 que l'on en déduit soient

telles, que

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$$

soit une différentielle exacte.

On déduit de (20) et (21), en les différentiant par rapport à q_1 et à q_2,

$$(22)\qquad \frac{dF_1}{dq_1} + \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \frac{dF_1}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_1} = 0,$$

$$(23)\qquad \frac{dF_1}{dq_2} + \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_2} + \frac{dF_1}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_2} = 0,$$

$$(24)\qquad \frac{dF_2}{dq_1} + \frac{dF_2}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \frac{dF_2}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_1} = 0,$$

$$(25)\qquad \frac{dF_2}{dq_2} + \frac{dF_2}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_2} + \frac{dF_2}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_2} = 0,$$

(22) et (24) donnant la valeur de $\frac{dp_2}{dq_1}$, et (23) et (25) celle de $\frac{dp_1}{dq_2}$, et l'on a

$$\frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\frac{dF_1}{dq_1}\frac{dF_2}{dp_1} - \frac{dF_2}{dq_1}\frac{dF_1}{dp_1}}{\frac{dF_1}{dp_2}\frac{dF_2}{dp_1} - \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dF_2}{dp_2}},$$

$$\frac{dp_1}{dq_2} = -\frac{\frac{dF_1}{dq_2}\frac{dF_2}{dp_2} - \frac{dF_2}{dq_2}\frac{dF_1}{dp_2}}{\frac{dF_1}{dp_1}\frac{dF_2}{dp_2} - \frac{dF_1}{dp_2}\frac{dF_2}{dp_1}},$$

et la condition d'intégrabilité est par conséquent

$$(26)\qquad \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dF_2}{dq_1} - \frac{dF_1}{dq_1}\frac{dF_2}{dp_1} + \frac{dF_1}{dp_2}\frac{dF_2}{dq_2} - \frac{dF_1}{dq_2}\frac{dF_2}{dp_2} = 0.$$

570. Considérons le cas plus général où les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont définies par n équations qui les lient aux variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Soient

$$(27)\qquad \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

$$(28)\qquad \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

deux de ces équations.

La condition d'intégrabilité exige que l'on ait, quelles que soient d'ailleurs les $n-2$ équations adjointes à (27) et (28),

$$(29)\qquad \frac{d\varphi}{dp_1}\frac{d\psi}{dq_1} - \frac{d\varphi}{dq_1}\frac{d\psi}{dp_1} + \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{d\psi}{dq_2} - \frac{d\varphi}{dq_2}\frac{d\psi}{dp_2} + \cdots + \frac{d\varphi}{dp_n}\frac{d\psi}{dq_n} - \frac{d\varphi}{dq_n}\frac{d\psi}{dp_n} = 0.$$

En désignant en effet par i et k deux des indices $1, 2, 3, \ldots, n$, on trouve, en diffé-

rentiant l'équation (27) par rapport à q_i et l'équation (28) par rapport à q_k,

$$\frac{d\varphi}{dq_i} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_i} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{d\psi}{dq_k} + \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_k} = 0. \tag{31}$$

En multipliant l'équation (30) par $\frac{d\psi}{dp_i}$ et (31) par $\frac{d\varphi}{dp_k}$, et faisant la somme des résultats obtenus, en donnant à i dans le premier produit et à k dans le second les valeurs successives 1, 2, 3, ..., n, nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\psi}{dp_i}\frac{d\varphi}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\psi}{dp_i}\frac{d\varphi}{dq_i} = 0, \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{d\psi}{dq_k} = 0. \tag{33}$$

En retranchant ces équations l'une de l'autre et ayant égard aux conditions d'intégrabilité connues (568)

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i},$$

il reste

$$\sum \frac{d\varphi}{dp_k}\frac{d\psi}{dq_k} - \frac{d\varphi}{dq_k}\frac{d\psi}{dp_k} = 0, \tag{34}$$

ce qui est précisément l'équation (29).

Lorsque n équations sont données entre les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, l'application du résultat précédent à ces équations considérées deux à deux fournira des conditions en nombre égal à celui des conditions d'intégrabilité et qui peuvent les remplacer.

571. Dans les questions que nous venons de résoudre, les variables qui figurent dans la différentielle donnée sont supposées indépendantes. Dans un grand nombre de cas, on est conduit à considérer une expression de la forme

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

dans laquelle y et z sont des fonctions de x. L'expression peut être mise sous la forme $\varphi(x)\,dx$; elle est toujours intégrable, mais à la condition que y et z soient effectivement donnés en fonctions de x. Si l'on se borne à dire qu'ils en dépendent

sans dire suivant quelle loi, l'intégration ne peut s'effectuer que si les conditions d'intégrabilité trouvées (567) sont satisfaites.

572. On peut généraliser le problème et chercher la condition pour qu'une expression de la forme

$$\varphi(x, y, y')\,dx, \tag{35}$$

dans laquelle y désigne une fonction de x et y' la dérivée de y, soit intégrable sans qu'il soit nécessaire de particulariser la fonction y.

Soit $F(x, y)$ l'intégrale, on a

$$dF(x, y) = \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y'\right)dx.$$

Pour que cette différentielle soit égale à (35), indépendamment de toute hypothèse sur la forme de y, il faut que la fonction φ soit du premier degré en y'. En la représentant par

$$M + Ny',$$

on doit avoir

$$M = \frac{dF}{dx}, \quad N = \frac{dF}{dy},$$

et par conséquent F est l'intégrale de $M\,dx + N\,dy$ qui doit satisfaire à la condition d'intégrabilité trouvée (566)

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

573. Considérons l'expression plus générale

$$F[x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}]\,dx, \tag{36}$$

dans laquelle $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sont les dérivées successives de la fonction indéterminée y; cherchons la condition pour qu'elle puisse s'intégrer sans particulariser y. Soit

$$\int F[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}]\,dx = \psi[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}] + C.$$

On en déduit, en désignant par a et b deux limites quelconques,

$$\int_a^b F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx = \psi[b, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}] - \psi[a, y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}], \tag{37}$$

$y_a, y_b, y'_a, y'_b, \ldots$ étant les valeurs de $y, y', \ldots$ quand on attribue à x la valeur a ou la valeur b.

Dans le cas où la différentielle est intégrable indépendamment de toute hypothèse sur la forme de y, l'intégrale (37) dépend seulement, on le voit, des limites a et b et des valeurs de y et de ses $n-1$ premières dérivées correspondant à ces deux limites. Si donc on change la forme de y sans changer aucune de ces valeurs extrêmes, l'intégrale restera la même. Pour faire ce changement, remplaçons y par $y+\alpha z$, α étant une constante infiniment petite et z une fonction arbitraire assujettie à s'annuler ainsi que les $n-1$ premières dérivées pour les valeurs a et b de la variable x. D'après ce qu'on vient de dire, on aura alors

$$(38)\qquad \int_a^b \mathrm{F}[x, y+\alpha z, y'+\alpha z', \ldots, y^{(n)}+\alpha z^{(n)}]\,dx = \int_a^b \mathrm{F}[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx;$$

mais α étant infiniment petit, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}[x, y+\alpha z, y'+\alpha z', \ldots, y^{(n)}+\alpha z^{(n)}]\\ &\quad = \mathrm{F}[x, y, y', \ldots, y^{(n)}] + \alpha\left[\frac{d\mathrm{F}}{dy}z + \frac{d\mathrm{F}}{dy'}z' + \cdots + \frac{d\mathrm{F}}{dy^{(n)}}z^{(n)}\right],\end{aligned}$$

et l'équation (38) devient par conséquent

$$(39)\qquad \int_a^b dx\left[\frac{d\mathrm{F}}{dy}z + \frac{d\mathrm{F}}{dy'}z' + \cdots + \frac{d\mathrm{F}}{dy^{(n)}}z^{(n)}\right] = 0,$$

qui doit avoir lieu quelles que soient les fonctions z et y, sous la seule condition que z devienne nul aux limites ainsi que ses $n-1$ premières dérivées.

On a, en intégrant par parties et supprimant les termes qui sont nuls aux limites,

$$\int_a^b z'\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\,dx = -\int_a^b z\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\right)dx,$$

$$\int_a^b z''\frac{d\mathrm{F}}{dy''}\,dx = -\int_a^b z'\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy''}\right)dx = \int_a^b z\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy''}\right)dx,$$

$$\int_a^b z'''\frac{d\mathrm{F}}{dy'''}\,dx = -\int_a^b z''\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy'''}\right)dx = \int_a^b z'\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy'''}\right)dx = -\int_a^b z\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy'''}\right)dx,$$

. . . . . .

$$\int_a^b z^{(n)}\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(n)}}\,dx = (-1)^n\int_a^b z\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(n)}}\right]dx.$$

L'équation (39) devient par là

$$(40)\qquad \int_a^b z\,dx\left[\frac{d\mathrm{F}}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{d\mathrm{F}}{dy''} - \cdots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(n)}}\right] = 0.$$

Le facteur placé entre parenthèses étant indépendant de la fonction z, qui, entre les limites a et b, est entièrement arbitraire, l'équation (40) exige évidemment que l'on ait identiquement

$$(41)\qquad \frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{dF}{dy^{(n)}} = 0.$$

574. L'équation (41), nécessaire pour que la différentielle $F\,dx$ soit intégrable, est en même temps suffisante. Cette équation exprime en effet que l'intégrale ne change pas lorsque y reçoit un accroissement infiniment petit quelconque αz, qui laisse invariables ses valeurs extrêmes et celles de ses $n-1$ premières dérivées. Or un accroissement fini quelconque de y peut toujours être considéré comme la somme d'une série d'accroissements infiniment petits successifs, et si le changement produit par chacun d'eux est infiniment petit du second ordre, le changement total, égal à la limite de la somme des changements élémentaires, sera évidemment égal à zéro. On peut donc changer arbitrairement y; si l'on n'altère ni ses valeurs extrêmes ni celles de ses dérivées, l'intégrale ne changera pas, et elle ne dépend par conséquent que des deux limites et des valeurs correspondantes de y et de ses dérivées.

On a d'après cela, en prenant pour limites x_0 et x,

$$(42)\qquad \int_{x_0}^{x} F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx = \psi[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}],$$

ψ désignant une fonction déterminée des $2n+2$ quantités dont elle dépend. En différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (42), on en déduit

$$(43)\qquad F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}] = \frac{d\psi}{dx},$$

et il existe une fonction déterminée ψ dont la dérivée est égale à F indépendamment de toute hypothèse sur la forme de y. Il est clair d'ailleurs que $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, ne figurant pas dans le premier membre de (43), doivent, d'elles-mêmes, disparaître du second.

575. Lorsque la condition d'intégrabilité est satisfaite, on peut exprimer l'intégrale par une formule élégante qui est due à Poisson.

Considérons la fonction

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}].$$

Posons

$$\frac{dF}{dy} = N, \quad \frac{dF}{dy'} = N_1, \ldots, \quad \frac{dF}{dy^{(n)}} = N_n.$$

Dans l'intégrale

$$(44)\qquad \int F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx,$$

remplaçons y par uy, u étant indépendant de x, nous aurons

$$\int F[x, yu, y'u, \ldots, y^{(n)}u]\,dx.$$

Mais on a identiquement

$$F = \int_0^u \frac{dF}{du}\,du + F_0 = F_0 + \int_0^u du\,[Ny + N_1 y' + \ldots + N_n y^{(n)}],$$

F_0 désignant ce que devient la fonction F quand on y fait $u = 0$, c'est-à-dire

$$F(x, 0, 0, 0, \ldots, 0),$$

et yu étant toujours substitué à u dans les fonctions N, N_1, N_2, ..., l'intégrale cherchée devient d'après cela

$$(45)\qquad \int F[x, yu, y'u, \ldots, y^{(n)}u]\,dx$$
$$= \int F(x, 0, 0, 0, \ldots, 0)\,dx + \int dx \int_0^u du\,[Ny + N_1 y' + \ldots + N_n y^{(n)}].$$

Si l'on change l'ordre des intégrations, le second terme du second membre peut s'écrire

$$\int_0^u du \int dx\,[Ny + N_1 y' + \ldots + N_n y^{(n)}];$$

mais, en intégrant par parties, on a

$$\int N_1 y'\,dx = N_1 y - \int y \frac{dN_1}{dx}\,dx,$$
$$\int N_2 y''\,dx = N_2 y' - y\frac{dN_2}{dx} + \int y \frac{d^2N_2}{dx^2}\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, en substituant dans l'équation (45),

$$\int F[x, yu, \ldots, y^{(n)}u]\,dx$$
$$= \int F(x, 0, 0, 0, \ldots, 0)\,dx$$
$$+ \int_0^u du \left[y\left(N_1 - \frac{dN_2}{dx} + \frac{d^2N_3}{dx^2} - \cdots\right) + y'\left(N_2 - \frac{dN_3}{dx} + \cdots\right) + y''\left(N_3 - \frac{dN_4}{dx} + \cdots\right) + \cdots\right]$$
$$+ \int_0^u du \int y\left(N - \frac{dN_1}{dx} + \frac{d^2N_2}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^nN_n}{dx^n}\right) dx;$$

mais le dernier terme est nul en vertu de l'équation identique (41), qui subsiste quand on remplace y par yu, et il reste

$$\int F[x, yu, y'u, \ldots, y^{(n)}u]\,dx$$
$$= \int F(x, 0, 0, 0, \ldots)\,dx + \int_0^u du\left[y\left(N_1 - \frac{dN_2}{dx} + \frac{d^2N_3}{dx^2} - \cdots\right)\right.$$
$$\left. + y'\left(N_2 - \frac{dN_3}{dx} + \cdots\right) + y''\left(N_3 - \frac{dN_4}{dx} + \cdots\right) + \cdots\right],$$

et pour obtenir l'intégrale cherchée, il suffit de supposer $u = 1$, ce qui se fera dans le second membre, en remplaçant par l'unité la limite de l'intégrale par rapport à u qui y figure.

576. Les calculs nécessaires pour vérifier l'intégrabilité d'une fonction sont parfois pénibles et ne facilitent en rien l'intégration qu'il faut faire ensuite. Aussi trouve-t-on presque toujours avantage à employer une méthode théoriquement moins élégante, mais qui conduit à des calculs plus simples. C'est en intégrant l'expression donnée qu'on s'assure qu'elle est intégrable, et lorsqu'elle ne l'est pas, on en est presque toujours averti dès le début du calcul, qu'il est inutile de continuer.

Soit à intégrer

$$(46) \qquad F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx.$$

On remarquera d'abord que l'intégrale, si elle existe, étant de la forme

$$\psi[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}],$$

on doit avoir

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}] = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}y' + \frac{d\psi}{dy'}y'' + \cdots + \frac{d\psi}{dy^{(n-1)}}y^{(n)}.$$

Le second membre étant du premier degré par rapport à $y^{(n)}$, il doit en être de même du premier, et, si cette condition n'est pas remplie, il est inutile de tenter l'intégration.

Supposons donc que la fonction F soit de la forme

$$P + Qy^{(n)};$$

P et Q étant tous deux indépendants de $y^{(n)}$, on doit avoir

$$Q = \frac{d\psi}{dy^{(n-1)}},$$

et par conséquent

$$(47) \qquad \psi = \int Q\,dy^{(n-1)} + G,$$

G étant indépendant de $y^{(n-1)}$. Soit

$$f[x, y, y', \ldots y^{(n-1)}],$$

l'intégrale effectuée $\int Q dy^{(n-1)}$, on devra avoir

$$P + Qy^{(n)} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' + \ldots + \frac{df}{dy^{(n-1)}} y^{(n)} + \left(\frac{dG}{dx}\right).$$

En supprimant les termes $Qy^{(n)}$ et $\frac{df}{dy^{(n-1)}} y^{(n)}$ qui se détruisent, on déduit de là

$$(48) \qquad \left(\frac{dG}{dx}\right) = P - \frac{df}{dx} - \frac{df}{dy} y' - \ldots - \frac{df}{dy^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

et cette équation ramène la détermination de G à l'intégration d'une fonction différentielle d'ordre $n - 1$ seulement. Cette fonction doit évidemment être du premier degré en $y^{(n-1)}$; si cette condition n'est pas remplie, le problème est impossible, et il est inutile de continuer les opérations; si elle l'est, on opère pour l'expression de $\frac{dG}{dx}$, comme on l'a fait pour la fonction F, en ramenant le problème à l'intégration d'une fonction différentielle d'ordre $n - 2$, et ainsi de suite.

577. Considérons, par exemple, l'expression

$$(49) \qquad y + (x + 2y)y' + y'^2 + 2y'xy'';$$

on a d'abord

$$\int 2y' x dy' = xy'^2 + G,$$

G ne devant contenir que x et y, et l'équation (48) devient dans ce cas

$$\left(\frac{dG}{dx}\right) = y + (x + 2y)y' + y'^2 - y'^2 = y + (x + 2y)y'.$$

Cette expression étant de premier degré en y', il y a lieu de chercher si elle est intégrable; pour cela, intégrons $(x + 2y)$ par rapport à y, nous aurons

$$G = \int (x + 2y) dy = xy + y^2 + G_1;$$

G_1 étant fonction de x seulement, égalant à dG la différentielle du second membre, on trouve

$$dG_1 = 0,$$

et l'intégrale de (49) est par conséquent

$$xy'^2 + xy + y^2.$$

Soit encore

$$(50)\qquad F(x, y, y', y'') = \frac{yy' + x}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} y''.$$

Le coefficient de y'' est ici $\frac{yy' + x}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, et son intégrale par rapport à y'

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

C'est à cette expression qu'il faut ajouter, pour résoudre le problème s'il est possible, une fonction G de x et de y; mais, en posant

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{yy' + x} y'' dx = \frac{d(xy' - y)}{\sqrt{1 + y'^2}} + dG,$$

on trouve $dG = 0$, et l'intégrale cherchée est

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

578. Quoique l'intégrabilité de la fonction

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$$

soit exprimée par la seule équation

$$(51)\qquad \frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{dF}{dy^{(n)}},$$

le nombre des conditions nécessaires est en réalité beaucoup plus grand et l'équation (51) peut se décomposer en plusieurs autres, qui sont toutes nécessaires. Supposons, par exemple, $n = 2$, l'équation devient

$$(52)\qquad \frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy''}.$$

Si la dérivée $\frac{dF}{dy''}$ contenait y'', $\frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy''}$ contiendrait un terme en y^{IV} qui, ne pouvant se réduire avec aucun autre, rendrait la condition impossible. Posons donc

$$F = P + Qy'',$$

P et Q ne contenant que x, y, y'. Si nous développons les divers termes de (52),

nous aurons

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dP}{dy} + y''\frac{dQ}{dy},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dy'} + y''\frac{dQ}{dy'}\right)$$

$$= \frac{d^2P}{dx\,dy'} + y'\frac{d^2P}{dy\,dy'} + y''\frac{d^2P}{dy'^2} + y'''\frac{dQ}{dy'} + y''\frac{d^2Q}{dy'\,dx} + y''y'\frac{d^2Q}{dy'\,dy} + y''^2\frac{d^2Q}{dy'^2},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy''} = \frac{d^2}{dx^2}(Q) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy}y' + \frac{dQ}{dy'}y''\right)$$

$$= \frac{d^2Q}{dx^2} + 2y'\frac{d^2Q}{dy\,dx} + 2y''\frac{d^2Q}{dx\,dy'} + y'^2\frac{d^2Q^2}{dy^2} + 2y'y''\frac{d^2Q}{dy\,dy'} + \frac{d^2Q}{dy'^2}y''^2 + \frac{dQ}{dy'}y''',$$

et, comme les fonctions P et Q ne contiennent ni y'', ni y''', on devra égaler à zéro le coefficient de y''', qui se trouve identiquement nul, celui de y''^2, celui de y'' et le terme indépendant de y''.

579. Joachimstahl a fait une étude détaillée et intéressante de cette décomposition de l'équation (51) dans le cas le plus général.

Il fait voir d'abord que la fonction considérée F étant, comme il est évidemment nécessaire, de la forme

$$F = P + Qy^{(n)}, \tag{53}$$

le premier membre de l'équation (51) ne contient pas la dérivée d'ordre $2n-1$, $y^{(2n-1)}$.

Que l'on pose, en effet,

$$\frac{dF}{dy^{(n)}} = l;$$

$$\frac{dF}{dy^{(n-1)}} - \left(\frac{dl}{dx}\right) = l_1,$$

$$\frac{dF}{dy^{(n-2)}} - \left(\frac{dl_1}{dx}\right) = l_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dF}{dy} - \left(\frac{dl_{n-1}}{dx}\right) = l_n,$$

on aura évidemment

$$l_2 = \frac{dF}{dy^{(n-2)}} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy^{(n-1)}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy^{(n)}},$$

$$l_3 = \frac{dF}{dy^{(n-3)}} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy^{(n-2)}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy^{(n-1)}} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{dF}{dy^{(n)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$l_n = \frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dF}{dy''} - \dots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{dF}{dy^{(n)}},$$

et $l_n = 0$ est par conséquent la condition d'intégrabilité (51). Or on a, d'après l'équation (53),

$$l = Q,$$

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{d}{dy^{n-1}}[P + Qy^{(n)}] - \left(\frac{dQ}{dx}\right) \\ &= \frac{dP}{dy^{(n-1)}} + \frac{dQ}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} - \frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dy}y' - \frac{dQ}{dy}y'' - \ldots - \frac{dQ}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} \\ &= \frac{dP}{dy^{(n-1)}} - \frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dy}y' - \frac{dQ}{dy}y'' - \ldots - \frac{dQ}{dy^{(n-3)}}y^{(n-2)} - \frac{dQ}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}. \end{aligned}$$

$y^{(n)}$ ne figure donc pas dans l_1, et par suite $y^{(n+1)}$ ne figure pas dans l_2, ni $y^{(n+2)}$ dans $l_3, \ldots$, ni $y^{(2n-1)}$ dans l_n.

On voit d'ailleurs aisément que $l_2, l_3, \ldots, l_n$ sont respectivement de la forme suivante :

$$\begin{aligned} l_2 &= a^{(n-2)} + b^{(n-2)}y^{(n)}, \\ l_3 &= a^{(n-3)} + b^{(n-3)}y^{(n)} + b_1^{(n-3)}y^{(n+1)} + t^{(n-3)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{n-2} &= a'' + b''y^{(n)} + b''_1y^{(n+1)} + b''_2y^{(n+2)} + \ldots + b''_{n-4}y^{(2n-4)} + t'', \\ l_{n-1} &= a' + b'y^{(n)} + b'_1y^{(n+1)} + \ldots + b'_{n-4}y^{(2n-4)} + b'_{n-3}y^{(2n-3)} + t', \\ l_n &= a + by^{(n)} + b_1y^{(n+1)} + b_2y^{(n+2)} + \ldots + b_{n-3}y^{(2n-3)} + b_{n-2}y^{(2n-2)} + t, \end{aligned}$$

où les coefficients désignés par les lettres a et b contiennent y et ses $n-1$ premières dérivées, et les termes $t, t', t'', \ldots$ les produits ou les puissances des dérivées d'ordre supérieur à $n-1$.

De l'équation

$$l_n = \frac{d[P + Qy^{(n)}]}{dy} - \left(\frac{dl_{n-1}}{dx}\right),$$

qui définit l_n, on déduit

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} b_1 &= -b' - \frac{db'_1}{dx} - \frac{db'_1}{dy}y' - \frac{db'_1}{dy'}y'' - \ldots - \frac{db'_1}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \\ b_2 &= -b'_1 - \frac{db'_2}{dx} - \frac{db'_2}{dy}y' - \frac{db'_2}{dy'}y'' - \ldots - \frac{db'_2}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{n-3} &= -b'_{n-4} - \frac{db'_{n-3}}{dx} - \frac{db'_{n-3}}{dy}y' - \ldots - \frac{db'_{n-3}}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \\ b_{n-2} &= -b'_{n-3}. \end{aligned}\right.$$

Si donc $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ sont identiquement nuls, comme l'exige la condition $l_n = 0$, il en sera de même de $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-3}$, comme on s'en assurera en consi-

dérant successivement les équations (54) à partir de la dernière. On verra de même, en écrivant les équations qui lient les coefficients de l_{n-1} à ceux de l_{n-2}, ceux de l_{n-2} à ceux de l_{n-3}, etc., que l'on doit avoir

$$\begin{array}{llll} b''_{n-4}=0, & b''_{n-5}=0,\ldots, & b''_1=0, & b''=0, \\ & b'''_{n-5}=0,\ldots, & b'''_2=0, & b'''_1=0, \quad b'''=0, \\ & & \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ & & b_2^{(n-4)}=0, & b_1^{(n-3)}=0, \\ & & & b^{(n-2)}=0. \end{array}$$

Quant aux expressions désignées par $t^{(n-3)}$, $t^{(n-2)}$,..., t', t, il est aisé de voir que les coefficients des produits de dérivées qui y figurent sont les dérivées partielles des coefficients désignés par la lettre b.

On a, par exemple,

$$t^{(n-3)}=-y^{(n)}\frac{db^{(n-2)}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)},$$

$$t^{(n-2)}=-y^{(n)}\left[\frac{db^{(n-2)}}{dy^{(n-1)}}y^{(n)}+\frac{db_1^{(n-3)}}{dy^{(n-1)}}y^{(n+1)}\right]-\frac{dt^{(n-3)}}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$t=-y^{(n)}\left[\frac{db'}{dy^{(n-1)}}y^{(n)}+\frac{db'}{dy^{(n-1)}}y^{(n+1)}+\ldots+\frac{db'^{(n-3)}}{dy^{(n-1)}}y^{(2n-3)}\right]-\frac{dt'}{dx}.$$

Les diverses expressions s'annulent, par conséquent, en même temps que les coefficients désignés par b, et, pour que l'équation soit satisfaite, il suffit par conséquent d'écrire

$$a=0,\quad b=0,\quad b_1=0,\ldots,\quad b_{n-2}=0.$$

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES RELATIFS A L'ADDITION DES INTÉGRALES.

Remarque relative à la théorie des sinus.

580. Considérons la fonction u définie par l'équation

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

équivalente évidemment à

$$u = \operatorname{arc}\sin x,$$
$$x = \sin u.$$

En adoptant l'équation (1) comme définition de $\sin u$, on peut en déduire aisément la propriété fondamentale qui exprime le sinus de la somme des deux arcs.

Pour exprimer, en effet, que la somme de deux arcs dont les sinus sont x et y est constante, il faut écrire

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0; \tag{2}$$

on en déduit

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0, \tag{3}$$

et, en intégrant par parties,

$$x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}\,dy + y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{const.}, \tag{4}$$

c'est-à-dire, en ayant égard à l'équation (3),

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const.}$$

Si donc on nomme u et v les arcs dont x et y sont les sinus et α leur somme supposée constante, l'équation

$$u+v=\alpha \tag{5}$$

équivaut à

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const.}, \tag{6}$$

c'est-à-dire à

$$\sin u\sqrt{1-\sin^2 v}+\sin v\sqrt{1-\sin^2 u}=\text{const.} \tag{7}$$

Mais en faisant $v=0$, l'équation (5) donne $u=\alpha$, et cette double hypothèse introduite dans l'équation (7) montre que la constante qui forme le second membre est égale à $\sin\alpha$, c'est-à-dire à $\sin(u+v)$, et l'on a enfin

$$\sin(u+v)=\sin u\sqrt{1-\sin^2 v}+\sin v\sqrt{1-\sin^2 u}.$$

Étude de l'équation $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0.$

581. On peut pressentir, d'après ce qui précède, l'importance attachée par les géomètres à l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0, \tag{8}$$

qui conduit à la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques, de la même manière absolument que l'intégration de l'équation (2) peut conduire à la formule fondamentale de la trigonométrie.

Fagnano a remarqué que de la relation

$$x=\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$$

on déduit

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}},$$

et l'on a ainsi une solution de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0. \tag{9}$$

Euler fut naturellement conduit à se demander s'il en existe d'autres; la solution évidente $x = -y$ se présente tout d'abord; mais la plus générale doit contenir une constante arbitraire, si l'on pose en effet

$$(10) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = F(x).$$

L'équation (9) exprime que la somme $F(x) + F(y)$ est égale à une constante indéterminée qui doit figurer évidemment dans l'équation équivalente qui lie x à y. Après quelques tâtonnements et en essayant de généraliser les solutions connues, Euler a obtenu la relation suivante

$$(11) \qquad x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 - 2xy\sqrt{1-c^4},$$

qui entraîne, quelle que soit la constante c, la relation (9). La vérification est facile et n'offrirait aujourd'hui aucun intérêt.

Euler, par une devination plus remarquable encore, a trouvé la relation algébrique équivalente à l'équation plus générale

$$(12) \qquad \frac{dx}{\sqrt{m + nx^2 + px^4}} + \frac{dy}{\sqrt{m + ny^2 + py^4}} = 0,$$

à laquelle on peut ramener, par les transformations indiquées (67), la relation plus composée

$$(13) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}} = 0.$$

Un grand nombre de méthodes ont été proposées depuis pour atteindre le même but, et l'importance du sujet nous engage à indiquer quelques-unes des plus importantes.

Méthode de Lagrange.

582. Pour intégrer l'équation

$$(13) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}} = 0,$$

représentons, pour abréger, les deux radicaux qui y figurent par $\sqrt{X}$ et $\sqrt{Y}$, et posons

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X},$$

d'où résulte

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{Y}.$$

En élevant les deux nombres au carré, prenant les dérivées par rapport à t et supprimant dans la première équation le facteur commun $\frac{dx}{dt}$, et dans la seconde $\frac{dy}{dt}$, on trouve

$$(14) \qquad 2\frac{d^2x}{dt^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3,$$

$$(15) \qquad 2\frac{d^2y}{dt^2} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3.$$

Posons

$$x + y = p,$$
$$x - y = q,$$

les équations (14) et (15) donneront, par addition et par soustraction,

$$(16) \qquad \frac{d^2p}{dt^2} = B + Cp + \frac{3D}{4}(p^2 + q^2) + \frac{E}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

$$(17) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = Cq + \frac{3D}{2}pq + \frac{E}{2}(3p^2q + q^3),$$

et, comme

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = Bq + Cpq + \frac{D}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{E}{2}(p^3q + pq^3),$$

on en conclut

$$q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = \frac{D}{2}q^3 + Epq^3.$$

Les deux membres étant multipliés par $\frac{2\frac{dp}{dt}}{q^3}$, cette équation peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}(Dp + Ep^2),$$

et par conséquent

$$\frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{q^2} = Dp + Ep^2 + a,$$

où a est une constante arbitraire. On en déduit

$$\frac{dp}{dt} = q\sqrt{Dp + Ep^2 + a}.$$

Substituant à $\frac{dp}{dt}$ sa valeur $\sqrt{X} - \sqrt{Y}$, et à p et q $x+y$ et $x-y$, on a enfin

$$(18) \qquad \sqrt{X} - \sqrt{Y} = (x-y)\sqrt{a + D(x+y) + E(x+y)^2},$$

qui est l'intégrale cherchée.

Méthode de M. Darboux.

583. Parmi les nombreuses méthodes proposées pour intégrer l'équation d'Euler, équivalente au fond à celle de Lagrange, l'une des plus élégantes est celle de M. Darboux.

Considérons l'équation

$$(19) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Posons

$$(20) \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

et par conséquent

$$(21) \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.$$

En élevant chacune de ces équations au carré et prenant la dérivée par rapport à t, on trouvera, comme dans la méthode de Lagrange,

$$(22) \qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -(1+k^2)y + 2k^2y^3, \end{cases}$$

et, par la combinaison de ces équations,

$$(23) \qquad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2xy(x^2-y^2).$$

Mais les équations (20) et (21) donnent

$$(24) \qquad y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2),$$

et, en combinant les équations (23) et (24), on a

$$(25)\qquad \frac{y\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2y}{dt^2}}{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}} = -\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dy}{dt}\right)}{1 - k^2x^2y^2}.$$

Les intégrales des deux membres s'aperçoivent immédiatement, et l'on trouve en les égalant

$$(26)\qquad l\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = lC(1 - k^2x^2y^2),$$

C désignant une constante arbitraire. L'équation (26) peut s'écrire

$$\frac{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}}{1 - k^2x^2y^2} = C,$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs,

$$(27)\qquad \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1 - k^2x^2y^2} = C,$$

relation algébrique entre x et y équivalente à l'équation (19).

Représentation géométrique de l'intégrale.

584. Reprenons l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

Posons $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, nous aurons

$$d\varphi = \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d\psi = \pm\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

et l'équation devient

$$(28)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \pm \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

le signe + correspondant au cas où les angles φ et ψ ont leurs cosinus de même signe et le signe — au cas où les cosinus sont de signes différents. Adoptons la

première hypothèse et supposons les angles φ et ψ aigus; pour intégrer l'équation

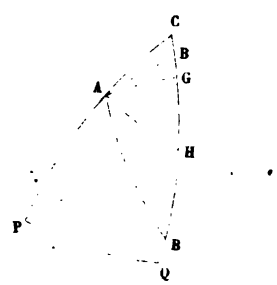
$$(29)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=0,$$

c'est-à-dire pour obtenir sous forme finie la relation équivalente entre φ et ψ, considérons un triangle sphérique CAB dont les côtés CA et CB représentent les angles φ et ψ, supposés l'un et l'autre moindres qu'un quadrant. Nommons μ le troisième côté AB; si ce côté reste constant, ainsi que l'angle opposé C, et si l'on a en outre

$$(30)\qquad \frac{\sin^2 C}{\sin^2\mu}=k^2,$$

les arcs φ et ψ, dont l'un reste indéterminé, seront liés, nous allons le prouver, par l'équation (29). Commençons par chercher quelles conditions sont imposées, par nos hypothèses, aux angles du triangle ABC; nous reconnaîtrons aisément que l'un de ces angles doit être obtus et les deux autres aigus.

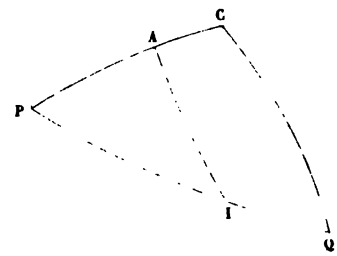
Supposons en effet que l'angle C soit aigu, soit PQ l'arc de grand cercle décrit du point C comme pôle entre les côtés de l'angle C; on a, comme on sait, PQ = C,



et par conséquent k^2 étant moindre que l'unité, $\sin\mu$ doit être plus grand que $\sin PQ$. Donnons-nous la position du sommet A et menons deux arcs de grand cercle AG et AH, le premier perpendiculaire à CQ, le second à CP; tous deux évidemment seront moindres que PQ, qui mesure la plus grande distance des arcs CP et CQ; on devra donc, pour que AB soit plus grand que PQ, s'interdire de placer le sommet B entre les points G et H. S'il est entre C et G, l'angle A sera aigu et l'angle B obtus, et s'il est entre H et G, l'angle A, au contraire, sera obtus et l'angle B aigu. Le triangle aura donc, dans les deux cas, un angle obtus et deux angles aigus.

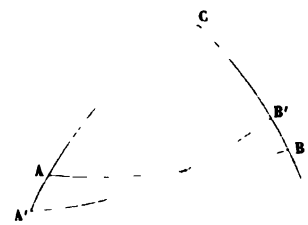
Supposons, en second lieu, que l'angle C soit obtus, et soit encore PQ l'arc de grand cercle décrit du sommet C pour pôle entre les côtés de l'angle C. Quelle que soit sur CP la position du sommet A, les arcs qui le joindront aux divers points

de CQ formeront avec AC des angles aigus, car le grand cercle perpendiculaire va rencontrer PQ en un point I tel, que PI soit égal à un quadrant, et compris par



conséquent entre P et Q. L'angle A est donc nécessairement aigu; il en est de même de l'angle B, et le triangle a encore un angle obtus et deux angles aigus.

Cela posé, supposons que l'angle obtus soit C, et soient A'B' et AB deux posi-



tions infiniment voisines du côté μ. La condition $A'B' = AB$ donne (I, 554)

$$AA' \cos A = BB' \cos B;$$

mais

$$AA' = d\varphi, \quad BB' = -d\psi,$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \quad \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

par conséquent

$$d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} + d\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = 0.$$

C'est précisément l'équation (29).

On en conclut

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \text{const.}$$

La constante est évidemment ce que devient l'une des deux intégrales lorsque

l'autre est égale à zéro. Mais pour $\varphi = 0$, on a $\psi = \mu$; par conséquent

$$(31) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\mu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

les trois limites φ, ψ, μ étant liées par l'équation

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos C,$$

et comme l'angle C est obtus, on a

$$\cos C = -\sqrt{1 - \sin^2 C} = -\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu},$$

et par conséquent

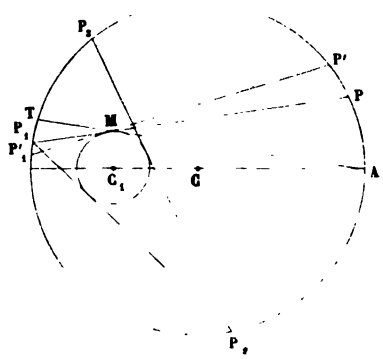
$$(32) \qquad \cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu},$$

et cette relation entre φ, ψ et μ équivaut à l'équation (31).

Autre interprétation géométrique.

585. Jacobi a substitué au triangle sphérique proposé par Lagrange une construction non moins simple qui n'est pas sujette aux mêmes restrictions

Considérons deux cercles dont les centres sont C et C_1, et dont le premier, de



rayon R, contient l'autre dont le rayon est r. Soient AA' le diamètre commun et PP_1 une corde du cercle C tangente au cercle C_1; posons

$$\frac{AP}{R} = 2\varphi,$$

$$\frac{AP_1}{R} = 2\psi.$$

Si la corde PP_1 se déplace, en restant toujours tangente au cercle C_1, on aura, en désignant par k une constante dont la valeur dépend des éléments de la figure,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Soit en effet $P'P'_1$ une tangente infiniment voisine de PP_1, on a évidemment

$$\frac{P_1P'_1}{PP'}=\frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Mais en nommant I le point d'intersection des droites PP_1, $P'P'_1$, on a, en considérant $P_1P'_1$ et PP' comme de petites lignes droites,

$$\frac{P_1P'_1}{PP'}=\frac{P_1I}{IP'},$$

et, comme le point I se confond à la limite avec le point de contact M de la tangente PP_1,

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{MP_1}{MP};$$

mais on a

$$MP_1=\sqrt{\overline{C_1P_1}^2-r^2},$$
$$MP=\sqrt{\overline{C_1P}^2-r^2}.$$

D'ailleurs, en désignant la distance CC_1 par a,

$$\overline{C_1P_1}^2=R^2+a^2+2aR\cos2\psi=(R+a)^2-4aR\sin^2\psi,$$
$$\overline{C_1P}^2=R^2+a^2+2aR\cos2\varphi=(R+a)^2-4aR\sin^2\varphi,$$

et par conséquent

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2-4aR\sin^2\psi}}{\sqrt{(R+a)^2-r^2-4aR\sin^2\varphi}},$$

et en posant

$$\frac{4aR}{(a+R)^2-r^2}=k^2,$$

33) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=0.$$

Si l'on pose

(34) $$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=u,\\ \displaystyle\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=v,\end{cases}$$

la différence des deux intégrales u et v sera constante, quelle que soit la tangente PP_1. Cette différence constante est évidemment la valeur que prend la seconde lorsque la première est égale à zéro, c'est-à-dire, en nommant 2α l'angle correspondant à l'arc AT détaché sur le grand cercle par la tangente au petit cercle issue du point A, à

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si du point P_1 on mène au cercle C une seconde tangente P_1P_2, puis de P_2 une troisième tangente P_2P_3, et ainsi de suite, en nommant $2\psi_1$, $2\psi_2$,... les angles correspondants aux arcs AP_2, AP_3,..., il résulte du théorème précédent que les intégrales

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int_0^{\psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ldots$$

formant une progression arithmétique dont la raison est

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Pour que le polygone $PP_1P_2P_3$... se ferme, et que le $(n+1)^{ième}$ sommet coïncide avec le premier, il faut et il suffit que l'angle $2\psi_n$ soit égal à 2φ augmenté d'un multiple de 2π, et que l'on ait par conséquent

$$(35)\qquad \int_0^{\varphi+m\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = n\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

c'est-à-dire

$$(36)\qquad \int_\varphi^{\varphi+m\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = n\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Le premier membre, à cause de la périodicité du sinus, est évidemment indépendant de φ. Si donc l'équation (36) est satisfaite pour une position du point P, elle le sera pour toutes les autres, et nous avons la démonstration d'un beau théorème dû à Poncelet :

Si deux cercles sont tels qu'il existe un polygone de n côtés inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre, il en existe toujours une infinité.

Théorème d'Abel.

586. Le beau théorème d'Euler, généralisation d'un résultat obtenu par Fagnano, n'est lui-même qu'un cas particulier d'un autre théorème dû à Abel et dont nous ferons connaître ici un cas fort étendu, susceptible cependant encore de nombreuses et importantes généralisations.

Posons, pour abréger,

$$\Delta x = \sqrt{m + nx^2 + px^4}.$$

Nommons $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières de x, l'une paire et l'autre impaire, dont les coefficients soient supposés variables.

Si l'on décompose la fonction

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2 - x_1^2$, en posant

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2 = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_\mu)^2,$$

où A est indépendant de x, et posant

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x},$$

on aura

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu) = C, \tag{37}$$

C étant une constante indépendante des coefficients des deux fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$.

En désignant par x l'une quelconque des racines $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, on a en effet

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2 = 0, \tag{38}$$

et par conséquent

$$f(x) + \varphi(x)\Delta x = 0, \tag{39}$$

où le radical Δx doit recevoir un signe déterminé par ceux de $f(x)$ et de $\varphi(x)$. Posons

$$\psi(x) = f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2,$$

x désignant l'une quelconque des racines $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. En nommant δx le changement infiniment petit que subit la racine x lorsque les coefficients de $\varphi(x)$ et

ceux de $f(x)$ varient infiniment peu, et $\psi'(x)$ étant la dérivée de $\psi(x)$ par rapport à x seul, on aura

$$\psi'(x)\delta x + 2f(x)\delta f(x) - 2\varphi(x)\delta\varphi(x)(\Delta x)^2 = 0. \tag{40}$$

Il est clair en effet que $\psi(x)$ devant conserver la valeur zéro, sa variation est nulle; or elle se compose de la différentielle $\psi'(x)\,\delta x$ correspondant au seul accroissement de x, les coefficients restant les mêmes, et de la variation due au changement des coefficients qui forme les deux derniers termes de (40).

L'équation (39) donne

$$f(x) = -\varphi(x)\Delta x;$$

par conséquent

$$\varphi(x)(\Delta x)^2 = -f(x)\Delta x,$$

et l'équation (40) devient

$$\psi'(x)\delta x = 2\Delta x[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)].$$

On en conclut

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]}{\psi'(x)}. \tag{41}$$

Attribuons successivement à x les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ et ajoutons les équations qui correspondent à ces diverses hypothèses. En posant

$$\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x) = \theta(x),$$

nous aurons

$$\frac{\delta x_1}{\Delta x_1} + \frac{\delta x_2}{\Delta x_2} + \cdots + \frac{\delta x_\mu}{\Delta x_\mu} = 2\left[\frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\theta(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\theta(x_\mu)}{\psi'(x_\mu)}\right].$$

Mais $\theta(x)$ étant une fonction entière de x de degré inférieur à celui de $\psi'(x)$, le second membre, en vertu d'un théorème très-connu d'algèbre est égal à zéro, et l'on a

$$\frac{\delta x_1}{\Delta x_1} + \frac{\delta x_2}{\Delta x_2} + \cdots + \frac{\delta x_\mu}{\Delta x_\mu} = 0. \tag{42}$$

Si les coefficients de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ variant d'une manière continue, les racines $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ deviennent $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\mu$, on aura, en intégrant l'équation (42),

$$\int_{x_1}^{x'_1} \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \int_{x_2}^{x'_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \cdots + \int_{x_\mu}^{x'_\mu} \frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = 0, \tag{43}$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = F(x),$$

$$(44) \qquad F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu) = F(x'_1) + F(x'_2) + \ldots + F(x'_\mu),$$

et la somme $F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu)$ conserve constamment la même valeur.

587. Le théorème précédent, à cause du choix arbitraire des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, comprend un grand nombre de résultats particuliers. On peut se donner arbitrairement les racines $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$, et déterminer x_μ en fonction algébrique de ces quantités arbitraires, de telle sorte que les deux membres de l'équation (44) soient égaux à zéro.

Posons en effet

$$(45) \qquad f(x^2) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n},$$

$$(46) \qquad \varphi(x) = x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-4}),$$

on peut se donner arbitrairement les racines $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ et en déduire a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$, b_0, $b_1, \ldots, b_{n-2}$, à l'aide des équations

$$(47) \qquad \begin{cases} f(x_1) + \varphi(x_1)\Delta x_1 = 0, \\ f(x_2) + \varphi(x_2)\Delta x_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(x_{2n-1}) + \varphi(x_{2n-1})\Delta x_{2n-1} = 0, \end{cases}$$

où les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ seront pris avec les signes que l'on voudra choisir. Ces équations du premier degré par rapport aux inconnues étant résolues, les coefficients de l'équation (38) seront tous connus, et le produit des racines étant égal au dernier terme, on déterminera la dernière racine x_{2n} par l'équation

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_{2n-1}^2 x_{2n}^2 = a_0^2,$$

qui donne

$$x_{2n} = \frac{\pm a_0}{x_1 x_2 \ldots x_{2n-1}}.$$

On choisira le signe arbitrairement, et la valeur correspondante de Δx_{2n} satisfaisant à l'équation

$$f(x_{2n}) + \varphi(x_{2n})(\Delta x_{2n}) = 0,$$

et l'on aura

$$(48) \qquad \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \cdots + \frac{dx_{n-1}}{\Delta x_{2n-1}} = \frac{dx_{2n}}{\Delta x_{2n}},$$

x_{2n} étant une fonction connue des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$.

x_{2n} est nul, il est aisé de le voir, quand on suppose en même temps $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_{2n-1} = 0$. Pour que l'équation (38) admette en effet $2n - 1$ racines nulles, il suffit d'y faire $a_0 = 0$, $a_1 = 0, \ldots, a_{2n-1} = 0$, $b_0 = 0, \ldots, b_{n-2} = 0$, ce qui la réduit à

$$x^{4n} = 0,$$

dont toutes les racines sont nulles. En intégrant l'équation (48) on peut, d'après cela, faire commencer toutes les intégrales à la limite inférieure zéro, et l'on trouve

$$(49) \qquad F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_{2n-1}) = F(x_{2n}).$$

588. Pour obtenir une équation semblable dans laquelle les termes du premier membre, toujours arbitrairement choisis, soient en nombre pair, il suffira de poser

$$f(x) = (a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n})\, x,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-2},$$

et si l'on pose

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_{2n}^2)(x^2 - x_{2n+1}^2),$$

on pourra se donner arbitrairement $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ et déterminer $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ par des équations du premier degré de la forme

$$f(x_i) + \varphi(x_i)\Delta x_i = 0,$$

où le signe du radical Δx_i sera choisi arbitrairement; x_{2n+1} étant alors déterminé par l'équation

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_{2n}^2 x_{2n+1}^2 = b_0^2,$$

on aura

$$x_{2n+1} = \frac{\pm b_0}{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}.$$

On prendra le signe pour lequel l'équation

$$f(x_{2n+1}) + \varphi(x_{2n+1})\Delta x_{2n+1} = 0$$

donne pour Δx_{2n+1} une valeur négative, et l'on aura

$$\frac{dx_1}{\Delta x_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \cdots + \frac{dx_{2n}}{\Delta x_{2n}} = \frac{dx_{2n+1}}{\Delta x_{2n+1}},$$

où x_{2n+1} est une fonction connue des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. On verra, comme dans le cas précédent, qu'en faisant $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_{2n} = 0$, il en résulte $x_{2n+1} = 0$, et que l'on a par conséquent

$$(50) \qquad F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_{2n}) = F(x_{2n+1}).$$

589. L'équation

$$(51)\qquad F(x_1)+F(x_2)+\ldots+F(x_{\mu-1})=F(x_\mu),$$

dans laquelle x_μ est une fonction déterminée de $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$, équivaut au fond à l'équation d'Euler relative au cas où le premier membre se réduit à deux termes. Si l'on sait en effet résoudre l'équation

$$F(x_1)+F(x_2)=F(x),$$

et calculer x en fonction de x_1 et de x_2, on pourra évidemment, par l'application répétée de la formule, former la fonction égale à la somme de trois fonctions données, puis de quatre, puis d'un nombre quelconque, et comme le problème est évidemment déterminé, les résultats obtenus par des méthodes différentes ne peuvent différer que par la forme.

Réciproquement, l'équation (51), quel que soit le nombre des termes du premier membre, peut fournir la formule relative à l'addition de deux fonctions seulement, et il suffit pour cela d'y supposer $x_3=0$, $x_4=0, \ldots, x_{\mu-1}=0$: le premier membre se réduit alors à ses deux premiers termes, et la formule fait connaître la fonction égale à la somme des deux autres.

590. Supposons dans les formules précédentes

$$f(x)=a_0x+x^3,$$
$$\varphi(x)=b_0,$$

on aura, pour déterminer a_0 et b_0,

$$a_0x_1+x_1^3+b_0\Delta x_1=0,$$
$$a_0x_2+x_2^3+b_0\Delta x_2=0.$$

On en déduit

$$a_0=\frac{x_2^3\Delta x_1-x_1^3\Delta x_2}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1},$$

$$b_0=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1},$$

et la troisième racine x_3 est

$$x_3=\frac{b_0}{x_1x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1},$$

c'est-à-dire, en multipliant les deux termes de la fraction par $x_1\Delta x_2+x_2\Delta x_1$, et supprimant le facteur $x_1^2-x_2^2$,

$$x_3=\frac{x_1\Delta x_2+x_2\Delta x_1}{1-k^2x_1^2x_2^2},$$

et sous cette condition on a

$$\frac{dx_1}{\Delta x_1} + \frac{dx_2}{\Delta x_2} = \frac{dx_3}{\Delta x_3},$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (583).

Théorème de M. Clebsch.

591. M. Clebsch, dont les beaux travaux sur cette théorie se sont étendus beaucoup plus loin, a donné au théorème d'Abel une forme géométrique très-élégante.

Considérons la courbe dont l'équation est

$$(52) \qquad y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

et cherchons l'intersection de cette courbe avec une autre courbe quelconque ayant pour équation

$$(53) \qquad f(x, y) = 0,$$

on pourra, par le moyen de l'équation (52), éliminer de (53) toutes les puissances de y supérieures à la première, et l'ordonnée de l'un quelconque des points d'intersection sera exprimée par une fonction rationnelle de l'abscisse

$$y = \frac{P}{Q},$$

l'équation qui donnera les abscisses des points d'intersection est par conséquent

$$(54) \qquad \varphi(x) = P^2 - Q^2(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = 0.$$

Supposons que dans cette équation on fasse varier d'une manière quelconque les coefficients de l'équation (53), les racines de (54) varieront, et si les variations considérées sont infiniment petites, on aura pour chaque racine

$$(55) \qquad \varphi'(x)\,dx + 2P\,\delta P - 2Q\,\delta Q\,(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = 0,$$

le signe δ se rapportant à la variation subie par les polynômes P et Q lorsque leurs coefficients changent infiniment peu. On déduit de (55), en multipliant par $\frac{Q}{P\varphi'(x)}$ et tenant compte de l'équation (54) qui a lieu pour toutes les racines,

$$\frac{Q}{P}\,dx + 2\,\frac{Q\,\delta P - P\,\delta Q}{\varphi'(x)} = 0.$$

Or il est aisé de voir que $Q\delta P - P\delta Q$ est d'un degré inférieur de deux unités au

moins à celui de $\varphi(x)$; si donc on ajoute les équations relatives à chaque racine, on trouvera

$$\sum \frac{Q\,dx}{P} = 0, \tag{56}$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (54),

$$\sum \frac{dx}{\pm\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}} = 0,$$

et l'on voit que la somme des intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}},$$

dans lesquelles on prend successivement pour limite supérieure toutes les racines de l'équation (54), c'est-à-dire les abscisses des points d'intersection des courbes considérées, restera la même lorsque, la courbe (52) restant fixe, la courbe (53) changera arbitrairement en conservant le même degré.

On peut démontrer le même théorème sans aucune modification en remplaçant la courbe du quatrième degré (52) par une autre courbe ayant une équation de la forme

$$y^2 = f(x),$$

$f(x)$ désignant un polynôme entier quelconque.

CHAPITRE II.

DOUBLE PÉRIODICITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Notation de Jacobi.

592. Posons

$$(1)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u.$$

On dit que φ est l'*amplitude* correspondant à l'*argument* u, et l'on écrit

$$(2)\qquad \varphi = am\,u.$$

Si l'on pose

$$\sin\varphi = x,$$

l'intégrale (1) devient

$$(3)\qquad \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$

et l'on a

$$x = \sin am\,u.$$

On en conclut

$$\sqrt{1-x^2} = \cos am\,u,$$

et l'on pose, en outre,

$$(4)\qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\,u;$$

$\sin am\,u$, $\cos am\,u$, $\Delta am\,u$ sont, comme nous le verrons dans ce chapitre, trois fonctions parfaitement déterminées pour chaque valeur réelle ou imaginaire de la variable, et la fonction $\Delta am\,u$ elle-même, malgré la présence du radical dans l'équation (4) qui la définit, ne conservera aucune ambiguïté.

Addition des arguments.

593. On sait quelle est, en Trigonométrie, l'importance des formules qui expriment les sinus et les cosinus de la somme de deux arcs en fonction des sinus et des cosinus des arcs eux-mêmes. Le théorème d'Euler, démontré dans le chapi-

tre précédent, équivaut à des formules analogues relatives aux trois fonctions qui nous occupent, et qui jouent dans leur théorie un rôle non moins important.

Soient φ et ψ deux angles quelconques. Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi = am\,u, \\ \psi = am\,v, \end{cases}$$

et

$$(6)\qquad \mu = am(u+v),$$

c'est-à-dire, supposons que l'on ait

$$(7)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\mu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on suppose que μ, et par conséquent la somme $u+v$ soit constante, on aura, en différentiant,

$$(8)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

d'où résulte (584)

$$(9)\qquad \cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu};$$

le triangle sphérique dont les côtés sont φ, ψ et μ donne de même

$$(10)\qquad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\mu\cos\psi + \sin\mu\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \\ \cos\psi = \cos\mu\cos\varphi + \sin\mu\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}; \end{cases}$$

et d'après les équations (5) (6), ces équations peuvent s'écrire

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos am(u+v) = \cos am\,u\cos am\,v - \sin am\,u\sin am\,v\,\Delta am(u+v), \\ \cos am\,u = \cos am(u+v)\cos am\,v + \sin am(u+v)\sin am\,v\,\Delta am\,u, \\ \cos am\,v = \cos am(u+v)\cos am\,u + \sin am(u+v)\sin am\,u\,\Delta am\,v. \end{cases}$$

Les deux dernières donnent

$$\sin am(u+v) = \frac{\cos^2 am\,v - \cos^2 am\,u}{\sin am\,u\cos am\,v\,\Delta am\,v - \sin am\,v\cos am\,u\,\Delta am\,u},$$

que l'on peut écrire

$$\sin am(u+v) = \frac{(\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,v)(\sin am\,u\cos am\,v\,\Delta am\,v + \sin am\,v\cos am\,u\,\Delta am\,u)}{\sin^2 am\,u\cos^2 am\,v\,\Delta^2 am\,v - \sin^2 am\,v\cos^2 am\,u\,\Delta^2 am\,u};$$

le dénominateur est, on s'en assure aisément, identiquement égal au produit

$$(\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,v)(1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v),$$

et l'on a, par conséquent,

$$(12) \qquad \sin am(u+v) = \frac{\sin am\,u \cos am\,v\, \Delta am\,v + \sin am\,v \cos am\,u\, \Delta am\,u}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}.$$

Cette relation pourrait d'ailleurs se déduire immédiatement de l'intégrale donnée (583).

Les deux dernières équations (11) donnent aussi

$$\cos am(u+v) = \frac{\sin am\,u \cos am\,u\, \Delta am\,v - \sin am\,v \cos am\,v\, \Delta am\,u}{\sin am\,u \cos am\,v\, \Delta am\,v - \sin am\,v \cos am\,u\, \Delta am\,u};$$

et en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par la somme des termes dont la différence forme le dénominateur, et supprimant ensuite le facteur $\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,v$ commun aux deux termes, on a

$$(13) \qquad \cos am(u+v) = \frac{\cos am\,u \cos am\,v - \sin am\,u \sin am\,v\, \Delta am\,u\, \Delta am\,v}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}.$$

La première des équations (11) donne enfin

$$\sin am\,u \sin am\,v\, \Delta am(u+v) = \cos am\,u \cos am\,v - \cos am(u+v),$$

et en substituant à $\cos am(u+v)$ sa valeur fournie par l'équation (13), on trouve

$$(14) \qquad \Delta am(u+v) = \frac{\Delta am\,u\, \Delta am\,v - k^2 \sin am\,u \sin am\,v \cos am\,u \cos am\,v}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}.$$

Généralité des formules.

594. Les équations (12), (13), (14) sont les formules fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques, elles sont démontrées seulement pour des valeurs des variables, qui, d'après la formule de définition, doivent être réelles, et ne pas dépasser certaines limites imposées par la considération du triangle sphérique, dont les côtés sont φ, ψ et μ. Les trois formules néanmoins s'appliquent à tous les cas; mais, pour le démontrer, il est nécessaire d'étendre et de préciser les définitions données au commencement de ce chapitre.

Reprenons l'équation

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = u,$$

qui lorsque φ est réel et positif, k étant moindre que l'unité, ne présente aucune ambiguïté. On en conclut

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\Delta am\, u},$$

et, par conséquent, φ étant égal à $am\, u$,

$$\frac{d\, am\, u}{du} = \Delta am\, u.$$

On en déduit

$$(15) \qquad \frac{d \sin am\, u}{du} = \cos am\, u \frac{d\, am\, u}{du} = \cos am\, u\, \Delta am\, u,$$

$$(16) \qquad \frac{d \cos am\, u}{du} = -\sin am\, u \frac{d\, am\, u}{du} = -\sin am\, u\, \Delta am\, u,$$

$$(17) \qquad \frac{d\, \Delta am\, u}{du} = \frac{d}{du} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, u} = -k^2 \sin am\, u \cos am\, u.$$

Ces trois formules, considérées comme toujours exactes, seront prises pour équations de définition dans les cas où les définitions précédentes laisseraient subsister un doute sur la valeur précise des radicaux qui y figurent, et elles permettent de démontrer, pour tous les cas, les équations (12), (13) et (14).

Posons, en effet,

$$R = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\, \Delta am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

nous trouverons, en représentant le dénominateur par D,

$$\frac{dR}{du} = \frac{\cos am\, u\, \Delta am\, u \cos am\, v\, \Delta am\, v - \sin am\, v \sin am\, u\, \Delta^2 am\, u - k^2 \sin am\, v \cos^2 am\, u \sin am\, u}{D},$$
$$+ \frac{2(\sin am\, u \cos am\, v\, \Delta am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \Delta am\, u) k^2 \sin^2 am\, v \sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u}{D^2}.$$

Cette expression de $\frac{dR}{du}$ est symétrique par rapport aux lettres u et v. On s'en assure en la multipliant par D^2, qui est symétrique, supprimant les termes dont la symétrie est évidente, et constatant que la somme de ceux qui restent est égale à

$$-\sin am\, u \sin am\, v (\Delta^2 am\, u\, \Delta^2 am\, v + k^2 \cos^2 am\, u \cos^2 am\, v).$$

On a, par conséquent,

$$\frac{dR}{du} = \frac{dR}{dv}.$$

On en conclut

$$dR = \frac{dR}{du}\,du + \frac{dR}{dv}\,dv = \frac{dR}{du}(du + dv).$$

$\frac{dR}{du}$ ne peut être identiquement nul, car $\frac{dR}{dv}$ le serait aussi, et R ne contiendrait ni u ni v. La condition nécessaire et suffisante pour que dR soit nul, est donc

$$du + dv = 0,$$

c'est-à-dire

$$u + v = \text{const.}$$

La fonction R et la somme $u + v$ sont par conséquent constantes ensemble et variables ensemble, et R est une fonction de $u + v$, mais pour $v = 0$, R se réduit à $\sin am\, u$ et l'on a, par conséquent,

$$R = \sin am(u + v).$$

Les formules (13) et (14) se démontreraient de la même manière.

595. On peut en déduire un grand nombre d'autres, dont l'usage est très-fréquent, nous citerons seulement quelques-unes des plus élégantes, qui peuvent d'ailleurs se vérifier immédiatement. On a

$$(18)\qquad \sin am\, 2u = \frac{2\sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u},$$

$$(19)\qquad \cos am\, 2u = \frac{\cos^2 am\, u - \sin^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u},$$

$$(20)\qquad \Delta am\, 2u = \frac{\Delta^2 am\, u - k^2 \sin^2 am\, u \cos^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u},$$

$$(21)\qquad \sin am\, p + \sin am\, q = \frac{2\sin am\,\frac{p+q}{2}\cos am\,\frac{p-q}{2}\,\Delta am\,\frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am\,\frac{p+q}{2}\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}},$$

$$(22)\qquad \cos am\, p + \cos am\, q = \frac{2\cos am\,\frac{p+q}{2}\cos am\,\frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am\,\frac{p+q}{2}\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}},$$

$$(23)\qquad \sin am\, p - \sin am\, q = \frac{2\sin am\,\frac{p-q}{2}\cos am\,\frac{p+q}{2}\,\Delta am\,\frac{p+q}{2}}{1-k^2\sin^2 am\,\frac{p+q}{2}\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}},$$

$$(24)\qquad \cos am\, p - \cos am\, q = \frac{2\sin am\,\frac{q-p}{2}\sin am\,\frac{q+p}{2}\,\Delta am\,\frac{p-q}{2}\,\Delta am\,\frac{p+q}{2}}{1-k^2\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}\sin^2 am\,\frac{p+q}{2}},$$

$$(25)\qquad \Delta am\, p + \Delta am\, q = \frac{2\Delta am\,\frac{p+q}{2}\,\Delta am\,\frac{p-q}{2}}{1-k^2\sin^2 am\,\frac{p+q}{2}\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}},$$

$$(26)\qquad \Delta am\, p - \Delta am\, q = \frac{2k^2\sin am\,\frac{q-p}{2}\sin am\,\frac{q+p}{2}\cos am\,\frac{p-q}{2}\cos am\,\frac{p+q}{2}}{1-k^2\sin^2 am\,\frac{p+q}{2}\sin^2 am\,\frac{p-q}{2}}.$$

596. Revenons aux trois fonctions $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$, que nous pouvons maintenant calculer pour toutes les valeurs de la variable u.

Si l'on pose

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

k étant moindre que l'unité, en faisant

$$(27)\qquad \omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

on a

$$\sin am\,\omega = 1,$$

et pour les valeurs réelles de u comprises entre o et ω, la fonction $\sin am\, u$ définie sans ambiguïté, varie entre zéro et l'unité. Lorsque x augmente et varie de l'unité à $\frac{1}{k}$, les éléments de l'intégrale deviennent imaginaires. En posant

$$(28)\qquad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega'\sqrt{-1},$$

on aura

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega + \omega'\sqrt{-1},$$

et, par conséquent,

$$\sin am(\omega + \omega'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k}.$$

On a aussi

$$(29)\quad \begin{cases} \cos am\,\omega = 0, \\ \Delta am\,\omega = \sqrt{1-k^2}, \\ \cos am(\omega + \omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{-1}}{k}\sqrt{1-k^2}, \\ \Delta am(\omega + \omega'\sqrt{-1}) = 0. \end{cases}$$

Périodicité des fonctions.

597. Les fonctions $\sin am\,u$, $\cos am\,u$, $\Delta am\,u$ admettent chacune deux périodes, qui sont : pour $\sin am\,u$, 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$; pour $\cos am\,u$, 4ω et $2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}$; pour $\Delta am\,u$, 2ω et $4\omega'\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que l'on a, quelle que soit la valeur de u,

$$(30)\quad \begin{cases} \sin am(u + 4\omega) = \sin am\,u, \\ \sin am(u + 2\omega'\sqrt{-1}) = \sin am\,u, \\ \cos am(u + 4\omega) = \cos am\,u, \\ \cos am(u + 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = \cos am\,u, \\ \Delta am(u + 2\omega) = \Delta am\,u, \\ \Delta am(u + 4\omega'\sqrt{-1}) = \Delta am\,u. \end{cases}$$

Les équations (18), (19) et (20) permettent en effet de calculer $\sin am\,2\omega$, $\cos am\,2\omega$, $\Delta am\,2\omega$, elles donnent

$$(31)\quad \begin{cases} \sin am\,2\omega = 0, \\ \cos am\,2\omega = -1, \\ \Delta am\,2\omega = +1. \end{cases}$$

On en conclut, à l'aide des formules (12), (13) et (14),

$$(32)\quad \begin{cases} \sin am(u + 2\omega) = -\sin am\,u, \\ \cos am(u + 2\omega) = -\cos am\,u, \\ \Delta am(u + 2\omega) = \Delta am\,u, \end{cases}$$

et les deux premières donnent, en y changeant u en $u + 2\omega$,

$$\sin am(u + 4\omega) = \sin am\,u,$$
$$\cos am(u + 4\omega) = \cos am\,u.$$

On déduira aussi de (18), (19) et (20)

$$\sin am(2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = 0,$$
$$\cos am(2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = +1,$$
$$\Delta am(2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = -1,$$

et les formules (12), (13) et (14) donnent

$$(33)\quad \begin{cases} \sin am(u + 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = -\sin am\, u, \\ \cos am(u + 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = \cos am\, u, \\ \Delta am(u + 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}) = -\Delta am\, u. \end{cases}$$

L'addition de $2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}$ à la variable change donc le signe de $\sin am\, u$, et comme il en est de même de l'addition de 2ω, $2\omega'\sqrt{-1}$ ne change rien et est une période de $\sin am\, u$; $2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}$ en est une de $\cos am\, u$, et la troisième des équations (33) montre enfin que $2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}$ ajouté à la variable change le signe de $\Delta am\, u$, et comme 2ω est une période, l'addition de $2\omega'\sqrt{-1}$ changerait également le signe de $\Delta am\, u$, et celle de $4\omega'\sqrt{-1}$ rétablit la valeur primitive.

598. Les résultats précédents, il est aisé de le voir, permettent de calculer sans ambiguïté les trois fonctions $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable. Le sinus d'amplitude est défini, en effet (596), pour les valeurs réelles de la variable comprises entre zéro et ω. L'équation (21

$$\sin am\, p + \sin am\, q = \frac{2 \sin am \frac{p+q}{2} \cos am \frac{p-q}{2} \Delta am \frac{p-q}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{p+q}{2} \sin^2 am \frac{p-q}{2}}$$

donne

$$\sin am\, u + \sin am(-u) = 0,$$

et la fonction est définie par conséquent pour les valeurs de la variable comprises entre $-\omega$ et $+\omega$. L'équation (32)

$$\sin am(u + 2\omega) = -\sin am\, u$$

achève enfin de la définir pour toutes les valeurs réelles de u.

L'équation (24)

$$\cos am\, p - \cos am\, q = \frac{2 \sin am \frac{q-p}{2} \sin am \frac{q+p}{2} \Delta am \frac{p-q}{2} \Delta am \frac{p+q}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{p-q}{2} \sin^2 am \frac{p+q}{2}}$$

donne

$$\cos am\, u = \cos am(-u),$$

et la fonction $\cos am\, u$ est définie par conséquent pour les valeurs de u comprises entre $-\omega$ et $+\omega$; l'équation (32)

$$\cos am(u+2\omega) = -\cos am\, u$$

achève de la déterminer pour toutes les valeurs réelles de u.

L'équation (26) donne enfin

$$\Delta am\, u = +\Delta am(-u),$$

et $\Delta am\, u$ étant défini par les valeurs comprises entre o et ω, et ayant pour période 2ω, se trouve déterminé, ainsi que les deux autres fonctions, pour toutes les valeurs réelles de la variable.

599. Nous avons défini (596) les valeurs de $\sin am\, u$, lorsque u étant de la forme $\omega + z\sqrt{-1}$, z varie de o à ω'; $\cos am(\omega + z\sqrt{-1})$ et $\Delta am(\omega + z\sqrt{-1})$ sont également définis sans ambiguïté : $\sin am(\omega + z\sqrt{-1})$ étant, en effet, réel et plus grand que l'unité, $\cos am(\omega + z\sqrt{-1})$ est imaginaire de la forme $\beta\sqrt{-1}$ et β varie de o à $\sqrt{1-k^2}$; $\Delta am(\omega + z\sqrt{-1})$ est réel, au contraire, et varie de $\sqrt{1-k^2}$ à o.

On déduira de ce qui précède $\sin am\, z\sqrt{-1}$, $\cos am\, z\sqrt{-1}$ et $\Delta am\, z\sqrt{-1}$ pour les valeurs de z comprises entre o et ω'; la formule (12) donne,

$$\begin{aligned}\sin am\, z\sqrt{-1} &= \sin am(\omega + z\sqrt{-1} - \omega)\\ &= -\frac{\cos am(\omega + z\sqrt{-1})\,\Delta am(\omega + z\sqrt{-1})}{1 - k^2\sin^2 am(\omega + z\sqrt{-1})} = -\frac{\cos am(\omega + z\sqrt{-1})}{\Delta am(\omega + z\sqrt{-1})}.\end{aligned}$$

$\sin am(\omega + z\sqrt{-1})$ étant réel et compris entre 1 et $\frac{1}{k}$, $\cos am(\omega + z\sqrt{-1})$ est imaginaire et de la forme $\beta\sqrt{-1}$; mais $\Delta am(\omega + z\sqrt{-1})$ est réel, et $\sin am\, z\sqrt{-1}$ est par conséquent imaginaire, sans partie réelle. Si l'on fait $z = \omega'$, on a

$$\sin am\, \omega'\sqrt{-1} = -\frac{\cos am(\omega + \omega'\sqrt{-1})}{\Delta am(\omega + \omega'\sqrt{-1})},$$

et, comme $\Delta am(\omega + \omega'\sqrt{-1})$ est égal à zéro, $\sin am\, \omega'\sqrt{-1}$ est infini.

$\sin am\, z\sqrt{-1}$ se déterminera enfin pour toutes les valeurs réelles de z, à l'aide

des relations

$$\sin am - z\sqrt{-1} = -\sin am\, z\sqrt{-1}$$

et

$$\sin am(z + 2\omega')\sqrt{-1} = \sin am\, z\sqrt{-1}.$$

$\operatorname{Sin} am\, z\sqrt{-1}$ étant imaginaire, sans partie réelle, $\cos am\, z\sqrt{-1}$ et $\Delta am\, z\sqrt{-1}$ sont réels et ne s'annulent jamais; leur valeur est déterminée sans ambiguïté.

On pourra enfin, quelles que soient les valeurs réelles de x et de y, calculer $\sin am(x + y\sqrt{-1})$, $\cos am(x + y\sqrt{-1})$ et $\Delta am(x + y\sqrt{-1})$, en faisant dans les formules (12), (13) et (14)

$$u = x, \quad v = y\sqrt{-1}.$$

Démonstration directe de la double périodicité.

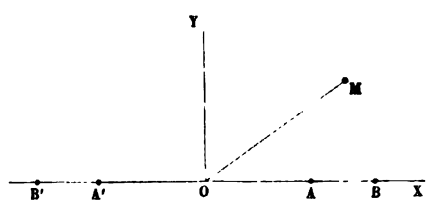
600. Reprenons l'équation

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

équivalente, par définition, à

$$z = \sin am\, u,$$

et cherchons, d'après les conventions et la méthode exposées (353), les diverses valeurs de u qui correspondent à une valeur donnée de z correspondant au point M.



Les points critiques de la fonction intégrée sont ici les points A, A', B, B', placés sur l'axe des X dont les abscisses sont ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, et les contours élémentaires sont, par conséquent, au nombre de quatre; les intégrales correspondantes sont, on le verra en raisonnant comme (354),

$$2\omega, \quad -2\omega, \quad 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1}, \quad -2\omega - 2\omega'\sqrt{-1},$$

et, si l'on nomme J l'intégrale relative à ce chemin OM, on obtiendra, en faisant

précéder ce chemin de l'un des quatre contours élémentaires,

$$2\omega - J, \quad -2\omega - J, \quad 2\omega + 2\omega'\sqrt{-1} - J, \quad -2\omega - 2\omega'\sqrt{-1} - J,$$

et l'on en conclut que par l'adjonction successive d'un nombre quelconque de ces contours l'intégrale peut prendre l'une quelconque des valeurs exprimées par la formule

$$2n\omega + 2m\omega + 2m\omega'\sqrt{-1} + (-1)^{n+m} J,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec les résultats obtenus précédemment.

Étude des infinis et des zéros de $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$.

601. On a vu (542) quelle est dans l'étude d'une fonction l'importance des valeurs de la variable qui la rendent nulle ou infinie, et du degré de multiplicité qu'il faut attribuer à chacune d'elles. Nous devons donc chercher les valeurs qui rendent nulles ou infinies les trois fonctions $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$. Résolvons en premier lieu l'équation

$$\sin am\, u = 0. \tag{34}$$

Soit

$$u = x + y\sqrt{-1},$$

x et y étant réels, on a

$$\sin am(x + y\sqrt{-1}) = \frac{\sin am\, x \cos am\, y\sqrt{-1}\, \Delta am\, y\sqrt{-1} + \sin am\, y\sqrt{-1} \cos am\, x\, \Delta am\, x}{1 - k^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, y\sqrt{-1}}. \tag{35}$$

Le dénominateur de cette expression est réel (599), ainsi que le premier terme du numérateur; le second est de la forme $B\sqrt{-1}$, B étant réel, et l'équation

$$\sin am(x + y\sqrt{-1}) = 0$$

se décompose par conséquent en deux autres

$$\sin am\, x \cos am\, y\sqrt{-1}\, \Delta am\, y\sqrt{-1} = 0,$$
$$\sin am\, y\sqrt{-1} \cos am\, x\, \Delta am\, x = 0.$$

$\cos am\, y\sqrt{-1}$ et $\Delta am\, y\sqrt{-1}$ ne pouvant pas être nuls (599), on doit avoir

$$\sin am\, x = 0,$$

et par conséquent

$$x = 2n\omega,$$

n étant un nombre entier quelconque.

$\sin am x$ étant nul, $\cos am x$ et $\Delta am x$ ne peuvent pas l'être, et la seconde équation se réduit à

$$\sin am y\sqrt{-1} = 0,$$

par conséquent

$$y = 2m\omega',$$

m étant entier.

Les solutions cherchées sont donc renfermées dans la formule

$$u = 2n\omega + 2m\omega'\sqrt{-1}.$$

Nous les avons obtenues en égalant à zéro le numérateur de (35). Il est aisé de voir qu'en rendant le dénominateur infini, on n'annulerait pas la fraction; $\sin am y\sqrt{-1}$, $\cos am y\sqrt{-1}$ et $\Delta am y\sqrt{-1}$ deviennent, en effet, infinis en même temps et sont des infinis de même ordre; le numérateur de (35) devient donc infini en même temps que le dénominateur, et leur rapport ne s'annule pas.

Toutes les racines de l'équation

$$\sin am u = 0$$

sont des racines simples. On a, en effet,

$$\frac{d\sin am u}{du} = \cos am u\, \Delta am u,$$

et la fonction $\sin am u$ ne s'annule jamais en même temps que sa dérivee.

602. En procédant absolument de la même manière, nous trouverons que les racines de l'équation

$$\cos am u = 0$$

sont données par la formule

$$u = (2n+1)\omega + 2m\omega'\sqrt{-1},$$

et celles de

$$\Delta am u = 0$$

par la formule

$$u = (2n+1)\omega + (2m+1)\omega'\sqrt{-1},$$

et toutes les racines sont des racines simples.

603. Résolvons enfin l'équation

$$\sin am\, u = \infty \tag{36}$$

dont les racines sont évidemment les mêmes que celles des deux autres équations

$$\cos am\, u = \infty,$$
$$\Delta am\, u = \infty;$$

on a (595)

$$\sin am\, 2u = \frac{2 \sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u}. \tag{37}$$

$\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ deviennent infinis en même temps et leurs modules sont de même ordre; toute valeur qui donne $\sin am\, u = \infty$ doit donc, d'après l'équation (37), donner $\sin am\, 2u = 0$, et il faut chercher les racines de l'équation (36) parmi les valeurs de l'expression

$$\frac{1}{2}(2n\omega + 2m\omega'\sqrt{-1}),$$

et l'on s'assure bien aisément que celles qui sont de la forme

$$2p\omega + (2q+1)\omega'\sqrt{-1}$$

sont les seules qui satisfassent.

Résolution des équations $\sin am\, u = \sin am\, \alpha$, $\cos am\, u = \cos am\, \alpha$.

603. On sait quelle est, en Trigonométrie, l'importance des formules qui font connaître les arcs répondant à une ligne trigonométrique donnée. Le problème analogue ne joue pas, dans la théorie des fonctions elliptiques, un rôle moins considérable.

Considérons d'abord l'équation

$$\sin am\, u = \sin am\, \alpha, \tag{38}$$

que l'on peut écrire

$$\sin am\, u - \sin am\, \alpha = 0,$$

c'est-à-dire (595)

$$\frac{2 \sin am \frac{u-\alpha}{2} \cos am \frac{u+\alpha}{2} \Delta am \frac{u+\alpha}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{u+\alpha}{2} \sin^2 am \frac{u-\alpha}{2}} = 0.$$

Pour que le second membre soit nul, il faut que le numérateur soit nul ou le

dénominateur infini, et les résultats précédemment obtenus donnent très-aisément

$$(39)\qquad \begin{cases} u-\alpha = 4n\omega + 2m\omega'\sqrt{-1}, \\ u+\alpha = (4n+2)\omega + 2m\omega'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et l'on voit que la différence $u-\alpha$ doit être une somme des multiples des périodes ou la somme $u+\alpha$ égale à 2ω augmenté d'une somme des multiples des périodes.

604. L'équation

$$(40)\qquad \cos am\, u = \cos am\, \alpha$$

est tout aussi facile à résoudre; on a

$$\cos am\, u - \cos am\, \alpha = \frac{2\sin am\frac{u+\alpha}{2}\sin am\frac{u-\alpha}{2}\,\Delta am\frac{u+\alpha}{2}\,\Delta am\frac{u-\alpha}{2}}{1-k^2\sin^2 am\frac{u-\alpha}{2}\sin^2 am\frac{u+\alpha}{2}},$$

et l'on en conclut que les solutions de l'équation (40) sont données par les formules

$$(41)\qquad \begin{cases} u-\alpha = 4m\omega + 2n(\omega+\omega'\sqrt{-1}), \\ u+\alpha = 4m\omega + 2n(\omega+\omega'\sqrt{-1}), \end{cases}$$

et l'on verra d'une manière toute semblable que les solutions de l'équation

$$(42)\qquad \Delta am\, u = \Delta am\, \alpha$$

sont

$$(43)\qquad \begin{cases} u-\alpha = 2m\omega + 4n\omega'\sqrt{-1}, \\ u+\alpha = 2m\omega + 4n\omega'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

m et n désignant des nombres entiers quelconques.

Expression de $\sin am\left(u+\omega'\sqrt{-1}\right)$.

605. On a

$$\sin am\left(u+\omega'\sqrt{-1}-u\right)$$
$$= \frac{\sin am\left(u+\omega'\sqrt{-1}\right)\cos am\, u\,\Delta am\, u - \sin am\, u\cos am\left(u+\omega'\sqrt{-1}\right)\Delta am\left(u+\omega'\sqrt{-1}\right)}{1-k^2\sin^2 am\, u\sin^2 am\left(u+\omega'\sqrt{-1}\right)};$$

mais le premier membre égal à $\sin am\,\omega'\sqrt{-1}$ est infini, et l'on doit avoir par

conséquent

$$1 = k^2 \sin^2 am(u + \omega'\sqrt{-1}) \sin^2 am\, u,$$

d'où l'on déduit

$$(44) \qquad \sin am(u + \omega'\sqrt{-1}) = \frac{\pm 1}{k \sin am\, u}.$$

Si l'on fait $u = \omega$, le premier membre devient $\frac{1}{k}$, et $\sin am\, u$ étant égal à l'unité, il faut adopter le signe $+$, qui convient dès lors dans tous les cas; car on peut passer de la valeur $u = 0$ à telle autre valeur que l'on voudra choisir, sans que dans l'intervalle la fonction $\sin am\, u$ devienne nulle ou infinie.

Sur les fonctions doublement périodiques.

606. Toute fonction qui admet deux périodes α et β n'est pas pour cela doublement périodique; elle ne doit prendre cette dénomination que lorsque les périodes sont *distinctes*.

Deux périodes dont le rapport est imaginaire sont toujours distinctes.

Soient en effet α et β deux périodes dont le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est imaginaire; supposons, s'il est possible, qu'on puisse les remplacer par une période unique ϖ. Les seules périodes que l'on puisse déduire de la période ϖ sont les multiples de ϖ et si l'on avait

$$m\varpi = \alpha,$$
$$n\varpi = \beta,$$

m et n étant entiers, on en conclurait

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

et, contrairement à notre hypothèse, le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ serait réel.

Deux périodes dont le rapport est réel peuvent toujours au contraire être remplacées par une seule.

Supposons d'abord en effet que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ des deux périodes soit commensurable et égal au rapport de deux nombres entiers p et q, on aura

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q},$$

et en nommant ϖ la valeur commune de ces deux rapports, il suffira qu'une fonc-

tion ait pour période ϖ pour qu'elle ait aussi $p\varpi$, c'est-à-dire α, et $q\varpi$, c'est-à-dire β.

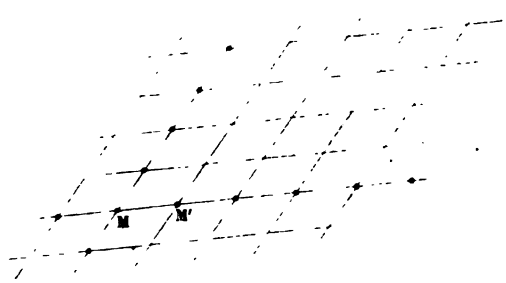
Supposons enfin que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ soit un nombre incommensurable ε; la fonction dont α et β sont les périodes a aussi pour période

$$m\alpha - n\beta = \beta(m\varepsilon - n),$$

m et n désignant des nombres entiers quelconques. Or on sait, par la théorie des fractions continues, trouver des nombres entiers tels, que la différence $m\varepsilon - n$ soit aussi petite qu'on le voudra. La fonction a donc une période dont le module peut décroître indéfiniment, et par conséquent elle ne change pas quand la variable s'accroît infiniment peu; sa dérivée est par conséquent égale à zéro et elle-même se réduit à une constante.

Représentation géométrique de la double périodicité.

607. Considérons une fonction $\varphi(z)$ ayant pour périodes $a + b\sqrt{-1}$ et $a' + b'\sqrt{-1}$. Les points pour lesquels, en vertu de cette double périodicité, la fonction reprend la même valeur, sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes égaux et juxtaposés qui recouvrent entièrement le plan. Supposons en effet la variable z représentée par le point M; si nous lui ajoutons la période $a + b\sqrt{-1}$, la somme $z + a + b\sqrt{-1}$ correspond au point M′ obtenu en portant, à partir du point M, une parallèle à l'axe des X égale à a, et par l'extrémité de celle-ci une parallèle à l'axe des Y égale à b, c'est-à-dire (car évidemment cela revient au même) en menant par le point M une droite de longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$ faisant avec l'axe des X un angle dont la tangente soit $\frac{b}{a}$. Cette droite peut d'ailleurs être portée dans les deux sens opposés et un nombre quelconque de fois. On obtiendra ainsi une rangée de points équidistants et placés en ligne droite, et la fonction, pour les valeurs de la variable qui leur correspondent, aura la même valeur. La seconde période $a' + b'\sqrt{-1}$ permettra de former une seconde ligne



analogue à la première et différemment inclinée, et comme pour chaque point de chacune des deux rangées on peut répéter ce qu'on a dit du point M, on obtiendra deux séries de parallèles équidistantes décomposant le plan en parallélogrammes pour tous les sommets desquels la fonction aura la même valeur.

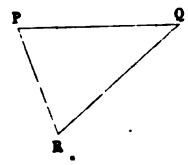
Le point M qui sert d'origine au réseau a été pris arbitrairement, en sorte que les côtés des parallélogrammes étant déterminés en grandeur et en direction, il reste permis de les déplacer arbitrairement en les laissant parallèles à eux-mêmes et en conservant les mêmes distances. Il est évident qu'une fonction périodique prend, dans l'intérieur de l'un des parallélogrammes du réseau, toutes les valeurs dont elle est susceptible, et que ces valeurs se reproduisent exactement les mêmes aux points correspondants de tout autre parallélogramme.

608. Deux périodes α et β étant données, on peut en déduire deux autres $m\alpha + n\beta$, $m'\alpha + n'\beta$, m, n, m', n' désignant quatre nombres entiers arbitraires, et ces deux périodes nouvelles fourniront, comme les premières, un réseau de parallélogrammes aux sommets desquels correspondent des valeurs égales de la fonction. Deux cas peuvent se présenter : ces nouveaux parallélogrammes ont les mêmes sommets que les premiers, sans qu'aucun ait disparu, ou bien ils ne reproduisent qu'une partie seulement de ces sommets. Il est évident que dans aucun cas ils n'en peuvent donner de nouveaux. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux réseaux aient les mêmes sommets est que leurs parallélogrammes élémentaires aient même surface. Si l'on considère en effet dans le plan une surface de forme arbitraire, un cercle par exemple, de dimensions infiniment croissantes, le nombre des sommets qui s'y trouve renfermé est égal à celui des parallélogrammes; car en négligeant les parallélogrammes coupés par le contour, dont le nombre relatif est infiniment petit, à chaque parallélogramme correspondent quatre sommets et à chaque sommet quatre parallélogrammes. La surface d'un parallélogramme est donc la limite du rapport de la surface indéfiniment croissante au nombre des sommets qu'elle renferme, et pour que deux réseaux déduits l'un de l'autre aient les mêmes sommets, il faut et il suffit que les parallélogrammes élémentaires aient même surface.

Impossibilité d'une troisième période.

609. Une fonction bien définie ne peut admettre plus de deux périodes distinctes. Soient en effet α, β, γ trois périodes non réductibles à deux; nous allons prouver que la fonction se réduit à une constante. En combinant en effet les trois périodes deux à deux, et prenant pour origine un point arbitraire, on formera trois séries de parallélogrammes dont chacun couvrira le plan et pour tous les

sommets desquels la fonction aura la même valeur; chacun de ces sommets pourra de plus être pris pour point de départ de trois réseaux semblables, et l'on formera un nombre infini de réseaux à tous les sommets desquels doivent correspondre les mêmes valeurs de la fonction. Soient, parmi tous ces sommets, P, Q et R ceux qui forment le triangle de moindre surface. En formant un réseau de parallélo-



grammes ayant pour côtés QP, QR, tous les sommets de ce nouveau réseau seront des points déjà obtenus; car en portant à partir d'un point quelconque une ligne égale et parallèle à PQ ou à PR on ajoute à la valeur de la variable qui correspond à ce point une somme de multiples de trois périodes. Aucun point déjà obtenu ne pourra d'ailleurs se trouver dans l'intérieur des nouveaux parallélogrammes, car, sans cela, contrairement à l'hypothèse, il formerait avec deux des sommets un triangle de surface inférieure à PQR. Tous les sommets déjà obtenus appartiennent donc à un seul et même réseau, et les trois périodes sont réductibles à deux. Il faudrait, pour qu'il en fût autrement, que la surface du triangle PQR se réduisit à zéro, et la fonction ayant la même valeur pour tous les points du plan serait alors une constante.

Propriétés des fonctions doublement périodiques bien définies.

610. Les fonctions auxquelles se rapportent les théorèmes que nous allons démontrer sont supposées *bien définies;* elles doivent, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, prendre une valeur unique et déterminée, et l'on a vu (535) que, par une conséquence nécessaire, une telle fonction, si elle devient nulle pour une valeur particulière $z = \alpha$ de la variable, est de la forme

$$(z - \alpha)^p \psi(z),$$

p étant entier et $\psi(\alpha)$ n'étant ni nul ni infini. Lorsque la fonction devient infinie pour la valeur $z = \beta$, elle est de la forme

$$\frac{\varpi(z)}{(z - \beta)^q},$$

q étant entier et $\varpi(\beta)$ n'étant ni nul ni infini. On dit, dans les deux cas indiqués, que la fonction s'annule p fois pour $z = \alpha$ et qu'elle devient q fois infinie pour $z = \beta$.

611. Nous avons vu (539) que toute fonction bien définie devient infinie une fois au moins. Une fonction doublement périodique se reproduisant identiquement la même dans l'intérieur de chaque parallélogramme (607) doit devenir infinie une fois au moins pour une valeur correspondant à un point intérieur de l'un quelconque des parallélogrammes élémentaires; mais une seule valeur infinie, nous allons le prouver, serait impossible, et *toute fonction doublement périodique devient infinie deux fois au moins dans l'intérieur de chaque parallélogramme élémentaire.*

Il résulte en effet du théorème (539) que la fonction doublement périodique $\varphi(z)$ doit nécessairement devenir infinie pour une valeur de z au moins dans l'intérieur de chaque parallélogramme. Soit $z = \alpha$ cette valeur, on aura

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{z - \alpha},$$

$\psi(\alpha)$ ayant une valeur finie k; car si le dénominateur était d'un degré p supérieur au premier, la fonction serait considérée comme devenant p fois infinie.

Calculons l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$ le long du contour du parallélogramme élémentaire qui contient le point correspondant à $z = \alpha$. Si cette valeur est la seule qui rende la fonction infinie, on aura (349), (344)

$$\int \varphi(z)\,dz = 2k\pi\sqrt{-1}. \tag{45}$$

Mais les éléments de l'intégrale relatifs à deux côtés parallèles se détruisent évidemment deux à deux, et l'on a par conséquent

$$\int \varphi(z)\,dz = 0. \tag{46}$$

Les deux équations (45) et (46) étant contradictoires, l'hypothèse dont elles résultent est inacceptable, et la fonction $\varphi(z)$ doit avoir deux infinis au moins.

612. L'équation $\varphi(z) = 0$ admet aussi deux racines au moins dans l'intérieur de chaque parallélogramme, et le nombre total de ses racines est précisément égal à celui des valeurs infinies de la fonction $\varphi(z)$.

Considérons en effet la fonction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$; cette fonction, qui est doublement périodique comme la fonction proposée $\varphi(z)$, n'admet que des infinis simples. La fonction considérée ne peut évidemment devenir infinie que quand $\varphi(z)$ est nul lui-même ou infini (533). Soit

$$\varphi(z) = (z - a)^p\,\psi(z),$$

p étant entier (535) et $\psi(z)$ ayant pour $z=a$ une valeur finie. On en déduit

$$\varphi'(z)=p(z-a)^{p-1}\psi(z)+(z-a)^p\psi'(z)$$

et

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{p}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

et comme (533) $\psi'(z)$ est finie ainsi que $\psi(z)$ pour $z=a$, a est, pour la fraction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, un *infini simple* dont le résidu est égal à p.

Soit en second lieu

$$\varphi(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^q};$$

$\psi(z)$ étant fini ainsi que sa dérivée pour $z=a$, on a

$$\psi'(z)=-\frac{q\psi(z)}{(z-a)^{q+1}}+\frac{\psi'(z)}{(z-a)^q}$$

et

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=-\frac{q}{(z-a)}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

et la valeur infinie qui correspond à $z=a$ est encore un infini simple dont le résidu correspondant est égal à $-q$.

L'intégrale de la fonction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz$ autour du parallélogramme est, d'après ce qui précède, égale à

$$2\pi\sqrt{-1}\sum(p-q),$$

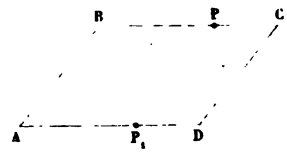
et comme (611) elle doit être nulle, on en conclut

$$\sum p=\sum q;$$

c'est-à-dire que le nombre *total* des zéros est égal à celui des infinis.

613. On doit faire cependant une remarque importante au sujet des valeurs correspondant à des points situés sur le contour du parallélogramme élémentaire qui rendraient la fonction nulle ou infinie. Le raisonnement précédent ne s'y applique pas, mais l'un des sommets du parallélogramme pouvant être choisi arbitrairement, il sera toujours aisé d'éluder la difficulté, quand elle se présentera, par un déplacement des côtés dont la grandeur et la direction sont seulement données.

On peut d'ailleurs étendre le théorème à ce cas :



Soit P un point situé sur le contour du parallélogramme pour lequel la fonction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, devenant infinie, ait un résidu égal à k; le point P_1, placé symétriquement sur le contour opposé du parallélogramme, présentera le même caractère, et si l'on calcule $\int \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)}$ le long du contour ABCD, en réduisant l'intégrale à la valeur principale, les résidus relatifs aux points P et P_1 devront être multipliés seulement (345) par $\pi\sqrt{-1}$, en sorte que les deux points P et P_1 donneront dans l'intégrale $2k\pi\sqrt{-1}$, comme si, en employant la formule générale, on ne comptait que l'un des deux seulement.

Supposons enfin que la fonction $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ devienne infinie pour le sommet A du parallélogramme élémentaire, et par conséquent aussi pour les trois autres sommets pour lesquels elle aura le même résidu k. On trouvera aisément, en suivant la même marche que (345), que, dans le calcul de l'intégrale $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$, il faut multiplier le résidu relatif à chaque sommet par le produit de $\sqrt{-1}$ par l'angle correspondant à ce sommet, en sorte que la somme des quatre termes sera $2k\pi\sqrt{-1}$, précisément la même que si, en adoptant la formule générale, on n'avait compté qu'un seul sommet. Nous pouvons donc étendre à tous les cas les résultats précédemment obtenus en convenant de ne compter qu'une seule fois les infinis et les zéros de la fonction relatifs aux points symétriquement placés sur le contour du parallélogramme élémentaire.

Théorème de M. Liouville.

614. Toute fonction bien définie ayant pour périodes 2ω et $4\omega'\sqrt{-1}$ est exprimable rationnellement en fonction de $\sin am\,u$ et de sa dérivée $\frac{d\sin am\,u}{du}$.

Ce théorème est un corollaire presque immédiat du principe démontré (542) :

Quand deux fonctions bien définies ont *les mêmes zéros* et *les mêmes infinis*, leur rapport est une constante.

Soit $F(u)$ une fonction doublement périodique ayant pour périodes 4ω et

$2\omega'\sqrt{-1}$, et, dans l'intérieur d'un même parallélogramme élémentaire, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les infinis toujours en même nombre (612) de la fonction. Posons

$$(47) \qquad \varphi(u) = F(u) + F(2\omega - u).$$

La fonction $\varphi(u)$ étant égale à $\varphi(2\omega - u)$, les zéros et les infinis peuvent être représentés par α'_1 et $2\omega - \alpha'_1$, α'_2, $2\omega - \alpha'_2, \ldots$, α'_k et $2\omega - \alpha'_k$ et β'_1 et $2\omega - \beta'_1$, β'_2 et $2\omega - \beta'_2, \ldots$, β'_k et $2\omega - \beta'_k$, qui sont précisément ceux de l'expression

$$\frac{(\sin am\, u - \sin am\, \alpha'_1)(\sin am\, u - \sin am\, \alpha'_2)\ldots(\sin am\, u - \sin am\, \alpha'_k)}{(\sin am\, u - \sin am\, \beta'_1)(\sin am\, u - \sin am\, \beta'_2)\ldots(\sin am\, u - \sin am\, \beta'_k)},$$

dont le rapport à $\varphi(u)$ est par conséquent constant.

Posons en second lieu

$$(48) \qquad \psi(u) = \frac{F(u) - F(2\omega - u)}{\dfrac{d \sin am\, u}{du}} = \frac{F(u) - F(2\omega - u)}{\cos am\, u\, \Delta am\, u};$$

on a

$$\psi(u) = \psi(2\omega - u);$$

car, en remplaçant u par $2\omega - u$, le numérateur et le dénominateur de (48) changent tous deux de signe : on peut donc représenter les zéros et les infinis de $\psi(u)$ respectivement par γ_1, $2\omega - \gamma_1$, γ_2, $2\omega - \gamma_2, \ldots$, γ_n, $2\omega - \gamma_n$ et δ_1, $2\omega - \delta_1, \ldots$, δ_n, $2\omega - \delta_n$, et par conséquent

$$(49) \quad \psi(u) = C\,\frac{(\sin am\, u - \sin am\, \gamma_1)(\sin am\, u - \sin am\, \gamma_2)\ldots(\sin am\, u - \sin am\, \gamma_n)}{(\sin am\, u - \sin am\, \delta_1)\ldots(\sin am\, u - \sin am\, \delta_n)},$$

C étant une constante.

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ étant des fonctions rationnelles de $\sin am\, u$, on déduira des équations (47) et (48) les valeurs de $F(u)$ et de $F(2\omega - u)$, l'une et l'autre de la forme

$$M + N\,\frac{d \sin am\, u}{du},$$

où M et N sont des fonctions rationnelles de $\sin am\, u$.

Il résulte évidemment de la démonstration que, si l'on avait

$$F(2\omega - u) = F(u),$$

le coefficient de $\dfrac{d \sin am\, u}{du}$ serait nul dans l'expression de $F(u)$. Si, au contraire,

on avait

$$F(2\omega - u) + F(u) = 0,$$

il en résulterait $M = 0$, et $F(u)$ contiendrait $\frac{d \sin am\, u}{du}$ en facteur.

Remarquons enfin que si l'une des deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ devenait nulle pour la valeur $\omega'\sqrt{-1}$ qui rend $\sin am\, u$ infini, il faudrait remplacer le facteur $(\sin am\, u - \sin am\, \omega'\sqrt{-1})$ par $\frac{1}{\sin am\, u}$.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION ET DIVISION DE L'ARGUMENT.

Calcul direct de $\sin am\, nu$, $\cos am\, nu$, $\Delta am\, nu$.

615. Les formules qui expriment les sinus et cosinus d'amplitude d'une somme permettent de calculer successivement le sinus et le cosinus d'amplitude du double, du triple, etc., d'un argument donné. En faisant, par exemple, $u = v$ dans les formules d'addition, on trouve

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin am\, 2u &= \frac{2\sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u}, \\ \cos am\, 2u &= \frac{\cos^2 am\, u - \sin^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u}, \\ \Delta am\, 2u &= \frac{\Delta^2 am\, u - k^2 \sin^2 am\, u \cos^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans les mêmes formules u par $2u$ et se servant des résultats précédents, on trouvera, en posant pour abréger $\sin am u = x$,

$$(2)\qquad \sin am\, 3u = \frac{3x - 4(1 + k^2)x^3 + 6k^2x^5 - k^4x^9}{1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1 + k^2)x^6 - 3k^4x^8}.$$

On pourrait évidemment calculer ainsi le sinus ou le cosinus d'un multiple quelconque de l'argument; mais cette méthode n'indique pas la loi de formation des numérateurs et des dénominateurs, elle n'en fait pas même connaître exactement le degré; car des facteurs communs s'introduisent dans les deux termes des fractions obtenus. On peut les éviter en suivant une autre voie qui mène plus rapidement au but. En multipliant les valeurs de $\sin am(u + v)$ et de $\sin am(u - v)$ (**593**), on trouve

$$(3)\qquad \sin am(u + v) \sin am(u - v) = \frac{\sin^2 am\, u - \sin^2 am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}.$$

Si dans cette formule on remplace u par $(p + 1)u$ et v par pu, on obtiendra la suivante :

$$(4)\qquad \sin am\, u \sin am(2p + 1)u = \frac{\sin^2 am(p + 1)u - \sin^2 am\, pu}{1 - k^2 \sin^2 am(p + 1)u \sin^2 am\, pu}.$$

Mais on a

$$(5)\qquad \sin am\, 2pu = \frac{2\sin am\, pu \cos am\, pu\, \Delta am\, pu}{1 - k^2 \sin^4 am\, pu}.$$

Si donc on pose, en désignant par p un nombre impair quelconque,

$$\sin am\, pu = \frac{P_p}{Q_p},$$

et par suite

$$\cos am\, pu = \frac{1}{Q_p}\sqrt{Q_p^2 - P_p^2},$$

$$\Delta am\, pu = \frac{1}{Q_p}\sqrt{Q_p^2 - k^2 P_p^2},$$

on aura, en désignant $\sin am\, u$ par x,

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\, x = \frac{P_{n+1}^2 Q_n^2 - P^2 Q_{n+1}^2}{Q_n^2 Q_{n+1}^2 - k^2 P_n^2 P_{n+1}^2},$$

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{2 P_n Q_n \sqrt{(Q_n^2 - P_n^2)(Q_n^2 - k^2 P_n^2)}}{Q_n^4 - k^2 P_n^4}.$$

On pourra donc poser

$$(6)\qquad \begin{cases} P_{2n+1}\, x = P_{n+1}^2 Q_n^2 - P_n^2 Q_{n+1}^2, \\ Q_{2n+1} = Q_n^2 Q_{n+1}^2 - k^2 P_n^2 P_{n+1}^2, \\ P_{2n} = 2 P_n Q_n \sqrt{(Q_n^2 - P_n^2)(Q_n^2 - k^2 P_n^2)}, \\ Q_{2n} = Q_n^4 - k^2 P_n^4. \end{cases}$$

Le radical qui figure dans l'expression de P_{2n}, et qu'il est impossible d'en faire disparaître, n'est pas cependant irréductible.

Si l'on pose, en effet,

$$\sin am\, u = x,$$

$$\sin am\, nu = y = \frac{P_n}{Q_n},$$

on a

$$(7)\qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = n \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

d'où l'on déduit

$$(8)\qquad \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{n}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

mais

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{P_n}{Q_n} = \frac{Q_n \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dQ_n}{dx}}{Q_n^2}$$

et

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{1}{Q_n^2}\sqrt{(Q_n^2-P_n^2)(Q_n^2-k^2P_n^2)},$$

l'équation (8) devient donc

$$\frac{Q_n \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dQ_n}{dx}}{\sqrt{(Q_n^2-P_n^2)(Q_n^2-k^2P_n^2)}} = \frac{n}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et l'on a

$$\sqrt{(Q_n^2-P_n^2)(Q_n^2-k^2P_n^2)} = \frac{1}{n}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\left(Q_n\frac{dP_n}{dx} - P_n\frac{dQ_n}{dx}\right).$$

Si donc $\frac{P_n}{Q_n}$ est rationnel, $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ ne contiendra que le seul radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, et l'on voit, en outre, que les carrés P_{2n}^2, Q_{2n}^2 seront rationnels.

En partant des valeurs

$$P_1 = x,$$
$$Q_1 = 1,$$

on formera successivement P_2, Q_2, P_3, Q_3,..., et l'on voit aisément que, pour les valeurs impaires de n, P_n et Q_n sont des fonctions entières, la première de degré n^2, et la seconde de degré n^2-1; P_n d'ailleurs ne contient que des puissances impaires et Q_n des puissances paires de x seulement. Si l'on pose

$$(9) \qquad y = \frac{A_0 x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + \ldots + A_{\frac{n^2-1}{2}} x^{n^2}}{B_0 x^{n^2-1} + B_1 x^{n^2-3} + \ldots + B_{\frac{n^2-1}{2}}},$$

il existe entre les coefficients du numérateur et ceux du dénominateur des relations faciles à obtenir. Si l'on change, en effet, u en $u + \omega'\sqrt{-1}$, $\sin am u$ ou x se change (605) en $\frac{1}{kx}$, et $\sin am nu$ ou y en $\frac{1}{ky}$. L'équation (9) doit donc être telle, qu'en remplaçant x par $\frac{1}{kx}$, y devienne $\frac{1}{ky}$. On en conclut aisément

$$A_0 = B_0 k^{-\frac{n^2-1}{2}}, \quad A_1 = B_1 k^{-\frac{n^2-1}{2}}, \ldots, \quad A_{\frac{n^2-1}{2}} = k^{-\frac{n^2-1}{2}} B_{\frac{n^2-1}{2}}.$$

D'ailleurs, pour une valeur infiniment petite de x, y est égal à nx; par con-

séquent

$$\frac{A_0}{B_{\frac{n^2-1}{2}}} = n.$$

Si l'on chasse le dénominateur de l'équation (9) pour ordonner ensuite par rapport aux puissances de x, l'équation prendra la forme

$$A_{\frac{n^2-1}{2}} x^{n^2} - B_0 y x^{n^2-1} - \ldots - B_{\frac{n^2-1}{2}} y = 0,$$

et il résulte des relations précédentes que la somme des racines est

$$(10) \qquad \frac{B_0 y}{A_{\frac{n^2-1}{2}}} = \frac{A_0 y}{k^{-\frac{n^2-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} B_{\frac{n^2-1}{2}}} = ny,$$

et leur produit

$$(11) \qquad \frac{B_{\frac{n^2-1}{2}} y}{A_{\frac{n^2-1}{2}}} = \frac{y}{k^{\frac{n^2-1}{2}}}.$$

Division des fonctions elliptiques.

616. Les formules (1) qui expriment $\sin am\, 2u$, $\cos am\, 2u$, $\Delta am\, 2u$ donnent immédiatement

$$(12) \qquad \sin am \frac{u}{2} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \Delta am\, u}{1 + \cos am\, u}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos am\, u}{1 + \Delta am\, u}},$$

$$(13) \qquad \cos am \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos am\, u + \Delta am\, u}{1 + \Delta am\, u}} = \pm \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} \sqrt{\frac{1 - \Delta am\, u}{\Delta am\, u - \cos am\, u}},$$

$$(14) \qquad \Delta am \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos am\, u + \Delta am\, u}{1 + \cos am\, u}} = \pm \sqrt{1 - k^2} \sqrt{\frac{1 - \cos am\, u}{\Delta am\, u - \cos am\, u}}.$$

Ces formules ne donnent que deux valeurs, mais on y suppose $\cos am\, u$ et $\Delta am\, u$ connus; si l'on donne seulement $\sin am\, u$, le cosinus et le Δ ont chacun deux valeurs, et la formule (12) donne huit valeurs pour $\sin am \frac{u}{2}$; on trouve

$$\sin am \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{1 + k \sin am\, u} \pm \sqrt{1 - k \sin am\, u}}{\pm \sqrt{1 - \sin am\, u} \pm \sqrt{1 + \sin am\, u}}.$$

On s'explique aisément ces huit valeurs. Tous les arguments auxquels correspond

un sinus d'amplitude donné sont représentés par la formule

$$(-1)^m \alpha + 2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1},$$

dont les moitiés sont

$$(-1)^m \frac{\alpha}{2} + m\omega + n\omega'\sqrt{-1},$$

et le sinus d'amplitude a huit valeurs égales deux à deux et de signes contraires, répondant aux arguments

$$\begin{array}{ll} \frac{\alpha}{2}, & \frac{\alpha}{2} + \omega'\sqrt{-1}, \\ -\frac{\alpha}{2} + \omega, & -\frac{\alpha}{2} + \omega + \omega'\sqrt{-1}, \\ \frac{\alpha}{2} + 2\omega, & \frac{\alpha}{2} + 2\omega + \omega'\sqrt{-1}, \\ -\frac{\alpha}{2} + 3\omega, & -\frac{\alpha}{2} + 3\omega + \omega'\sqrt{-1}. \end{array}$$

Applications géométriques.

617. Si l'on coupe par une droite la courbe du troisième degré dont l'équation est

(15) $$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

la somme des trois valeurs que prend l'intégrale

(16) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3}},$$

lorsque l'on prend la limite x égale successivement aux abscisses des trois points d'intersection, a une valeur constante (591) pour toutes les droites du plan.

Soit

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = d(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Posons

$$x = \beta \sin^2 am\, u + \gamma \cos^2 am\, u;$$

on aura

(17) $$\left\{ \begin{array}{l} x - \alpha = (\gamma - \alpha) + (\beta - \gamma)\sin^2 am\, u, \\ x - \beta = (\gamma - \beta)\cos^2 am\, u, \\ x - \gamma = (\beta - \gamma)\sin^2 am\, u, \\ dx = 2(\beta - \gamma)\sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u\, du, \end{array} \right.$$

et par conséquent

$$(18)\qquad \frac{dx}{\sqrt{d(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2\Delta am\,u\,du}{\sqrt{d(\alpha-\gamma)}\sqrt{1-\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\sin^2 am\,u}}.$$

Si l'on suppose que le module k^2 de $\sin am\,u$ soit $\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$, on aura

$$\sqrt{1-\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\sin^2 am\,u} = \Delta am\,u,$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{d(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2du}{\sqrt{d(\alpha-\gamma)}},$$

l'intégrale (16) est par conséquent proportionnelle à u.

Les équations (17) donnent d'ailleurs dans cette hypothèse

$$y^2 = d(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = -d(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)^2\sin^2 am\,u\cos^2 am\,u\,\Delta^2 am\,u,$$

et par conséquent

$$y = (\beta-\gamma)\sqrt{d(\alpha-\gamma)}\sin am\,u\cos am\,u\,\Delta am\,u;$$

x et y s'expriment donc rationnellement par des fonctions elliptiques de u, de telle sorte qu'à chaque valeur de u correspond un seul point de la courbe, mais la réciproque n'est pas vraie, et toutes les valeurs de u qui donnent le même sinus d'amplitude et le même produit $\cos am\,u\,\Delta am\,u$ correspondent au même point. La somme de trois des valeurs de u qui correspondent à trois points en ligne droite est constante.

Si par le point qui correspond à la valeur α de u on veut mener des tangentes à la courbe, en désignant par u_1 la valeur de u pour le point de contact, on aura

$$(19)\qquad 2u_1 + \alpha \quad C + 4m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1};$$

C étant la somme constante supposée connue, à laquelle on doit évidemment ajouter un multiple arbitraire des périodes, on obtiendra u_1 en divisant en deux parties égales la différence $C-\alpha$, et parmi les huit valeurs indiquées (616) l'équation (19) n'en fournit que quatre,

$$\frac{C-\alpha}{2}, \qquad \frac{C-\alpha}{2}+2\omega,$$

$$\frac{C-\alpha}{2}+\omega'\sqrt{-1}, \quad \frac{C-\alpha}{2}+2\omega+\omega'\sqrt{-1};$$

ce qui fait quatre points de contact, et l'on obtient les sinus d'amplitude correspondants (611) sans extraction de racine cubique.

Considérons la droite qui joint deux des points de contact, par exemple, ceux qui correspondent aux arguments

$$\frac{C-\alpha}{2}, \quad \frac{C-\alpha}{2}+2\omega,$$

et la droite qui joint les deux autres points. Ces deux droites iront se couper sur la courbe, car les arguments qui répondent à leur troisième point d'intersection avec la courbe sont respectivement

$$C-\frac{C-\alpha}{2}-\frac{C-\alpha}{2}-2\omega,$$

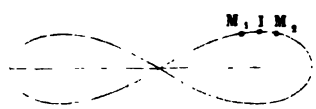
$$C-\frac{C-\alpha}{2}-\omega'\sqrt{-1}-\frac{C-\alpha}{2}-2\omega-\omega'\sqrt{-1},$$

équivalents l'un et l'autre, en supprimant les périodes, à $\alpha-2\omega$, et correspondant au même point de la courbe. On retrouve ainsi ce théorème de Maclaurin, qui, étant *projectif*, s'applique à toutes les lignes du troisième degré :

Si d'un point pris sur une courbe du troisième degré on mène les quatre tangentes autres que celle qui touche la courbe en ce point, les droites qui joignent deux à deux les quatre points de contact se coupent sur la courbe.

618. Considérons la lemniscate dont l'équation est

$$\rho^2=\cos 2\omega,$$



l'arc OM_1 est exprimé par l'intégrale

$$\int_0^{\rho_1}\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}=S_1,$$

où la limite ρ_1 est le rayon vecteur du point M. On en déduit, en prenant le module k^2 égal à -1,

$$\rho_1=\sin am\, S_1.$$

Si ρ_2 est le rayon vecteur d'un autre point M_2, et S_2 l'arc OM_2, on aura

$$\rho_2=\sin am\, S_2.$$

On pourra calculer $\sin am(S_1 + S_2)$, et le rayon ρ' du point I milieu de $M_1 M_2$ sera $\sin am \frac{S_1 + S_2}{2}$, qui évidemment, d'après ce qui précède, se déduira de ρ_1 et ρ_2 par des formules où ne figurent que des radicaux du second degré, que l'on pourra construire avec la règle et le compas.

On peut, pour évaluer l'arc de lemniscate et résoudre le problème précédent, adopter une autre variable qui permet d'éviter les intégrales à module imaginaire. L'équation de la lemniscate étant en effet

$$(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

les coordonnées x et y peuvent être représentées par les formules

$$x = a \cos\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\varphi \cos\varphi,$$

et l'on en déduit

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

en sorte que l'on a

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{a} \sin am\, S,$$

le module étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et les formules précédentes permettent de calculer la valeur de φ qui correspond à l'arc $\frac{S}{2}$ quand on connaît celle qui correspond à l'arc S.

Division en un nombre quelconque de parties égales.

619. Lorsque, $\sin am u$ étant connu, on veut calculer $\sin am \frac{u}{2^p(2n+1)}$, on pourra d'abord à l'aide des formules données (616) calculer $\sin am \frac{u}{2^p}$, et le problème sera ramené à la division de l'argument par un nombre impair $2n + 1$.

Posons

$$\sin am\, u = y, \quad \sin am \frac{u}{n} = x,$$

n étant impair, nous aurons (615) une relation de la forme

$$(20)\qquad y = \frac{A_0 x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + \ldots + A_{n^2-1} x^{n^2}}{1 + B_0 x^2 + \ldots + B_{\frac{n^2-1}{2}} x^{n^2-1}},$$

dont le degré est égal à n^2.

Il est aisé d'expliquer les n^2 valeurs de x qui correspondent à chaque valeur de y.

Les arguments qui répondent à un même sinus d'amplitude y sont compris dans la formule

$$(-1)^p \alpha + 2p\omega + 2q\omega'\sqrt{-1},$$

et la $n^{ième}$ partie est par conséquent exprimée par

$$(-1)^p \frac{\alpha}{n} + 2p\frac{\omega}{n} + 2q\frac{\omega'\sqrt{-1}}{n}.$$

Il suffit évidemment dans cette formule d'attribuer à p les valeurs inférieures à $2n$, et à q les valeurs inférieures à n, on obtiendra ainsi $2n^2$ valeurs de l'argument; mais elles en fourniront n^2 seulement pour le sinus d'amplitude, car ces valeurs groupées convenablement deux à deux donnent pour somme 2ω. Les valeurs distinctes qui sont les racines de l'équation (20) sont comprises dans la formule

$$\sin am\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

où l'on donne à p et à q n valeurs consécutives, par exemple, $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Les n^2 racines de l'équation (20) sont inégales. Considérons en effet deux quelconques d'entre elles

$$\sin am\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4p\omega + 2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

$$\sin am\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4p_1\omega + 2q_1\omega'\sqrt{-1}}{n}\right).$$

Il faudrait pour qu'elles fussent égales, que la différence des arguments se composât d'une somme de multiples des périodes 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$, ce qui ne peut avoir lieu, ou que leur somme fût égale à 2ω, augmenté d'une somme des mêmes multiples, et il faudrait, on le voit aisément, que α fût pour cela de la forme

$$(2h+1)\omega + q\omega'\sqrt{-1},$$

$\sin am\,\alpha$, c'est-à-dire y, aurait alors l'une des valeurs ± 1, ou $\pm \frac{1}{k}$. En dehors de ces cas particuliers les racines sont toutes distinctes.

620. Abel a démontré le théorème suivant :

L'équation de degré n^2 de laquelle dépend la division de l'intégrale elliptique en n parties égales, peut être résolue par radicaux pourvu que le problème ait été préalablement résolu dans le cas des intégrales complètes 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$.

Désignons en effet par x une racine quelconque

$$x = \sin am\,\alpha,$$

on aura deux autres racines

$$x_1 = \sin am\left(\alpha + \frac{4\omega}{n}\right),$$

$$x_2 = \sin am\left(\alpha + \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

c'est-à-dire (593)

$$x_1 = \frac{x\cos am\frac{4\omega}{n}\,\Delta am\frac{4\omega}{n} + \sin am\frac{4\omega}{n}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2\sin^2 am\frac{2\omega}{n}},$$

$$x_2 = \frac{x\cos am\frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}\,\Delta am\frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n} + \sin am\frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2\sin^2 am\frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}}.$$

Le radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ peut être exprimé en fonction rationnelle de x et de y. Si l'on a en effet

$$y = \frac{P}{Q},$$

P et Q désignant deux fonctions entières de $x = \sin am\frac{u}{n}$, et y la valeur de $\sin am\,u$, on en déduit

$$\frac{Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}}{Q^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{n\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et cette équation donne $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ en fonction rationnelle de x. On aura donc

$$x_1 = \varphi_1(x),$$

$$x_2 = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 désignant deux fonctions rationnelles de x. On a d'ailleurs

$$\varphi_1[\varphi_2(x)] = \varphi_2[\varphi_1(x)] = \sin am\left(\alpha + \frac{4\omega}{n} + \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

et ces conditions suffisent, en général, pour que l'équation soit résoluble algébriquement, en supposant, bien entendu, connus les coefficients de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ qui contiennent ici $\sin am \frac{4\omega}{n}$ et $\sin am \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{n}$.

Considérons l'expression

$$(21) \qquad \left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n,$$

où α et β désignent deux racines quelconques de l'équation.

$$x^n - 1 = 0;$$

et supposons que α et β restant invariables, la somme s'étende aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ de p et de q, en sorte qu'elle se compose de n^2 termes; l'expression (21) restera invariable lorsque u y sera remplacé par l'expression

$$u + 4h\omega + 2h'\omega'\sqrt{-1},$$

où h et h' désignent deux nombres entiers quelconques; le terme général devient en effet

$$(22) \qquad \alpha^p \beta^q \sin am\left[\frac{u}{n} + \frac{4(p+h)\omega}{n} + \frac{2(q+h')\omega'}{n}\sqrt{-1}\right],$$

et en posant $p + h = p'$, $q + h' = q'$

$$(23) \qquad \frac{1}{\alpha^h \beta^{h'}} \alpha^{p'} \beta^{q'} \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p'\omega}{n} + \frac{2q'\omega'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

p' et q' devant recevoir les valeurs $h, h+1, \ldots, h+n, h', h'+1, \ldots, h'+n$, équivalentes évidemment aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, que dans l'expression (21) on devait donner à p et à q; la somme placée entre parenthèses dans l'expression (21) ne diffère donc de (23) que par le facteur $\frac{1}{\alpha^h \beta^{h'}}$, et à cause de $\alpha^n = 1$, $\beta^n = 1$ les deux sommes ont même puissance $n^{ième}$. Si donc on représente l'expression (21) par

$$(24) \qquad F(u, \alpha, \beta),$$

cette fonction de u admet les mêmes périodes que $\sin am u$; elle est donc exprimable (614) en fonction rationnelle de $\sin am u$ et de sa dérivée, et elle est de la

forme

$$\frac{M + N\dfrac{d\sin am\, u}{du}}{L}.$$

D'ailleurs $F(u, \alpha, \beta)$ ne peut devenir infinie que si l'un des termes de la somme dont elle est la puissance $n^{ième}$ devient lui-même infini, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n} = \omega'\sqrt{-1} + 2h\omega,$$

d'où l'on déduit, n étant impair,

$$u = n\omega'\sqrt{-1} + 2nh\omega - 4p\omega - 2q\omega'\sqrt{-1} = \omega'\sqrt{-1} + 2h\omega + \text{multiple des périodes.}$$

La fonction (24) admet donc les mêmes infinis que $\sin am\, u$, L doit être par conséquent remplacé par une constante, et l'on a

$$F(u, \alpha, \beta) = P + Q\frac{d\sin am\, u}{du},$$

P et Q désignant deux polynômes entiers en $\sin am\, u$. On a donc

$$\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right) = \sqrt[n]{P + Q\frac{d\sin am\, u}{du}}.$$

Donnons à α et à β toutes les valeurs possibles, et ajoutons les équations ainsi formées; quelles que soient les valeurs de p et q, si elles ne sont pas nulles toutes deux, le coefficient de

$$\sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

sera égal à zéro, car il est le produit de la somme des puissances p des racines de l'équation binôme par la somme des puissances q; le premier membre se réduira donc à $n^2 \sin am\frac{u}{n}$, et l'on aura

$$n^2 \sin am\frac{u}{n} = \sum \sqrt[n]{P + Q\frac{d\sin am\, u}{du}} = \sum \sqrt[n]{P + Q\cos am\, u\, \Delta am\, u},$$

et l'on a l'expression d'une racine quelconque par une somme de radicaux. Le nombre de ces radicaux est $n^2 - 1$, et non pas n^2, car en prenant $\alpha = \beta = 1$ la fonction

$$\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

se réduit à la somme des racines, c'est-à-dire (615) à $n \sin am\, u$, et l'on a par conséquent

$$(25) \qquad \sin am \frac{u}{n} = \frac{1}{n} \sin am\, u + \sum^{n^2-1} \frac{1}{n^2} \sqrt{P_m + Q_m \cos am\, u\, \Delta am\, u}.$$

621. Les fonctions P_m et Q_m pourront être calculées comme il suit. On a

$$(26) \qquad P_m + Q_m \cos am\, u\, \Delta am\, u = \left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n,$$

chaque valeur de m répondant à un groupe de racines α, β. Or on peut par la formule d'addition (593) exprimer $\sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)$ en fonction rationnelle de $\sin am \frac{u}{n}$; par conséquent, le second membre de (26) est une fonction rationnelle de la racine $\sin am \frac{u}{n} = x$; mais il ne change pas quand on y remplace u par $u + 4h\omega + 2h'\omega'\sqrt{-1}$, c'est-à-dire x par une autre racine quelconque, et par conséquent, en nommant $x_1, x_2, \ldots, x_{n^2}$ les racines, il est égal à

$$\frac{1}{n^2}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_{n^2})],$$

fonction symétrique que l'on pourra calculer en fonction des coefficients de $\varphi(x)$, et de ceux de l'équation.

622. La marche suivante donnera plus rapidement le résultat.

Considérons les deux sommes

$$\left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n + \left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} - \frac{4p\omega}{n} - \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n,$$

$$\left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n - \left[\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} - \frac{4p\omega}{n} - \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]^n:$$

la première est une fonction impaire de x, elle a les mêmes périodes que $\sin am\, u$, elle ne change pas quand on change u en $2\omega - u$, elle s'exprime donc en fonction de $\sin am\, u$ par un polynôme impair $2P_m$, qui évidemment sera de degré n. La seconde est paire, elle change de signe quand on change u en $2\omega - u$, et elle est de la forme (614) $2Q_m \frac{d \sin am\, u}{du}$. On en conclut, en ajoutant les deux sommes,

$$F(u, \alpha, \beta) = P_m + Q_m \frac{d \sin am\, u}{du},$$

et en les retranchant, remarquant que le changement de p et q en $-p$ et $-q$ équi-

vaut au changement de α en $\frac{1}{\alpha}$, et de β en $\frac{1}{\beta}$,

$$F\left(u, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = P_m - Q_m \frac{d \sin am\, u}{du},$$

on en déduit

$$\sum \alpha^p \beta^q \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right) \sum \frac{1}{\alpha^p}\frac{1}{\beta^q} \sin am\left(\frac{u}{n} + \frac{4p\omega}{n} + \frac{2q\omega'\sqrt{-1}}{n}\right)$$
$$= \sqrt[n]{P_m^2 + Q_n^2 \cos^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u}.$$

Mais le premier membre considéré comme fonction de u a les mêmes périodes que $\sin am\, u$, il n'a d'ailleurs que les infinis de $\sin am\, u$, et les infinis sont doubles; pour chacun d'eux enfin, le rapport à $\sin^2 am\, u$ est l'unité, et (614) il est par conséquent de la forme

$$\sin^2 am\, u - a^2,$$

a étant une constante.

On a donc

$$\sqrt[n]{P_m^2 - Q_m^2 \cos^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u} = \sin^2 am\, u - a^2.$$

Si nous posons $\sin am\, u = y$, les polynômes P_m et Q_m seront déterminés par l'équation

$$P_m^2 - Q_m^2(1 - y^2)(1 - k^2 y^2) = (y^2 - a^2)^n. \tag{27}$$

Si l'on prend par exemple $n = 3$, l'équation à résoudre est (615)

$$y = \frac{3x - 4(1 + k^2)x^3 + 6k^2 x^5 - k^4 x^9}{1 - 6k^2 x^2 + 4k^2(1 + k^2)x^6 - 3k^4 x^8}; \tag{28}$$

on aura

$$P_m = y^3 + by,$$
$$Q_m = c,$$
$$(y^3 + by)^2 - c^2(1 - y^2)(1 - k^2 y^2) = (y^2 - a^2)^3; \tag{29}$$

on en déduit, en identifiant les coefficients,

$$b = \frac{a^6 k^2 - 3a^2}{2}, \tag{30}$$

$$c = a^3, \tag{31}$$

$$3 - 4(1 + k^2)a^2 + 6k^2 a^4 - k^4 a^8 = 0; \tag{32}$$

cette dernière équation est précisément celle qu'il faudrait résoudre si l'on avait

$y = 0$. La formule (25) donnera

$$(33) \qquad x = \frac{r}{3} + \sum \frac{1}{9} \sqrt[3]{y^3 + y\,\frac{a^6 k^2 - 3a^2}{2} + a^3 \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

la somme s'étendant aux valeurs de a données par l'équation (31).

Points d'inflexion des courbes du troisième degré.

623. La droite tangente à un point d'inflexion d'une courbe du troisième degré coupe la courbe en trois points confondus en un seul, et si l'on désigne par u (617) la valeur de l'intégrale qui correspond à l'un de ces points, on aura

$$3u = C + 4m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1},$$

et l'on voit une liaison très-intime entre la recherche des points d'inflexion et la recherche de $\sin am \frac{C}{3}$ connaissant $\sin am C$. On aura pour valeurs distinctes de u

$$\begin{array}{lll}
\frac{C}{3} - \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3}, & \frac{C}{3}, & \frac{C}{3} + \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3}, \\
\frac{C}{3} + \frac{4\omega}{3} - \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3}, & \frac{C}{3} + \frac{4\omega}{3}, & \frac{C}{3} + \frac{4\omega}{3} - \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3}, \\
\frac{C}{3} - \frac{4\omega}{3} - \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3}, & \frac{C}{3} - \frac{4\omega}{3}, & \frac{C}{3} - \frac{4\omega}{3} + \frac{2\omega'\sqrt{-1}}{3},
\end{array}$$

ce qui indique neuf points d'inflexion. La somme des trois valeurs de u, qui ne se trouvent ni sur une même ligne horizontale, ni sur une même ligne verticale, est égale à C, et les trois points correspondants sont par conséquent en ligne droite. Il en est de même si l'on prend les trois valeurs de u situées dans une même ligne ou dans une même colonne.

CHAPITRE IV.

EXPRESSION DES FONCTIONS SOUS FORME DE PRODUITS.

Première recherche des formules.

624. Pour transformer $\sin x$ en un produit d'un nombre infini de facteurs, nous avons pris (I, **404**) pour point de départ l'expression de $\sin nx$ en fonction de $\sin x$ qui forme un polynôme entier; les racines, lorsqu'on y considère $\sin x$ comme inconnu, sont données *à priori* par les propriétés des lignes trigonométriques. Une marche toute semblable conduira à la décomposition de $\sin am x$ en produit d'un nombre infini de facteurs.

On a trouvé (**615**)

$$\sin am(2p+1)x = \frac{P}{Q}, \tag{1}$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de $\sin am x$, la première de degré $(2p+1)^2$, et la seconde de degré $(2p+1)^2-1$; les racines de l'équation $P=0$ sont les valeurs de $\sin am x$ pour lesquelles on a $\sin am(2p+1)x=0$: il est aisé de les calculer.

On doit avoir

$$(2p+1)x = 2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1},$$

m et n désignant des nombres entiers quelconques. On a par conséquent

$$\sin am x = \sin am\left(\frac{2m\omega}{2p+1} + \frac{2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right). \tag{2}$$

Pour obtenir les valeurs distinctes exprimées par cette formule, il suffit de faire varier m de 1 à $4p+2$, et n de 1 à $2p+1$, car 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$ étant des périodes, l'addition de $4p+2$ à la valeur de m ou de $2p+1$ à celle de n ne change rien à la valeur de l'expression (2). Le nombre total des combinaisons ainsi formées est $2(2p+1)^2$; mais le nombre des valeurs de $\sin am x$ est moitié moindre.

Le nombre des valeurs distinctes exprimées par la formule (2) est donc $(2p+1)^2$, et pour les obtenir toutes, il est aisé de voir qu'il suffit de faire varier m et n chacun de $-p$ à $+p$.

La fonction P est, d'après cela, de la forme

$$(3)\qquad C\sin am x \prod_{-p}^{p}\left(\sin am x - \sin am \frac{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right),$$

C désignant une constante, et le signe $\prod_{-p}^{p}$ indiquant le produit de tous les facteurs obtenus quand on attribue aux nombres entiers m et n les valeurs comprises entre $-p$ et $+p$, et supprimant seulement celle qui correspond à $m=0$, $n=0$, qui a été séparée et écrite en dehors du signe $\prod$.

On verra d'une manière toute semblable que le dénominateur Q, qui doit s'annuler quand $\sin am(2p+1)x$ est infini, est de la forme

$$(4)\qquad C\prod_{-p}^{p}\left[\sin am x - \sin am \frac{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right],$$

en supprimant toutefois dans le dernier produit, qui sans cela serait de degré $(2p+1)$, le facteur correspondant à $m=0$, $n=p$, qui a une valeur infinie.

On a par conséquent

$$(5)\qquad \sin am(2p+1)x = \frac{C}{C'}\,\frac{\sin am x \prod_{-p}^{p}\left(\sin am x - \sin am \frac{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right)}{\prod_{-p}^{p}\left[\sin am x - \sin am \frac{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right]}.$$

Pour déterminer le rapport $\frac{C}{C'}$, supposons x infiniment petit; $\sin am(2p+1)x$ pourra être remplacé par $(2p+1)x$, $\sin am x$ par x, et les facteurs binômes du second membre seront réduits à leurs seconds termes; on a donc, en supprimant le facteur x,

$$(6)\qquad 2p+1 = \frac{C}{C'}\,\frac{\prod_{-p}^{p}\sin am \frac{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}}{\prod_{-p}^{p}\sin am \frac{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}}.$$

La formule (5) devient enfin

$$(7)\qquad \sin am(2p+1)x = (2p+1)\sin am x\,\frac{\prod_{-p}^{p}\left(1 - \frac{\sin am x}{\sin am \frac{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}}\right)}{\prod_{-p}^{p}\left[1 - \frac{\sin am x}{\sin am \frac{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}}\right]}.$$

On en déduit, en posant $(2p+1)x = z$,

$$(8)\qquad \sin am\, z = (2p+1)\sin am\,\frac{z}{2p+1}\;\frac{\Pi_{-p}^{p}\left[1-\dfrac{\sin am\,\dfrac{z}{2p+1}}{\sin am\left(\dfrac{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right)}\right]}{\Pi_{-p}^{p}\left\{1-\dfrac{\sin am\,\dfrac{z}{2p+1}}{\sin am\left[\dfrac{2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}\right]}\right\}};$$

z restant constant, faisons croître p indéfiniment : $\sin am\,\dfrac{z}{2p+1}$ pourra être remplacé par $\dfrac{z}{2p+1}$, le rapport

$$\frac{\sin am\,\dfrac{z}{2p+1}}{\sin am\,\dfrac{h}{2p+1}},$$

a, quel que soit h, $\dfrac{z}{h}$ pour limite, et l'on a ainsi

$$(9)\qquad \sin am\, z = z\,\Pi_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1-\dfrac{z}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)}{\left[1-\dfrac{z}{2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1}}\right]},$$

m et n devant prendre toutes les valeurs entières positives et négatives, à l'exception bien entendu des valeurs $m=0$, $n=0$ qui doivent être exclues au numérateur.

625. Nous devons faire observer immédiatement, comme nous l'avons fait (I, 404), que la formule précédente n'est pas rigoureusement démontrée, elle repose en effet sur la substitution du rapport de deux arguments à celui de leurs sinus d'amplitude; or cette substitution n'est permise que quand les variables sont infiniment petites, et l'expression

$$\frac{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}{2p+1}$$

ne tend vers zéro lorsque p augmente que dans le cas où m et n restent tous deux finis; ces nombres devant varier l'un et l'autre de $-p$ à $+p$, notre démonstration cesse de s'appliquer pour des facteurs dont le nombre est infiniment croissant, et il est indispensable, comme dans le cas où il s'agissait d'un sinus (I, 404), de démontrer *à posteriori* l'exactitude de la formule obtenue.

Nous remarquons d'ailleurs que pour obtenir par induction la formule (9), on

peut assimiler, *à priori*, $\sin am z$ à une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur se décomposeront en facteurs correspondants à leurs diverses racines C'est par des considérations semblables qu'Euler a déduit pour la première fois l'expression de $\sin x$ en produits, et que nous aurions pu écrire de suite la formule (9), sauf à en démontrer ensuite l'exactitude.

Contentons-nous de cette méthode rapide pour écrire les formules

$$(10)\qquad \cos am z = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{(2m+1)\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}}{1 - \dfrac{z}{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}},$$

$$(11)\qquad \Delta am z = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{(2m+1)\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}}{1 - \dfrac{z}{2m\omega + (2n+1)\omega'\sqrt{-1}}},$$

où m et n doivent prendre toutes les valeurs positives ou négatives.

626. Avant de démontrer les formules précédentes, il importe de remarquer que dans les produits tels que ceux qui forment les numérateurs et les dénominateurs des seconds membres dans les formules (9), (10) et (11), on doit préciser l'ordre dans lequel sont appelés les facteurs, et la limite peut varier avec celui que l'on adopte. C'est une remarque analogue à celle que nous avons faite à l'occasion des séries (I, 248), qui peuvent en restant convergentes changer de valeur avec l'ordre dans lequel on écrit leurs différents termes.

Considérons d'abord un exemple fort simple analogue à celui qui nous occupe. On a (I, 404)

$$(12)\qquad \frac{\sin \pi x}{\pi x} = (1 - x^2)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cdots,$$

et l'on peut dire, sans ajouter aucune explication, que $\sin \pi x$ est représenté par le produit

$$\pi x \prod \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

dans lequel il faut attribuer à n toutes les valeurs entières de 0 à ∞, et le produit est convergent quel que soit l'ordre des facteurs. Mais si l'on écrit

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

le produit deviendra

$$(13)\qquad x(1-x)(1+x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)\left(1+\frac{x}{m}\right)\cdots,$$

que l'on peut écrire

$$(14)\qquad x\prod\left(1+\frac{x}{m}\right),$$

le nombre entier m variant de $-\infty$ à $+\infty$. Mais sous cette forme il faut préciser l'ordre des facteurs : le produit n'est plus convergent indépendamment de l'ordre qu'on leur attribue. Les facteurs correspondants aux valeurs positives de m ont un produit infini, il en est de même du produit correspondant aux valeurs négatives, et si l'on écrivait par exemple

$$(15)\qquad \frac{\sin\pi x}{\pi}=\left[x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right)\cdots\right]\left[(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\right],$$

l'expression n'aurait plus de sens. Il faut, en cherchant la limite du produit (14), égaler toujours le nombre des facteurs qui correspondent aux valeurs positives et négatives de m, et si l'on procédait autrement la limite serait altérée.

Supposons en effet que dans le produit (14) on fasse varier m de $-p$ à $+kp$, k étant un nombre fixe et p croissant indéfiniment. La limite obtenue en faisant varier m de $-p$ à $+p$ étant évidemment $\frac{\sin\pi x}{\pi}$, le résultat sera

$$\frac{\sin\pi x}{\pi}\left(1+\frac{x}{p+1}\right)\left(1+\frac{x}{p+2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{kp}\right).$$

Cherchons donc la limite du produit

$$P=\left(1+\frac{x}{p+1}\right)\left(1+\frac{x}{p+2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{kp}\right).$$

On a

$$(16)\qquad lP=l\left(1+\frac{x}{p+1}\right)+l\left(1+\frac{x}{p+2}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{x}{kp}\right),$$

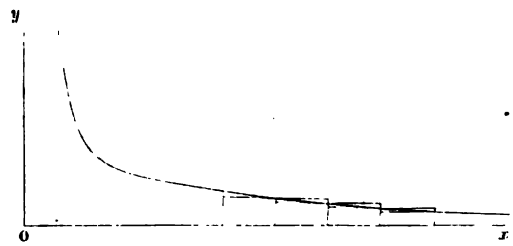
c'est-à-dire, puisque p croît indéfiniment, en négligeant les termes infiniment petits par rapport à ceux que l'on conserve,

$$lP=\frac{x}{p+1}+\frac{x}{p+2}+\ldots+\frac{x}{kp}.$$

Pour trouver la limite de la somme

$$(17)\qquad \frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{kp},$$

considérons l'hyperbole dont l'équation est $y = \frac{1}{x}$. Les divers termes de (17) représentent les rectangles ayant pour base l'unité, et inscrits dans l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, et les ordonnées qui correspondent aux abscisses p et kp.



Elle représente aussi les rectangles de base unité circonscrits à l'aire comprise entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses $p+1$ et $kp+1$, elle est donc comprise entre

$$\int_p^{pk} \frac{dx}{x} = lk,$$

et

$$\int_{p+1}^{pk+1} \frac{dx}{x} = l\frac{pk+1}{p+1}.$$

La limite lorsque p augmente indéfiniment est évidemment égale à lk. L'expression (17) a par conséquent pour limite xlk, P tend vers k^x, et la limite de l'expression (15) est

$$\frac{k^x \sin \pi x}{\pi},$$

où k est arbitraire.

627. Une remarque semblable s'applique au produit

$$\Pi\left(1 + \frac{z}{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}\right),$$

où m et n doivent prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

La limite d'un tel produit n'est pas déterminée, elle dépend de l'ordre dans lequel on y fait entrer les facteurs qui le composent. Soient en effet U la limite obtenue en multipliant tous les facteurs pour lesquels les points dont les coordonnées sont m et n se trouvent dans l'intérieur d'une courbe dont les dimensions grandissent indéfiniment, et U′ la limite relative à une autre forme de ce contour limite entourant de toutes parts le premier contour, et grandissant indéfiniment avec

lui. On aura évidemment

$$\frac{U'}{U} = \prod\left(1 + \frac{z}{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}\right),$$

le produit $\prod$ s'étendant cette fois à toutes les valeurs de m et n qui représentent les coordonnées d'un point situé entre les deux contours. On en conclut

$$lU' - lU = \sum l\left(1 + \frac{z}{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}\right),$$

c'est-à-dire, en remplaçant chaque logarithme par la série qui le représente,

$$lU' - lU = z\sum \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}} - \frac{z^2}{2}\sum \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1})^2} + \ldots.$$

Si les contours limites ont constamment pour centre l'origine des coordonnées, la somme qui multiplie z est nulle comme composée de termes égaux deux à deux, et de signes contraires : celles qui multiplient z^3, z^5,... sont dans le même cas; les coefficients de z^4, z^6,... sont négligeables, parce que le module de la puissance -4 de $m\omega + n\omega'\sqrt{-1}$, est infiniment petit par rapport à celui de la puissance -2. On aura donc en général

$$lU' - lU = -Az^2.$$

A étant indépendant de z, on en déduit

$$U' = Ue^{-Az^2},$$

et par la manière d'effectuer le produit on peut par conséquent multiplier ou diviser la limite par un facteur de la forme e^{-Az^2}.

628. Étudions actuellement la fonction

$$(18) \qquad \varphi(z) = z\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{2m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}\right),$$

en y faisant varier m entre deux limites $-M$ et $+M$, et n entre $-N$ et $+N$, M et N croissant l'un et l'autre indéfiniment de telle sorte que le rapport $\frac{M}{N}$ devienne lui-même infini.

La fonction $\varphi(z)$ ainsi *définie* satisfait aux deux équations

$$(19) \qquad \begin{cases} \varphi(z + 2\omega) = -\varphi(z), \\ \varphi(z + 2\omega'\sqrt{-1}) = -\varphi(z)e^{-\frac{\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi}. \end{cases}$$

On a en effet

$$\varphi(z+2\omega)=(z+2\omega)\prod\left(1+\frac{z+2\omega}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right).$$

Mais on a identiquement

$$1+\frac{z+2\omega}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}=\left(1+\frac{z}{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)\frac{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs, pour $m=-1$, $n=0$, on a

$$1+\frac{z+2\omega}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}=-\frac{z}{2\omega},$$

dont le produit par $z+2\omega$ est

$$-z\left(1+\frac{z}{2\omega}\right),$$

et l'on a

$$\varphi(z+2\omega)=-z\prod\left[1+\frac{z}{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right]\prod\left[\frac{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right].$$

La limite de l'expression

$$\prod\left[\frac{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right]$$

est indépendante de z; nommons-la A, nous aurons

$$\varphi(z+2\omega)=-Az\prod\left[1+\frac{z}{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right].$$

On en conclut

$$(20)\qquad \frac{\varphi(z+2\omega)}{\varphi(z)}=-A\frac{\prod\left[1+\frac{z}{2(m+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right]}{\prod\left(1+\frac{z}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)}.$$

Lorsque m varie de $-M$ à $+M$, et n de $-N$ à $+N$, les produits qui figurent au second membre de (20) ont un grand nombre de facteurs communs; il reste, en les supprimant,

$$\frac{\varphi(z+2\omega)}{\varphi(z)}=-A\frac{\prod\left[1+\frac{z}{2(M+1)\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right]}{\prod\left(1+\frac{z}{-2M\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)},$$

les produits étant formés par les facteurs qui correspondent aux valeurs de n comprises entre $-N$ et $+N$. Mais N étant par hypothèse infiniment petit par rapport à M, les deux produits ont évidemment pour limite l'unité, et l'on a

$$\varphi(z+2\omega) = -A\varphi(z).$$

Pour déterminer A, supposons $z = -\omega$, nous aurons

$$\varphi(\omega) = -A\varphi(-\omega); \tag{21}$$

et comme le changement de z en $-z$ ne fait que changer les uns dans les autres les facteurs du produit $\frac{\varphi(z)}{z}$, $\varphi(z)$ est une fonction impaire de z, et l'équation (21) donne $A = 1$; on a donc enfin

$$\varphi(z+2\omega) = -\varphi(z). \tag{22}$$

629. Remplaçons en second lieu z par $z + 2\omega'\sqrt{-1}$, on trouvera, absolument comme (628),

$$\frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)} = -\frac{\prod\left[1+\frac{z}{2m\omega+2(n+1)\omega'\sqrt{-1}}\right]}{\prod\left(1+\frac{z}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)}\,\frac{\prod\left[2m\omega+2(n+1)\omega'\sqrt{-1}\right]}{\prod\left(2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}\right)}.$$

Dans le second quotient qui figure au second membre, on ne doit pas supposer au numérateur $m = 0$, $n = 0$, ni au dénominateur $m = 0$, $n = -1$, et pour tenir compte de cette restriction, il suffit de supprimer le signe $-$, qui est détruit par le rapport $\frac{2\omega'\sqrt{-1}}{-2\omega'\sqrt{-1}} = -1$; on a donc, en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)} = \frac{\prod\left[1+\frac{z}{2m\omega+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}\right]}{\prod\left(1+\frac{z}{2m\omega-2N\omega'\sqrt{-1}}\right)}\,\frac{\prod\left[2m\omega+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}\right]}{\prod\left(2m\omega-2N\omega'\sqrt{-1}\right)},$$

m variant entre les limites $-M$ et $+M$ qui sont infiniment grandes par rapport à N, dont la valeur fixe doit elle-même être considérée comme infinie.

Or on a

$$\frac{1+\frac{z}{2m\omega+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}}{1+\frac{z}{2m\omega-2N\omega'\sqrt{-1}}}\,\frac{2m\omega+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega-2N\omega'\sqrt{-1}} = \frac{1+\frac{z+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega}}{1+\frac{z-2N\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega}},$$

et pour $m = 0$

$$\frac{1+\dfrac{z}{2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}}{1-\dfrac{z}{2N\omega'\sqrt{-1}}}\,\frac{2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}{-2N\omega'\sqrt{-1}}=\frac{z+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}{z-2N\omega'\sqrt{-1}},$$

et par conséquent

$$\frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)}=\frac{[z+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}]\prod\left[1+\dfrac{z+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega}\right]}{(z-2N\omega'\sqrt{-1})\prod\left(1+\dfrac{z-2N\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega}\right)},$$

c'est-à-dire (I, 404)

$$\frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)}=\frac{\sin[z+2(N+1)\omega'\sqrt{-1}]\dfrac{\pi}{2\omega}}{\sin(z-2N\omega'\sqrt{-1})\dfrac{\pi}{2\omega}},$$

ou, en remplaçant les sinus par leur expression exponentielle,

$$\frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)}=\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\omega}[2(N+1)\omega'\sqrt{-1}+z]}-e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\omega}[2(N+1)\omega'\sqrt{-1}+z]}}{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\omega}(z-2N\omega'\sqrt{-1})}-e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\omega}(z-2N\omega'\sqrt{-1})}}$$

$$=\frac{e^{\frac{z\pi\sqrt{-1}}{2\omega}}e^{-(N+1)\frac{\pi\omega'}{\omega}}-e^{-\frac{z\pi\sqrt{-1}}{2\omega}}e^{(N+1)\frac{\pi\omega'}{\omega}}}{e^{\frac{z\pi\sqrt{-1}}{2\omega}}e^{\frac{N\pi\omega'}{\omega}}-e^{-\frac{z\pi\sqrt{-1}}{2\omega}}e^{-\frac{N\pi\omega'}{\omega}}};$$

$e^{-\frac{N\pi\omega'}{\omega}}$ devient nul à la limite, et l'on a

$$(22)\qquad \frac{\varphi(z+2\omega'\sqrt{-1})}{\varphi(z)}=-e^{-\frac{z\pi\sqrt{-1}}{\omega}}e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

ce qui est la seconde formule (19) annoncée (628).

630. En considérant de même l'expression

$$\psi(z)=\prod\left[1+\frac{z}{2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1}}\right],$$

dans laquelle m varie de $-M$ à $+M$, et n de $-N$ à $+N$, M et N grandissant indéfiniment de telle sorte que le rapport $\frac{M}{N}$ soit infiniment grand, on trouvera par

des calculs tout semblables

$$(23)\qquad \begin{cases} \psi(z+2\omega)=\psi(z), \\ \psi(z+2\omega'\sqrt{-1})=\psi(z)e^{\pi\frac{\omega'}{\omega}}e^{-\frac{z\pi\sqrt{-1}}{\omega}}. \end{cases}$$

631. Les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont périodiques, et elles ont pour période commune 4ω. De plus, d'après les équations (19) et (23), le rapport $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ n'est pas altéré quand on augmente z de $2\omega'\sqrt{-1}$, et ce rapport a les deux périodes 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$ comme la fonction $\sin am z$. De plus, ce rapport est nul pour les valeurs de la forme

$$z=2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1},$$

et infini pour

$$z=2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1},$$

m et n désignant des nombres entiers quelconques. Les deux fonctions $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ et $\sin am z$, toutes deux doublement périodiques et toutes deux bien définies, ont donc les mêmes périodes 4ω et $2\omega'\sqrt{-1}$; elles deviennent nulles et infinies pour les mêmes valeurs de la variable, et ne peuvent par conséquent (542) différer que par un facteur constant, en sorte que l'on a

$$(24)\qquad \sin am z=C\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=C\frac{z\prod\left(1+\frac{z}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)}{\prod\left[1+\frac{z}{2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1}}\right]},$$

et le rapport $\frac{\sin am z}{z}$ devenant égal à l'unité pour $z=0$, on a enfin $C=1$. Il ne faut pas oublier que dans le second membre de (24) les produits doivent s'étendre aux valeurs de m comprises entre $-M$ et $+M$, et à celles de n comprises entre $-N$ et $+N$, M et N augmentant ensemble suivant une loi telle que $\frac{M}{N}$ devienne infini.

Les formules (10), (11) qui représentent $\cos am z$ et $\Delta am z$ se démontreraient absolument de la même manière.

Transformation des produits doubles en produits simples.

632. Reprenons la formule (24) que l'on peut évidemment écrire

$$\sin am z=z\frac{\prod\left(1-\frac{z}{2m\omega+2n\omega'\sqrt{-1}}\right)}{\prod\left[1-\frac{z}{2m\omega+(2n+1)\omega'\sqrt{-1}}\right]}.$$

Dans le produit qui forme le numérateur réunissons les facteurs qui correspondent à une même valeur de n, $n = p$; ces facteurs sont

$$\left(1 - \frac{z}{2p\omega'\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{z}{2\omega + 2p\omega'\sqrt{-1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{2m\omega + 2p\omega'\sqrt{-1}}\right)\cdots$$
$$\left(1 - \frac{z}{-2\omega + 2p\omega'\sqrt{-1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{-2m\omega + 2p\omega'\sqrt{-1}}\right)\cdots$$

On a

$$1 - \frac{z}{2m\omega + 2p\omega'\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{2p\omega'\sqrt{-1} - z}{2m\omega}\right)\frac{1}{1 + \frac{2p\omega'\sqrt{-1}}{2m\omega}},$$

et le produit des valeurs que prend cette expression lorsque m varie de $-M$ à $+M$, M croissant indéfiniment, est (I, 404), en y comprenant les facteurs qui correspondent à $m = 0$,

$$(25) \qquad \frac{\sin\left(2p\omega'\sqrt{-1} - z\right)\frac{\pi}{2\omega}}{\sin\frac{2p\omega'\pi\sqrt{-1}}{2\omega}}.$$

Le produit des facteurs correspondants à $n = -p$ est

$$(26) \qquad \frac{\sin\left(2p\omega'\sqrt{-1} + z\right)\frac{\pi}{2\omega}}{\sin\frac{2p\omega'\sqrt{-1}\,\pi}{2\omega}}.$$

Le produit des deux expressions (25) et (26) est

$$\frac{\sin^2\frac{p\omega'\pi\sqrt{-1}}{\omega} - \sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{p\omega'\pi\sqrt{-1}}{\omega}} = 1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{p\omega'\pi\sqrt{-1}}{\omega}}.$$

Le produit des facteurs qui correspondent à $n = 0$ est, y compris le facteur z, $\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega}$, et le numérateur de $\sin am z$ est par conséquent

$$\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{2\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots$$

On transformera de même le dénominateur en

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{3\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\cdots,$$

et par conséquent

$$(27)\qquad \sin am\,z=\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega}\,\frac{\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{2\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{3\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\cdots}.$$

En réunissant de même tous les facteurs qui dans le développement de $\cos am\,z$ correspondent à une valeur p de n, on aura

$$\Pi\left[1-\frac{z}{(2m+1)\omega+2p\omega'\sqrt{-1}}\right]=\frac{\Pi\left[1+\frac{2p\omega'\sqrt{-1}-z}{(2m+1)\omega}\right]}{\Pi\left[1+\frac{2p\omega'\sqrt{-1}}{(2m+1)\omega}\right]}=\frac{\cos\left(2p\omega'\sqrt{-1}-z\right)\frac{\pi}{2\omega}}{\cos\frac{p\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}.$$

Or on a

$$\frac{\cos\left(2p\omega'\sqrt{-1}-z\right)\frac{\pi}{2\omega}}{\cos\frac{p\omega'\sqrt{-1}\,\pi}{\omega}}\,\frac{\cos\left(-2p\omega'\sqrt{-1}-z\right)\frac{\pi}{2\omega}}{\cos\frac{-p\omega'\sqrt{-1}\,\pi}{\omega}}=\frac{\cos^2\frac{p\omega'\sqrt{-1}}{\omega}\pi-\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{p\omega'\sqrt{-1}\,\pi}{\omega}},$$

et le numérateur de $\cos am\,z$ se réduit à

$$\cos\frac{\pi z}{2\omega}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{2\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots,$$

le dénominateur est le même que celui de $\sin am\,z$, et l'on a

$$(28)\qquad \cos am\,z=\cos\frac{\pi z}{2\omega}\,\frac{\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{2\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\frac{3\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\cdots}.$$

On trouvera de même

$$\Delta am\, z = \frac{\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2 \dfrac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2 \dfrac{3\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\cdots}{\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 \dfrac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 \dfrac{3\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}}\right)\cdots}.$$

633. Ces diverses formules peuvent se simplifier. Posons

$$e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}} = q, \quad \frac{\pi z}{2\omega} = x;$$

on a

$$\sin \frac{m\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega} = \frac{q^m - q^{-m}}{2\sqrt{-1}} = \frac{(1 - q^{2m})\sqrt{-1}}{2q^m},$$

$$\cos \frac{m\pi\omega'\sqrt{-1}}{\omega} = \frac{q^m + q^{-m}}{2} = \frac{1 + q^{2m}}{2q^m},$$

et par conséquent

$$1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{m\omega'\sqrt{-1}}{\omega}} = \frac{1 - 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}}{(1 - q^{2m})^2},$$

$$1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 \dfrac{m\omega'\sqrt{-1}}{\omega}} = \frac{1 + 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}}{(1 + q^{2m})^2},$$

$$1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{(2m+1)\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}} = \frac{1 - 2q^{2m+1}\cos 2x + q^{4m+2}}{(1 - q^{2m+1})^2}.$$

Si donc on pose

$$A = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}\right]^2,$$

$$B = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}\right]^2,$$

$$C = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right]^2,$$

on obtient les formules suivantes

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin am\,\frac{2\omega x}{\pi}\\
&\quad=\frac{2A\omega}{\pi}\sin x\,\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},\\
&\cos am\,\frac{2\omega x}{\pi}\\
&\quad=B\cos x\,\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},\\
&\Delta am\,\frac{2\omega x}{\pi}\\
&\quad=C\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}.
\end{aligned}\right.$$

634. Si dans la troisième des formules (30) on fait $x=\frac{\pi}{2}$, le premier membre devient $\Delta am\omega$, c'est-a-dire (596) $\sqrt{1-k^2}$. On a donc

$$\sqrt{1-k^2}=k'=C\left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2=C^2,$$

par conséquent

$$(31)\qquad C=\sqrt{k'}=\sqrt[4]{1-k^2}.$$

Si dans la première des formules (30) on fait la même hypothèse $x=\frac{\pi}{2}$, le premier membre devient égal à l'unité, et l'on a

$$1=\frac{2A\omega}{\pi}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2=\frac{2A\omega}{\pi}\,\frac{C}{B}=\frac{2A\omega\sqrt[4]{1-k^2}}{\pi B},$$

par conséquent

$$(32)\qquad B=\frac{2A\omega}{\pi}\sqrt[4]{1-k^2}.$$

Pour calculer A posons $e^{x\sqrt{-1}}=u$; si l'on change x en $x+\frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}$, u se change en $u\sqrt{q}$, et $\sin am\,\frac{2\omega x}{\pi}$ devient (605)

$$\sin am\left(\frac{2\omega x}{\pi}+\omega\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{k\sin am\,\frac{2\omega x}{\pi}}.$$

En remplaçant $\sin x$ et $\cos 2x$ par leurs expressions exponentielles, et remarquant que $1 - 2q^n \cos 2x + q^{2n} = (1 - q^n u^2)(1 - q^n u^{-2})$, on a

$$(33)\qquad \sin am \frac{2\omega x}{\pi} = \frac{A\omega}{\pi} \frac{u - u^{-1}}{\sqrt{-1}} \frac{[(1-q^2u^2)(1-q^4u^2)\ldots][(1-q^2u^{-2})(1-q^4u^{-2})\ldots]}{[(1-qu^2)(1-q^3u^2)\ldots][(1-qu^{-2})(1-q^3u^{-2})\ldots]},$$

et en changeant x en $x + \frac{\pi\omega'\sqrt{-1}}{2\omega}$, et par conséquent u en $u\sqrt{q}$,

$$(34)\qquad \frac{1}{k \sin am \frac{2\omega x}{\pi}}$$

$$= \frac{A\omega}{\pi} \frac{u\sqrt{q} - u^{-1}\sqrt{q}^{-1}}{\sqrt{-1}} \frac{[(1-q^3u^2)(1-q^5u^2)\ldots][1-qu^{-2})(1-q^3u^{-2})\ldots]}{[(1-q^2u^2)(1-q^4u^2)\ldots][1-u^{-2})(1-q^2u^{-2})\ldots},$$

en multipliant membre à membre les équations (33) et (34) et remarquant que $u\sqrt{q} - u^{-1}\sqrt{q}^{-1} = \frac{1-qu^2}{-u\sqrt{q}}$, $u - u^{-1} = u(1 - u^{-2})$,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{A\omega}{\pi}\right)^2,$$

ou

$$(35)\qquad A = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\omega\sqrt{k}}.$$

On en conclut

$$(36)\qquad B = 2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}},$$

et en remplaçant A, B et C par leurs valeurs (31), (35) et (36),

$$\sin am \frac{2\omega x}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x + q^4)(1-2q^4\cos 2x + q^8)(1-2q^6\cos 2x + q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x + q^2)(1-2q^3\cos 2x + q^6)(1-2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots},$$

$$\cos am \frac{2\omega x}{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x + q^4)(1+2q^4\cos 2x + q^8)(1+2q^6\cos 2x + q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x + q^2)(1-2q^3\cos 2x + q^6)(1-2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots},$$

$$\Delta am \frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{k'} \frac{(1+2q\cos 2x + q^2)(1+2q^3\cos 2x + q^6)(1+2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x + q^2)(1-2q^3\cos 2x + q^6)(1-2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots}.$$

635. Les expressions obtenues pour A, B et C permettent d'exprimer élégamment le module k en fonction de la quantité q, $e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}$, et par conséquent du rapport des périodes.

On a

$$B = 2\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}{[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2},$$

$$C = \sqrt{k'} = \frac{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}{[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^2},$$

et en divisant

$$\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right]^2,$$

par conséquent

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

q étant égal à $e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ est plus petit que l'unité, et toutes ces formules sont extrêmement convergentes.

CHAPITRE V.

FONCTIONS $\mathrm{H}(x)$ ET $\Theta(x)$ DE JACOBI.

636. Reprenons la formule obtenue (634)

$$(1)\quad \sin am\,\frac{2\omega x}{\pi}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\,2\sqrt[4]{q}\,\frac{\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\cdots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots}.$$

Le numérateur et le dénominateur du second membre ont été considérés séparément par Jacobi qui les a désignés par des notations particulières en donnant à leur théorie qu'il a créée, une importance égale à celle des fonctions elliptiques elles-mêmes.

Posons

$$(2)\quad \Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right) = \mathrm{C}(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots,$$

$$(3)\quad \mathrm{H}\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right) = 2\mathrm{C}\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\cdots,$$

C étant une constante dont la valeur sera ultérieurement choisie; nous aurons

$$(4)\qquad \sin am\,\frac{2\omega x}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)}.$$

et, en remplaçant $\frac{2\omega x}{\pi}$ par x,

$$(5)\qquad \sin am\,x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}.$$

Les fonctions $\cos am\,x$ et $\Delta am\,x$ s'expriment aussi par les deux fonctions nouvelles; on a (634)

$$(6)\quad \cos am\,\frac{2\omega x}{\pi}$$
$$= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\cdots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots},$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad \cos am\,\frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}\left[\frac{2\omega}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)},$$

et par conséquent

$$(8)\qquad \cos am\,x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)}.$$

On a enfin (634)

$$(9)\qquad \Delta am\,\frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

c'est-à-dire

$$(10)\qquad \Delta am\,\frac{2\omega x}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta\left[\frac{2\omega}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)},$$

et par conséquent

$$(11)\qquad \Delta am\,x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)}.$$

Si l'on pose

$$(12)\qquad \mathrm{H}(x+\omega) = \mathrm{H}_1(x),$$

$$(13)\qquad \Theta(x+\omega) = \Theta_1(x),$$

les trois fonctions elliptiques se trouvent exprimées par les formules

$$(14)\qquad \sin am\,x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$(15)\qquad \cos am\,x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$(16)\qquad \Delta am\,x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Les équations identiques

$$\sin^2 am\,x + \cos^2 am\,x = 1,$$

$$k^2\sin^2 am\,x + \Delta^2 am\,x = 1$$

donnent entre les quatre fonctions les deux relations algébriques

$$(17)\qquad \mathrm{H}^2(x) + k'\mathrm{H}_1^2(x) = k\Theta^2(x),$$

$$(18)\qquad k\mathrm{H}^2(x) + k'\Theta_1^2(x) = \Theta^2(x).$$

637. Les fonctions $H(x)$ et $\Theta(x)$ peuvent se ramener aisément l'une à l'autre. On a par définition

$$(19)\quad H(x) = 2C\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2\omega}\left(1-2q^2\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^4\right)\left(1-2q^4\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^8\right)\left(1-2q^6\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{12}\right)\cdots,$$

mais

$$1-2q^n\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{2n}=\left(1-q^n e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-q^n e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right),$$

$$\sin\frac{\pi x}{2\omega}=\frac{e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}-e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}}{2\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\frac{1-e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}}{2}\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$(20)\quad H(x)=C\sqrt[4]{q}\,e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\sqrt{-1}\left(1-e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-q^2e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-q^2e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots.$$

En changeant x en $x+\omega'\sqrt{-1}$, et se rappelant que $e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}}=q$, on en déduit

$$(21)\quad H(x+\omega'\sqrt{-1})$$
$$=Cq^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\sqrt{-1}\left(1-qe^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-qe^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-q^3e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\left(1-q^3e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\right)\cdots,$$

et en réunissant deux à deux les facteurs conjugués

$$(22)\quad H(x+\omega'\sqrt{-1})$$
$$=C\sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^6\right)$$
$$\times\left(1-2q^5\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{10}\right)\cdots,$$

ou enfin, d'après la formule (2),

$$(23)\qquad H(x+\omega'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\Theta(x).$$

On trouvera d'une manière toute semblable

$$(24)\qquad \Theta(x+\omega'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}H(x),$$

et ces formules ramènent évidemment l'une à l'autre les fonctions H et Θ.

638. Si dans les formules (23) et (24) on remplace x par $x + \omega'\sqrt{-1}$, on trouve, comme on devait le prévoir (628),

$$(25)\qquad \Theta(x + 2\omega'\sqrt{-1}) = -\frac{1}{q}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\Theta(x) = -e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega' - x\sqrt{-1})}\Theta(x),$$

$$(26)\qquad \mathrm{H}(x + 2\omega'\sqrt{-1}) = -\frac{1}{q}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}\mathrm{H}(x) = -e^{\frac{\pi}{\omega}(\omega' - x\sqrt{-1})}\mathrm{H}(x).$$

Les formules (1) et (2) donnent enfin immédiatement

$$(27)\qquad \Theta(x + 2\omega) = \Theta(x),$$

$$(28)\qquad \mathrm{H}(x + 2\omega) = -\mathrm{H}(x).$$

La comparaison de ces quatre formules avec les expressions (14), (15), (16) met en évidence la double périodicité des fonctions elliptiques. On voit, par exemple, par les formules (14) et (25), que x augmentant de $2\omega'\sqrt{-1}$, le numérateur et le dénominateur de $\sin am\, x$ sont multipliés par un même facteur, et que leur rapport ne change pas; l'addition de 2ω à l'argument change au contraire le signe du sinus d'amplitude sans en changer la valeur.

Développement en série des fonctions $\Theta(x)$ *et* $\mathrm{H}(x)$.

639. La fonction $\Theta(x)$ ayant pour période 2ω peut être considérée comme une fonction bien définie de $e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$. Si l'on pose en effet

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

on aura

$$e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} = e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{\omega} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi\alpha}{\omega}\right) = z.$$

A chaque valeur de z correspond, cela est évident, une seule valeur de β, et un nombre infini de valeurs de α différant les unes des autres par un multiple de 2ω, et par conséquent une seule valeur de la fonction $\Theta(x)$ qui peut être regardée comme une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs de z, à l'exception de $z = 0$ et de $z = \infty$, elle peut donc (534) se développer en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de z, c'est-à-dire (car cela revient évidemment au même) suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{\pi x}{\omega}$. Posons donc

$$(29)\qquad \Theta(x) = \sum \mathrm{A}_n e^{\frac{n\pi x\sqrt{-1}}{\omega}};$$

$\Theta(x)$ est une fonction paire qui ne change pas lorsque x se change en $-x$, on en conclut

$$A_n = A_{-n}.$$

Si dans l'équation (25) on remplace les deux membres par leur développement déduit de la formule (29), on obtiendra la relation suivante, qui doit avoir lieu quel que soit x,

$$e^{-\frac{\pi}{\omega}\sqrt{-1}(x+\omega'\sqrt{-1})}\sum A_n e^{\frac{n\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} = -\sum A_n e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+2\omega'\sqrt{-1})},$$

et en égalant les coefficients de $e^{\frac{n\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$ dans les deux membres

$$e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}} A_{n+1} = -A_n e^{-2n\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

c'est-à-dire, à cause de $e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}} = q$,

$$A_{n+1} = -q^{2n+1} A_n;$$

tous les coefficients s'expriment donc en fonction de A_0, et l'on a

$$\begin{aligned}\Theta(x) = A_0\Big(1 - qe^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + q^4 e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} - q^9 e^{\frac{3\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + \ldots \\ - qe^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + q^4 e^{-\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} - q^9 e^{-\frac{3\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + \ldots\Big),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(30)\qquad \Theta(x) = A_0\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi x}{\omega} - \ldots\right).$$

On trouvera de même, en remarquant que $H(x)$ est une fonction impaire,

$$(31)\qquad H(x) = B_0\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2\omega} - q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2\omega} + q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi x}{2\omega} - q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{7\pi x}{2\omega} + \ldots\right);$$

les constantes A_0 et B_0 restent seules à déterminer, et comme l'une d'elles est arbitraire, à cause de la constante C introduite dans la définition des fonctions H et Θ, il suffit de déterminer leur rapport.

C'est la formule (23)

$$H(x + \omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\Theta(x),$$

qui nous permettra de le déterminer. Si, en effet, dans cette formule on remplace

les fonctions $H(x+\omega'\sqrt{-1})$ et $\Theta(x)$ par leur développement en série ordonnée suivant les puissances de $e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}$ qui se déduisent des formules (30) et (31), en y remplaçant le sinus et le cosinus par leur expression sous forme d'exponentielles, on aura

$$(32)\qquad H(x)=\sum\frac{B_0\sqrt{-1}}{2}(-1)^{n-1}q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}e^{\frac{(2n+1)\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}},$$

et, en remplaçant x par $x+\omega'\sqrt{-1}$, remarquant que $e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}}=q$,

$$(33)\qquad \begin{aligned} H(x+\omega'\sqrt{-1})&=\sum\frac{B_0\sqrt{-1}}{2}(-1)^{n-1}q^{\frac{(2n+1)^2}{4}+\frac{(2n+1)}{2}}e^{\frac{(2n+1)\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\\ &=\sum\frac{B_0\sqrt{-1}}{2}q^{-\frac{1}{4}}(-1)^{n-1}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}e^{\frac{2(n+1)\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}q^{(n+1)^2}\\ &=\frac{B_0\sqrt{-1}}{2A_0}q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\Theta(x),\end{aligned}$$

et la comparaison avec (23) donne

$$B_0=2A_0.$$

A_0 reste arbitraire : nous le prendrons égal à l'unité, et nous aurons enfin les deux séries toujours convergentes pour les valeurs réelles ou imaginaires de x,

$$(34)\qquad \Theta(x)=1-2q\cos\frac{\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega}-2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega}+\ldots,$$

$$(35)\qquad H(x)=2\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2\omega}-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2\omega}+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi x}{2\omega}-\ldots\right).$$

640. Nous devons chercher quelle valeur l'hypothèse $A_0=1$ impose à la constante désignée par C (636). Si l'on désigne cette constante par $\varphi(q)$, nous aurons, en égalant les expressions (1) et (2) de $\Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)$ et $H\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)$ aux séries (34) et (35), où l'on remplace x par $\frac{2\omega x}{\pi}$,

$$(36)\qquad \begin{aligned}&\varphi(q)(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots\\ &=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots,\end{aligned}$$

$$(37)\qquad \begin{aligned}&\varphi(q)\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots\\ &=\sin x-q^2\sin 3x+q^6\sin 5x+\ldots+(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)x+\ldots.\end{aligned}$$

En multipliant ces deux équations membre à membre, on a, après avoir rem-

placé q par q^2,

$$(38)\qquad [\varphi(q^2)]^2 \sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots$$
$$=(1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-\ldots)(\sin x-q^4\sin 3x+q^{12}\sin 5x-\ldots),$$

et, à cause de (37), le premier membre peut être remplacé par

$$(39)\qquad \frac{[\varphi(q^2)]^2}{\varphi(q)}[\sin x-q^2\sin 3x+\ldots+(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)x+\ldots].$$

En effectuant, dans le second membre de (38), les multiplications indiquées, et remplaçant les produits de la forme $\cos 2px \sin qx$ par des sommes de sinus, on obtiendra une série de même forme que celle du premier membre, et dans laquelle le coefficient de $\sin x$ devra être $\frac{[\varphi(q^2)]^2}{\varphi(q)}$, cherchons ce coefficient. On a

$$2(-1)^{m+n}q^{2m^2+2n(n+1)}\cos 2mx\sin(2n+1)x$$
$$=(-1)^{m+n}q^{2m^2+2n(n+1)}\sin(2m+2n+1)x-\sin(2m-2n-1)x,$$

ce qui ne donne de terme en $\sin x$ que pour $m=n$, $m=n+1$. Ces termes ont donc pour coefficients $q^{2n(2n+1)}$ et $q^{(2n+1)(2n+2)}$. Lorsque n est nul les deux termes en $\sin x$ deviennent $2\sin x$ et $2q^2\sin x$, mais il ne faut prendre que la moitié du premier, parce que dans le premier facteur du second membre le terme général $2q^{2n^2}\cos 2nx$ doit être réduit à l'unité pour $n=0$; le coefficient de $\sin x$ est donc

$$1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots+q^{p(p+1)}+\ldots,$$

et l'on doit avoir

$$(40)\qquad \frac{[\varphi(q^2)]^2}{\varphi(q)}=1+q^2+q^6+\ldots+q^{p(p+1)}+\ldots;$$

mais la formule (37) donne, quand on y fait $x=\frac{\pi}{2}$,

$$(41)\qquad \varphi(q)[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2=1+q^2+q^6+\ldots+q^{p(p+1)}+\ldots,$$

et des équations (40) et (41) on déduit

$$(42)\qquad \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q)}=(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots.$$

Si l'on fait

$$F(q)=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

on aura

$$(43)\qquad F(q^2)=(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots,$$

et par conséquent

$$(44)\qquad \frac{F(q^2)}{F(q)} = \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q)}.$$

On en déduit, cette équation ayant lieu quel que soit q,

$$(45)\qquad \frac{F(q)}{\varphi(q)} = \frac{F(q^2)}{\varphi(q^2)} = \frac{F(q^4)}{\varphi(q^4)} = \ldots = \frac{F(q^{2n})}{\varphi(q^{2n})}.$$

Or q étant plus petit que l'unité, la limite de ces fractions est $\frac{F(0)}{\varphi(0)}$, c'est-à-dire l'unité, et l'on a

$$\frac{F(q)}{\varphi(q)} = 1.$$

On en conclut

$$(46)\qquad \varphi(q) = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots = C,$$

et par conséquent

$$(47)\qquad \Theta\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right) = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-2q\cos 2x + q^2)(1-2q^3\cos 2x + q^6)\ldots.$$

Si l'on fait $x = 0$,

$$(48)\qquad \Theta(0) = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots;$$

mais on vérifie aisément, en chassant le dénominateur, et après des réductions évidentes, que q étant plus petit que l'unité, on a

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots};$$

donc

$$(49)\qquad \Theta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots},$$

c'est-à-dire (634)

$$(50)\qquad \Theta(0) = \frac{BC}{A} = \sqrt{\frac{2k'\omega}{\pi}}.$$

L'équation (23) donne

$$H(\omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}\Theta(0) = \sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{2k'\omega}{\pi}}.$$

641. Connaissant $\Theta(0)$, il est aisé d'en déduire $\Theta(\omega)$ et $H(\omega)$. On a en effet (636)

$$\Delta am\, x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)},$$

et en faisant $x = 0$, $\Delta am x$ devient égal à l'unité, et par conséquent

$$\Theta(\omega) = \frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}}. \tag{51}$$

L'équation

$$\cos am x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)},$$

donne également en faisant $x = 0$

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\Theta(0). \tag{52}$$

On peut calculer aussi la valeur de la dérivée $H'(x)$ quand on y fait $x = 0$. On a

$$\sin am x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

par conséquent

$$H(x) = \sqrt{k}\sin am x\,\Theta(x), \tag{53}$$

et en prenant la dérivée des deux membres

$$H'(x) = \sqrt{k}\cos am x\,\Delta am x\,\Theta(x) + \sqrt{k}\sin am x\,\Theta'(x). \tag{54}$$

En faisant $x = 0$,

$$H'(0) = \sqrt{k}\,\Theta(0). \tag{55}$$

Quelques propriétés de deux fonctions $\Theta(x)$ *et* $H(x)$.

642. La méthode suivie pour développer en série les fonctions $H(x)$ et $\Theta(x)$ est susceptible de généralisation. Soit $\varphi(x)$ une fonction de x satisfaisant aux deux équations

$$\varphi(x + 2\omega) = \varphi(x), \tag{56}$$

$$\varphi(x + 2\omega'\sqrt{-1}) = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+\omega'\sqrt{-1})}\varphi(x). \tag{57}$$

On peut, sans autre définition, la développer en série ordonnée suivant les puissances de $e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$, et dans laquelle resteront seulement deux coefficients arbitraires Si l'on pose en effet

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + A_2 e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + \ldots + A_n e^{\frac{n\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} + \ldots,$$

en exprimant comme (639) que le développement satisfait à l'équation (57), on trouvera que les coefficients s'exprimeront tous par deux d'entre eux, et que par conséquent la fonction bien définie qui satisfait aux équations (56), (57) ne contient dans son expression générale que deux constantes arbitraires. Mais, d'après les propriétés des fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$,

$$\varphi(x) = A\Theta(x)^2 + BH(x)^2 \tag{58}$$

est, quelles que soient les constantes A et B, une solution du système des équations (56) et (57), dont elle est par conséquent la solution la plus générale.

Toute fonction qui satisfait aux deux conditions (56) et (57) est donc nécessairement de la forme (58).

Les fonctions $\Theta_1^2(x)$ et $H_1^2(x)$ sont évidemment dans ce cas, et l'on doit avoir par conséquent

$$\Theta_1(x)^2 = A\Theta(x)^2 + BH(x)^2, \tag{59}$$

$$H_1(x)^2 = A'\Theta(x)^2 + B'H(x)^2, \tag{60}$$

comme l'ont montré déjà les équations (17) et (18) qui font connaître les constantes A, B, A′, B′.

643. Le produit $H(x+a).H(x-a)$ satisfait, on le déduit aisément des équations (26) et (28), aux deux équations (56) et (57). On a donc

$$H(x-a)H(x+a) = AH(x)^2 + B\Theta(x)^2, \tag{61}$$

A et B étant indépendants de x.

En faisant successivement $x = 0$, $x = a$, on en déduit

$$-H^2(a) = B\Theta^2(0),$$
$$0 = AH^2(a) + B\Theta^2(a);$$

on a donc

$$B = -\frac{H^2(a)}{\Theta^2(0)},$$
$$A = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

et par conséquent

$$H(x+a)H(x-a) = \frac{H^2(x)\Theta^2(a) - \Theta^2(x)H^2(a)}{\Theta^2(0)}. \tag{62}$$

En changeant dans cette formule x en $x + \omega'\sqrt{-1}$, en ayant égard aux for-

mules (23) et (24), on en déduit

$$\Theta(x+a)\Theta(x-a) = \frac{\Theta^2(x)\Theta^2(a) - H^2(x)H^2(a)}{\Theta^2(0)}. \tag{63}$$

Si l'on fait $a = x$, on trouve

$$\Theta(2x) = \frac{\Theta^4(x) - H^4(x)}{\Theta^3(0)}. \tag{64}$$

Introduction de $\Theta(x)$ dans l'expression de deux intégrales importantes.

644. L'intégrale $\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ a été nommée par Legendre *intégrale elliptique de seconde espèce.*

Si nous posons

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u, \tag{65}$$

nous aurons (592)

$$\varphi = am\,u,$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} &= \int_0^u du(1-k^2\sin^2\varphi) = \int_0^u du(1-k^2\sin^2 am\,u)\\ &= u - k^2\int_0^u \sin^2 am\,u\,du.\end{aligned} \tag{66}$$

La fonction elliptique de seconde espèce que Legendre nommait $E(k, \varphi)$ se ramène donc à l'intégrale $\int_0^u \sin^2 am\,u\,du$, que nous allons exprimer à l'aide de la fonction Θ.

Reprenons les équations (25) et (27)

$$\Theta(x+2\omega) = \Theta(x),$$

$$\Theta(x+2\omega'\sqrt{-1}) = -e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+\omega'\sqrt{-1})}\Theta(x).$$

On en déduit, en différentiant par rapport à x après avoir pris les logarithmes, et

désignant par $\Theta'(x)$ la dérivée de $\Theta(x)$,

$$\frac{\Theta'(x+2\omega)}{\Theta(x+2\omega)} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

$$\frac{\Theta'(x+2\omega'\sqrt{-1})}{\Theta(x+2\omega'\sqrt{-1})} = \frac{\Theta'(x}{\Theta(x)} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

en sorte que la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ a la période 2ω, et qu'elle augmente de $\frac{-\pi\sqrt{-1}}{\omega}$ quand on ajoute $2\omega'\sqrt{-1}$ à la variable. La dérivée

$$\frac{d}{dx}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

admet donc les périodes 2ω et $2\omega'\sqrt{-1}$, et si l'on pose

$$\varphi(x) = \Theta^2(x)\frac{d}{dx}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \Theta(x)\Theta''(x) - \Theta'^2(x),$$

$\varphi(x)$ satisfera aux deux équations

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x),$$

$$\varphi(x+2\omega'\sqrt{-1}) = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+\omega'\sqrt{-1})}\varphi(x),$$

et par conséquent (642) on a

$$(67) \qquad \varphi(x) = \Theta(x)\Theta''(x) - \Theta'(x)^2 = \mathrm{A}\Theta(x)^2 + \mathrm{B}\mathrm{H}(x)^2,$$

A et B étant indépendants de x. Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$\Theta(0)\Theta''(0) = \mathrm{A}\Theta^2(0),$$

d'où l'on déduit

$$(68) \qquad \mathrm{A} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

et en faisant $x = \omega'\sqrt{-1}$

$$(69) \qquad -\Theta'^2(\omega'\sqrt{-1}) = \mathrm{B}\mathrm{H}^2(\omega'\sqrt{-1}).$$

Mais l'équation (24)

$$\Theta(x+\omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\mathrm{H}(x),$$

donne

$$\Theta'(x+\omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\mathrm{H}'(x) + \frac{\pi}{2\omega}q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2\omega}}\mathrm{H}(x),$$

et en faisant $x = 0$

$$\Theta'(\omega'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, q^{-\frac{1}{4}} \mathrm{H}'(0),$$

et

$$\Theta'^2(\omega'\sqrt{-1}) = -q^{-\frac{1}{2}} \mathrm{H}'^2(0).$$

D'ailleurs la formule (23) donne

$$\mathrm{H}^2(\omega'\sqrt{-1}) = -q^{-\frac{1}{2}} \Theta^2(0).$$

On déduit donc de l'équation (69)

$$\mathrm{B} = -\frac{\Theta'^2(\omega'\sqrt{-1})}{\mathrm{H}^2(\omega'\sqrt{-1})} = -\frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\Theta^2(0)},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{B} = -k.$$

Et l'on a

$$(70) \qquad \varphi(x) = \Theta^2(x) \frac{d}{dx} \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \Theta^2(x) - k\mathrm{H}^2(x).$$

On en déduit

$$\left[\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\right]^2 = \frac{1}{k^2} \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{k^2} \frac{d}{dx} \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

le premier membre est égal (536) à $\sin^2 am\, x$, et l'on trouve en intégrant

$$(71) \qquad \int_0^x dx \sin^2 am\, x = \frac{1}{k^2} x \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{k^2} \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

ce qui résout le problème proposé.

645. L'intégrale

$$(72) \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - c\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

a été nommée par Legendre *intégrale elliptique de troisième espèce*. Si l'on pose

$$\varphi = am\, z,$$

et par conséquent

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = dz,$$

cette intégrale devient

$$\int_0^z \frac{dz}{1 - c\sin^2 am\, z}.$$

Pour l'exprimer à l'aide de la fonction Θ reprenons l'équation (63)

$$\Theta(x - a)\,\Theta(x + a) = \frac{\Theta^2(x)\Theta^2(a) - \mathrm{H}^2(x)\mathrm{H}^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

que l'on peut écrire, d'après la relation (5),

$$\Theta(x-a)\Theta(x+a)=\frac{\Theta^2(x)\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}(1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a),$$

d'où

$$1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a=\Theta^2(0)\frac{\Theta(x-a)\Theta(x+a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)},$$

$$-l(1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a)=-2l\Theta(0)+2l\Theta(x)+2l\Theta(a)-l\Theta(x+a)-l\Theta(x-a),$$

et, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{k^2\sin^2 am\,x\sin am\,a}{1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a}\frac{d}{da}\sin am\,a=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}-\frac{1}{2}\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)},$$

en multipliant par dx et intégrant entre les limites 0 et x.

On en déduit

$$(73)\qquad \int_0^x\frac{k^2\sin^2 am\,x\sin am\,a\,dx}{1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a}\frac{d}{da}\sin am\,a=x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}l\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Mais on a

$$\frac{k^2\sin^2 am\,x\sin am\,a}{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am\,x}=-\frac{1}{\sin am\,a}+\frac{1}{\sin am\,a}\frac{1}{1-k^2\sin^2 am\,x\sin^2 am\,a}.$$

Par conséquent l'équation (73) devient

$$-x\frac{\frac{d\sin am\,a}{da}}{\sin am\,a}+\frac{\frac{d\sin am\,a}{da}}{\sin am\,a}\int_0^x\frac{dx}{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am\,x}=x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}l\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

et si l'on pose

$$k^2\sin^2 am\,a=c,$$

l'intégrale

$$\int_0^x\frac{dx}{1-c\sin^2 am\,x},$$

et par suite la fonction elliptique de troisième espèce de Legendre, se trouve exprimée au moyen de la fonction Θ.

CHAPITRE VI.

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Transformations du premier degré.

646. Les fonctions $\sin am x$, $\cos am x$, $\Delta am x$, considérées dans les chapitres précédents, ne dépendent pas de la seule variable x, elles contiennent en outre le module k, à chaque valeur duquel correspondent des formes différentes. C'est ainsi par exemple que pour $k = 0$, $\sin am x$ et $\cos am x$ se réduisent à $\sin x$ et à $\cos x$, et $\Delta am x$ à l'unité.

Les résultats importants auxquels ce chapitre est consacré sont relatifs à la comparaison des fonctions qui correspondent à des modules différents.

Considérons l'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u.$$

On a

$$x = \sin am\, u.$$

Posons

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x},$$

nous en déduirons

$$(3) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = -\frac{(\beta'\alpha - \alpha'\beta)\,dx}{\sqrt{(\alpha'+\beta'x)^2-(\alpha+\beta x)^2}\,\sqrt{(\alpha'+\beta'x)^2-\lambda^2(\alpha+\beta x)^2}},$$

et si l'on pose

$$(4) \quad (1-x^2)(1-k^2x^2)$$
$$= \frac{\varepsilon^2(\beta'^2-\alpha^2)(\beta'^2-\lambda\alpha'^2)}{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}\left(1+\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'}x\right)\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\beta'-\alpha'}x\right)\left(1+\frac{\beta+\lambda\alpha}{\beta'+\lambda\alpha'}x\right)\left(1+\frac{\beta-\lambda\alpha}{\beta'-\lambda\alpha'}x\right),$$

le second membre de (3) deviendra

$$\frac{\varepsilon\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

On aura par conséquent

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{\varepsilon\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

et comme pour $x = 0$ on a $y = \frac{\alpha}{\alpha'}$,

$$\int_{\frac{\alpha}{\alpha'}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \varepsilon\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En posant donc

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = v,$$

$$\int_0^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = a,$$

on aura

$$v - a = \varepsilon u,$$

et l'équation (2) est une relation entre $\sin am\, u$ (mod. k) et $\sin am(\varepsilon u + a)$ (mod. λ).

647. On trouve aisément toutes les solutions de l'équation (4) en écrivant que les deux membres s'annulent pour les mêmes valeurs de x, et l'on est ainsi conduit aux solutions suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\lambda = \pm k, & y = \pm x, & y = \pm\frac{1}{kx}, \quad \varepsilon = \pm 1; \\[2ex]
\lambda = \pm\frac{1}{k}, & y = \pm kx, & y = \pm\frac{1}{x}, \quad \varepsilon = \pm k; \\[2ex]
\lambda = \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, & y = \pm\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}}, & \varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{k})^2; \\[2ex]
\lambda = \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, & y = \pm\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}}, & \varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{k})^2; \\[2ex]
\lambda = \left(\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\right)^2, & y = \pm\frac{1+\sqrt{-k}}{1-\sqrt{-k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{-k}}{1\mp x\sqrt{-k}}, & \varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{-k})^2; \\[2ex]
\lambda = \left(\frac{1+\sqrt{-k}}{1-\sqrt{-k}}\right)^2, & y = \pm\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{-k}}{1\mp x\sqrt{-k}}, & \varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{-k})^2.
\end{array}\right.$$

On voit que le module transformé λ a six valeurs différentes à chacune desquelles correspondent deux formes de la fonction y.

648. L'intégrale

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

se transforme utilement par la substitution

$$(7)\qquad x^2 = \frac{1}{k^2}[1-(1-k^2)y^2].$$

On en déduit

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{-\sqrt{-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^2)[1-(1-k^2)y^2]}},$$

et comme pour $y=0$, $x=\frac{1}{k}$; et pour $y=1$, $x=1$,

$$(8)\qquad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dy\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-y^2)[1-(1-k^2)y^2]}},$$

et par conséquent la valeur de ω relative au module *complémentaire* $\sqrt{1-k^2}$ est égale à celle de ω' relative au module k.

649. On peut également, pour transformer le module k en $\sqrt{1-k^2}$, poser d'abord

$$x = \sin\varphi,$$

ce qui met l'intégrale (6) sous la forme

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

puis ensuite

$$\sin\varphi = \sqrt{-1}\tang\psi.$$

On en déduit

$$d\varphi = \frac{\sqrt{-1}\,d\psi}{\cos\psi},$$

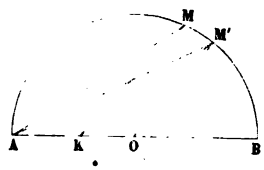
et

$$(9)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{-1}\,d\psi}{\sqrt{\cos^2\psi+k^2\sin^2\psi}} = \frac{\sqrt{-1}\,d\psi}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\psi}}.$$

Échelle de modules de Lagrange.

650. La transformation suivante indiquée d'abord par Landen conduit à déterminer une série de modules auxquels correspondent des fonctions liées les unes aux autres par des relations simples.

Soient AB le diamètre d'un cercle dont O est le centre, φ l'angle formé par le rayon vecteur AM issu du point A avec le diamètre AB, et ψ l'angle formé avec le



même diamètre par le rayon vecteur KM mené au même point M d'un point fixe K situé sur AB. Posons $OA = R$, $OK = a$; soit M' un point infiniment voisin de M : le triangle MKM' donne

$$\frac{MM'}{MK} = \frac{\sin MKM'}{\sin MM'K}.$$

Mais MM' est égal à $2R\,d\varphi$, et MKM' à $d\psi$; on a par conséquent

$$\frac{2R\,d\varphi}{MK} = \frac{d\psi}{\cos OM'K}.$$

D'ailleurs

$$\overline{MK}^2 = R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi = (R+a)^2\cos^2\varphi + (R-a)^2\sin^2\varphi,$$
$$R^2\cos^2 OM'K = R^2 - R^2\sin^2 OM'K = R^2 - a^2\sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(R+a)^2\cos^2\varphi + (R-a)^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{2}{R+a}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4aR}{(R+a)^2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{R}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\psi}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{a}{R} = k_1, \quad \frac{4aR}{(R+a)^2} = k^2,$$

cette relation devient

$$\frac{2R}{R+a}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Et en intégrant les deux membres et remarquant que φ et ψ sont nuls en même temps, on en déduit

$$(10) \qquad \frac{2R}{R+a}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}},$$

φ et ψ étant liés par la relation

$$\frac{\sin(2\varphi-\psi)}{\sin\psi}=\frac{a}{R}=k_1, \tag{11}$$

que la figure rend évidente.

Si l'on pose

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}=u,$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=v,$$

on en conclura

$$\sin\psi=\sin am\,u \quad (\text{mod. } k_1),$$
$$\sin\varphi=\sin am\,v \quad (\text{mod. } k),$$

et l'équation (11) établit une relation entre les sinus et cosinus d'amplitude relatifs aux modules différents k et k_1.

651. On a

$$2\varphi-\psi=\varphi-(\psi-\varphi),$$
$$\psi=\varphi+(\psi-\varphi),$$

et l'équation (11)

$$\sin(2\varphi-\psi)=k_1\sin\psi,$$

devient

$$\sin\varphi\cos(\psi-\varphi)-\cos\varphi\sin(\psi-\varphi)=k_1\sin\varphi\cos(\psi-\varphi)+k_1\cos\varphi\sin(\psi-\varphi),$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}(\psi-\varphi)=k_1\operatorname{tang}\varphi+k_1\operatorname{tang}(\psi-\varphi),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}(\psi-\varphi)=\frac{1-k_1}{1+k_1}\operatorname{tang}\varphi, \tag{12}$$

et cette relation équivalente à (11) doit être considérée comme plus simple.

652 Les deux équations

$$k_1^2=\frac{a^2}{R^2},\quad k^2=\frac{4aR}{(a+R)^2}$$

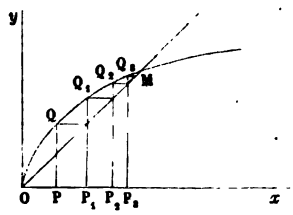
donnent

$$k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}; \tag{13}$$

telle est la relation qui lie les modules k et k_1 que la formule précédente permet de ramener l'un à l'autre.

653. Quel que soit le module initial k_1, ceux qui s'en déduisent successivement tendent rapidement vers l'unité. Pour le démontrer, construisons la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$



qui passe évidemment par l'origine des coordonnées, et par le point M dont les coordonnées sont $x = 1$, $y = 1$. Prenons sur cette courbe un point Q dont l'abscisse OP soit égale à k_1, l'ordonnée QP représentera k; en menant par le point Q une parallèle à l'axe des x, son intersection avec la bissectrice OM donnera un point dont l'abscisse OP_1 est k, et auquel correspond l'ordonnée P_1Q_1 égale au module qui se déduit de k; celle-ci, par la même construction, donnera un quatrième module P_2Q_2, et la limite est évidemment l'ordonnée du point M, c'est-à-dire l'unité.

Si l'on se donnait d'abord le module k, pour en déduire k_1, puis que de k_1 on déduisît par la même formule un troisième module k_2, et ainsi de suite, les divers modules ainsi obtenus s'approcheraient rapidement de zéro.

654. Les relations qui lient les modules successifs et les intégrales correspondantes peuvent prendre une forme plus simple.

Posons

$$k_1 = \tang^2 \frac{\theta}{2},$$

on en déduira

$$k = \frac{2 \tang \frac{\theta}{2}}{1 + \tang^2 \frac{\theta}{2}} = \sin\theta.$$

La relation (12) deviendra

$$\tang(\psi - \varphi) = \frac{1 - \tang^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tang^2 \frac{\theta}{2}} \tang\varphi = \cos\theta \tang\varphi,$$

et l'on aura enfin

$$\frac{2R}{R+a} = \frac{2}{1+\tang^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Le théorème peut donc s'énoncer comme il suit :

Si l'on pose

$$k = \sin\theta,$$
$$k_1 = \tang^2\frac{\theta}{2},$$
$$\tang(\psi - \varphi) = \cos\theta \tang\varphi,$$

on aura

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}.$$

En posant ensuite

$$k_1 = \sin\theta_1,$$
$$k_2 = \tang^2\frac{\theta_1}{2},$$
$$\tang(\psi_1 - \psi) = \cos\theta_1 \tang\psi,$$

on aura de même

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta_1}{2}} \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\psi_1}}.$$

En continuant la même transformation et posant en général

$$k_n = \sin\theta_n,$$
$$k_{n+1} = \tang^2\frac{\theta_n}{2},$$
$$\tang(\psi_n - \psi_{n-1}) = \cos\theta_n \tang\psi_{n-1},$$

on aura

$$\int_0^{\psi_{n-1}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta_n}{2}} \int_0^{\psi_n} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_{n+1}^2\sin^2\psi}},$$

et par conséquent

$$(14) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^n\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cdots\cos^2\frac{\theta_n}{2}} \int_0^{\psi_n} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_{n+1}^2\sin^2\psi}}.$$

et si k_{n+1} est suffisamment petit, on pourra prendre

$$\int_0^{\psi_n} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_{n+1}^2 \sin^2\psi}} = \psi_n.$$

D'après les relations qui lient les angles $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n$, on a

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \tang^4\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\cos\theta}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

et de même

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{\cos\theta_1}}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\cos\theta_{n+1} = \frac{\sqrt{\cos\theta_n}}{\cos^2\frac{\theta_n}{2}},$$

par conséquent

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n+1} = \frac{\sqrt{\cos\theta \cos\theta_1 \ldots \cos\theta_n}}{\cos^2\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta_1}{2} \ldots \cos^2\frac{\theta_n}{2}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta_1}{2} \ldots \cos^2\frac{\theta_n}{2}} = \frac{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n \ldots \cos^2\theta_{n+1}}}{\sqrt{\cos\theta}},$$

et la formule (14) pourra s'écrire

$$(15) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos^2\theta_{n+1}}}{\sqrt{\cos\theta}} \frac{\psi_n}{2^n}.$$

655. Lorsque le module est devenu très-petit, le calcul des modules suivants peut se simplifier. Soient

$$k_n = \sin\theta_n,$$

$$k_{n+1} = \tang^2\frac{\theta_n}{2},$$

on a identiquement

$$\frac{k_{n+1}}{\left(\frac{k_n^2}{4}\right)} = \frac{1}{\cos^4\frac{\theta_n}{2}},$$

et par conséquent

$$l k_{n+1} = l\frac{k_n^2}{4} - 4 l \cos\frac{\theta_n}{2}.$$

Mais

$$\cos\frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\theta_n} + \sqrt{1-\sin\theta_n}\right).$$

On en déduit, en développant et négligeant la quatrième puissance de $\sin\theta_n$,

$$4l\cos\frac{\theta_n}{2} = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_n.$$

On a donc

$$lk_{n+1} = l\frac{k_n^2}{4} + \frac{1}{2}\sin^2\theta_n,$$

qu'il faut écrire, quand on se servira des logarithmes vulgaires,

$$lk_{n+1} = l\frac{k_n^2}{4} + \frac{M}{2}\sin^2\theta_n, \tag{16}$$

M désignant le module.

On trouvera de même

$$\log\cos\theta_n = -\frac{M}{8}\sin^2\theta_n,$$

$$\log\cos\frac{\theta_n}{2} = -\frac{M}{2}\sin^2\theta_n.$$

656. Calculons par exemple l'intégrale

$$x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Nous poserons

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2},$$
$$\theta = 45^\circ,$$

et nous aurons

$$\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = 9{,}6172243,$$

$$\log k_1 = \log\sin\theta_1 = \log\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} = 9{,}2344486,$$

$$\theta_1 = 9^\circ 52' 45'',41,$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2} = 8{,}9366506,$$

$$\log k_2 = \log\sin\theta_2 = \log\operatorname{tang}^2\frac{\theta_1}{2} = 7{,}8733012;$$

et l'angle θ_2 est assez petit pour que nous puissions faire usage de la formule (16).

nous aurons

$$\log k_2 = 7,8733012 \qquad \log \frac{M}{2} = 9,33675$$
$$2\log k_2 = 5,7466024 \qquad \log k_2^2 = 5,74660$$
$$c^t \log 4 = 9,3979400 \qquad \overline{5,08335}$$
$$\frac{M k_2^2}{2} = 0,0000121$$

$$\log k_3 = \log \frac{k_2^2}{4} + \frac{M k_2^2}{2} = 5,1445545;$$

les valeurs numériques de k, k_1, k_2, k_3, sont

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067 8,$$
$$k_1 = 0,1715728 5,$$
$$k_2 = 0,0074696 7,$$
$$k_3 = 0,0000139 5.$$

Pour calculer les limites successives des intégrales, on a

$$\varphi = 30^\circ$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi = 9,7614394$$
$$\log \cos \theta = 9,8494850$$
$$\log \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = 9,6109244$$
$$\varphi_1 - \varphi = 22^\circ\, 12'\, 27'',558$$

$$\varphi_1 = 52^\circ\, 12'\, 27'',558$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi_1 = 0,1104375$$
$$\log \cos \theta_1 = 9,9935118$$
$$\log \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,1039493$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 51^\circ\, 47'\, 32'',587$$

$$\varphi_2 = 104^\circ\, 0'\, 0'',145$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi_2 = 0,6032276$$
$$\log \cos \theta_2 = 9,9999879$$
$$\log \operatorname{tang}(\varphi_3 - \varphi_2) = 0,6032155$$
$$\varphi_3 - \varphi_2 = 104^\circ\, 0'\, 1'',50$$

$$\varphi_3 = 208^\circ\, 0'\, 1'',645$$
$$\frac{\varphi_3}{8} = 93600'',21$$
$$\log = 4,9712768$$
$$\log 1'' = 4,6855749$$
$$\log \frac{\varphi_3}{8} = 9,6568517$$

Calculons enfin le multiplicateur

$$\sqrt{\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3}{\cos\theta}}$$

on a

$$\log\cos\theta = 9{,}8494850,$$
$$\log\cos\theta_1 = 9{,}9935118,$$
$$\log\cos\theta_2 = 9{,}9999879,$$

et $\cos\theta_3$ peut être regardé comme égal à l'unité; donc

$$\log\sqrt{\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta}} = 0{,}0720073;$$

par conséquent

$$\log\frac{\varphi_3}{8}\sqrt{\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta}} = 9{,}7288590,$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{\varphi_3}{8}\sqrt{\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta}} = 0{,}5356227,$$

valeur exacte à sept décimales.

657. L'élégante construction par laquelle se trouve représentée la transformation de Landen est due à Jacobi. Gauss, dans l'un de ses Mémoires, a présenté sous une forme intéressante un résultat équivalent au fond à celui que nous venons d'obtenir.

Considérons la différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-k^2)\sin^2\varphi}},$$

à laquelle nous substituerons la forme évidemment équivalente

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}. \tag{17}$$

Posons

$$\sin\varphi = \frac{2n\sin\psi}{(m+n)\cos^2\psi + 2m\sin^2\psi}, \tag{18}$$

on en déduit

$$(19)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{m'^2\sin^2\varphi + n'^2\sin^2\varphi}},$$

où

$$(20)\qquad \begin{cases} m' = \dfrac{m+n}{2}, \\ n' = \sqrt{mn}, \end{cases}$$

et la formule donne le moyen de transformer la fonction elliptique dont le module est

$$(21)\qquad k = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}},$$

en une autre dont le module est

$$(22)\qquad k_1 = \sqrt{\frac{m'^2 - n'^2}{m'^2}} = \frac{m-n}{m+n};$$

et la relation entre k et k_1 est encore

$$(23)\qquad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}.$$

Lorsque φ varie de o à 2π, ψ varie aussi de o à 2π; on a, par conséquent,

$$(24)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{m'^2\cos^2\psi + n'^2\sin^2\psi}},$$

et si l'on forme une série de nombres définis par les relations

$$(25)\qquad m' = \frac{m+n}{2},\quad n' = \sqrt{mn},\quad m'' = \frac{m'+n'}{2},\quad n'' = \sqrt{m'n'},\ldots,$$

$$m_p = \frac{m_{p-1}+n_{p-1}}{2},\quad n_p = \sqrt{m_{p-1}n_{p-1}},$$

on aura

$$(26)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_p^2\cos^2\varphi + n_p^2\sin^2\varphi}}.$$

Lorsque p augmente, m_p et n_p convergent vers l'égalité, et si l'on nomme μ la limite commune, le dénominateur du second membre tend vers la valeur constante μ, et la limite est par conséquent $\frac{2\pi}{\mu}$; la limite μ se trouve ainsi connue, et l'on a

$$(27)\qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}.$$

Théorie générale de Jacobi.

658. La différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} \tag{28}$$

peut d'une infinité de manières se transformer par un changement de variables en une autre de la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}}. \tag{29}$$

Posons, pour obtenir cette transformation,

$$x = \frac{U}{V}, \tag{30}$$

U et V désignant des fonctions entières de y; on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy\left(V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right)}{\sqrt{AV^4 + BUV^3 + CU^2V^2 + DU^3V + EU^4}}. \tag{31}$$

Le polynôme en y, qui dans le second membre de cette équation figure sous le radical, est d'un degré quadruple de celui de l'un des deux polynômes U et V, il faut, pour qu'il se réduise au quatrième degré, que tous les facteurs linéaires soient doubles et puissent sortir du radical, à l'exception de quatre seulement. On doit donc avoir

$$AV^4 + BUV^3 + CU^2V^2 + DU^3V + EU^4 = T^2(A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4),$$

T étant un polynôme rationnel en y. L'équation (31) deviendra alors

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}}{T}\,\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}}, \tag{32}$$

et la transformation annoncée sera évidemment effectuée, si la fraction

$$\frac{V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}}{T} \tag{33}$$

se réduit à une constante. Or nous allons montrer qu'il en est nécessairement ainsi

toutes les fois que les degrés des polynômes U et V sont égaux, ou diffèrent seulement d'une unité.

Soit en effet

$$(34)\qquad A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = E(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

On en conclut

$$(35)\quad AV^4 + BUV^3 + CU^2V^2 + DU^3V + EU^4 = E(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V).$$

Or on ne peut rencontrer dans ce produit d'autres facteurs doubles que ceux qui figurent deux fois dans un même binôme $U-\alpha V$, $U-\beta V$,.... Il n'est pas possible en effet que deux binômes différents, $U-\alpha V$, $U-\beta V$ par exemple, aient un facteur commun du premier degré en y, car ce facteur appartiendrait à U et à V, et en le supprimant dans les deux termes de la fraction $\frac{U}{V}$, on aurait une transformation équivalente et de forme plus simple.

Cela posé, on a identiquement

$$(36)\qquad V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy} = (V-\alpha U)\frac{dU}{dy} - U\frac{d}{dy}(V-\alpha U),$$

et par conséquent tout facteur double de $V-\alpha U$ divisant la dérivée $\frac{d}{dy}(V-\alpha U)$, divisera le premier membre de (36). Les facteurs du polynôme désigné par T appartiennent donc tous à cette différence $V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}$, et par conséquent le numérateur de la fraction

$$(37)\qquad \frac{V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}}{T},$$

est divisible par le dénominateur. Mais d'après la supposition faite sur les degrés de U et de V, le quotient est de degré zéro, c'est-à-dire indépendant de y. Si en effet U et V sont tous deux de degré p, ou l'un de degré p, l'autre de degré $p-1$, les deux termes de la fraction (37) sont l'un et l'autre de degré $2p-2$; leur quotient est par conséquent une constante comme nous l'avions annoncé.

Ainsi donc pour transformer la différentielle (28) en une autre de même forme avec des coefficients différents, il suffit de choisir pour U et V deux polynômes de même degré, ou dont les degrés diffèrent d'une unité seulement, et tels, que les facteurs de l'expression qui figure sous le radical du second membre de (31) soient égaux deux à deux, à l'exception de quatre qui doivent rester simples. Cette con-

dition peut être remplie d'une infinité de manières, et à chaque valeur adoptée pour les degrés des polynômes U et V, correspondra une solution.

659. Considérons comme exemple la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{38}$$

et posons, pour la transformer,

$$x = \frac{y}{a+by^2}. \tag{39}$$

Il faut que le produit

$$(a+by^2-y)(a+by^2+y)(a+by^2-ky)(a+by^2+ky) \tag{40}$$

contienne deux facteurs doubles. Si de plus on veut avoir une transformée de la forme

$$\frac{m\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}, \tag{41}$$

il faut que le produit (40) soit de la forme

$$T^2(1-y^2)(1-k'^2y^2),$$

T désignant un polynôme du second degré en y. Si nous posons

$$T = c(1+my)(1+ny),$$

on devra avoir

$$\left\{\begin{array}{l} a+by^2-y = a(1-y)(1-k'y), \\ a+by^2+y = a(1+y)(1+k'y), \\ a+by^2-ky = a(1+my)^2, \\ a+by^2+ky = a(1+ny)^2. \end{array}\right. \tag{42}$$

Le changement de y en $-y$ changeant l'un dans l'autre les premiers membres des deux dernières équations, on doit avoir $m = -n$; les quatre équations (42) se réduisent alors à deux

$$\left\{\begin{array}{l} a+by^2-y = a(1-y)(1-k'y), \\ a+by^2-ky = a(1+my)^2. \end{array}\right. \tag{43}$$

On conclut de la première, en faisant $y = 1$, et remarquant que le produit des racines du premier membre est $\frac{a}{b}$,

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = 1, \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{k'}, \end{array}\right. \tag{44}$$

c'est-à-dire

$$(45)\qquad \begin{cases} b = \dfrac{h'}{h'+1}, \\ a = \dfrac{1}{h'+1}; \end{cases}$$

d'après la seconde des équations (43), le trinôme $a + by^2 - ky$ doit être un carré parfait. On en conclut

$$(46)\qquad k^2 = 4ab = \frac{4h'}{(h'+1)^2},$$

et

$$(47)\qquad k = \frac{2\sqrt{h'}}{1+h'},$$

la racine $-\frac{1}{m}$ est égale à $\sqrt{\frac{a}{b}}$, c'est-à-dire à $\sqrt{\frac{1}{h'}}$, et l'on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{(h'+1)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}},$$

et comme y et x s'annulent en même temps

$$(48)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = (h'+1)\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}},$$

les modules k et k' étant liés par l'équation (47) identique à celle obtenue (**652**).

Théorie d'Abel.

660. Abel a rattaché très-ingénieusement la théorie de la transformation au principe de la double périodicité, en montrant qu'on en peut déduire, *à priori*, en quelque sorte, la connaissance des cas dans lesquels elle est possible, la forme des équations qui y conduisent et, en suivant jusqu'au bout les conséquences des principes, la formation complète des équations elles-mêmes.

Considérons l'équation

$$(49)\qquad y = \psi(x) = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_\mu x^\mu} = \frac{P}{Q},$$

où les polynômes P et Q sont supposés premiers entre eux, A_μ et B_μ n'étant pas tous deux égaux à zéro, nous dirons que la transformation exprimée par l'équation (49) est de degré μ.

A chaque valeur de x, d'après la relation (49), correspond une valeur de y, mais à chaque valeur de y correspondent μ valeurs de x généralement inégales. Soient x_c et $x_{c'}$ deux quelconques de ces racines, elles doivent toutes deux satisfaire à l'équation

$$(50)\qquad \frac{dy^2}{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)} = \frac{\varepsilon^2 dx^2}{(1-x^2)(1-h^2x^2)},$$

et l'on a par conséquent

$$\frac{dx_c}{\sqrt{(1-x_c^2)(1-h^2x_c^2)}} = \frac{\pm dx_{c'}}{\sqrt{(1-x_{c'}^2)(1-h^2x_{c'}^2)}}.$$

Si donc on pose

$$x_c = \sin am\, u \quad (\text{mod. } h),$$

et par conséquent

$$du = \frac{dx_c}{\sqrt{(1-x_c^2)(1-h^2x_c^2)}},$$

on aura aussi

$$du = \frac{\pm dx_{c'}}{\sqrt{(1-x_{c'}^2)(1-h^2x_{c'}^2)}},$$

et par conséquent

$$x_{c'} = \sin am(\alpha \pm u),$$

α étant une constante.

On peut écrire simplement

$$x_{c'} = \sin am(u + \alpha),$$

car si l'on prenait

$$x_{c'} = \sin am(\alpha - u),$$

on pourrait écrire

$$x_{c'} = \sin am(2\omega - \alpha + u) = \sin am(u + \alpha'),$$

α' étant une constante égale à $2\omega - \alpha$.

On voit donc qu'en exprimant l'une quelconque des valeurs de x par la formule

$$x = \sin am\, u,$$

toutes les autres seront de la forme

$$\sin am(u + \alpha),$$

l'argument u étant bien entendu une fonction de y, et α conservant pour chaque racine une valeur constante qui n'en dépend pas.

On aura par conséquent, quel que soit y,

$$y = \psi(\sin am\, u) = \psi[\sin am(u+\alpha)],$$

et par conséquent

$$\psi(\sin am\, u) = \psi[\sin am(u+\alpha)].$$

Cette équation étant satisfaite quel que soit u, on peut y changer u en $u+\alpha$, en $u+2\alpha$,.... On aura donc

$$\psi(\sin am\, u) = \psi \sin am(u+\alpha) = \psi[\sin am(u+2\alpha)] = \ldots = \psi[\sin am(u+p\alpha)],$$

et, par suite, quel que soit le nombre entier p,

$$\psi(\sin am\, u) = \psi[\sin am(u+p\alpha)].$$

Les racines de l'équation

$$y = \psi(x)$$

étant en nombre fini, il faut nécessairement que pour une certaine valeur h du nombre p, on ait

$$\sin am(u+h\alpha) = \sin am\, u,$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit u, $h\alpha$ est une période (597)

$$4m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1},$$

et l'on a par conséquent

$$\alpha = \frac{4m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{h}.$$

Si h est le plus petit nombre entier pour lequel cette condition soit remplie, on aura pour chaque valeur de y, h valeurs distinctes de x

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin am\, u, \\ x_2 &= \sin am(u+\alpha), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_h &= \sin am[u+(h-1)\alpha]. \end{aligned}$$

Si le nombre h est égal à μ, l'équation $y = \psi(x)$ n'a pas d'autres racines. Si au contraire h est moindre que μ, on pourra prendre une racine x'_1 distincte des précédentes, et si l'on pose

$$x'_1 = \sin am\, u',$$

on aura les nouvelles racines

$$\begin{aligned} x'_2 &= \sin am(u'+\alpha), \\ x'_3 &= \sin am(u'+2\alpha), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_h &= \sin am[u'+(h-1)\alpha]. \end{aligned}$$

Ces h racines sont distinctes des précédentes, car si l'on avait

$$\sin am(u' + q'\alpha) = \sin am(u + q\alpha),$$

on en déduirait, en négligeant les multiples des périodes,

$$u' - u = (q - q')\alpha;$$

u' s'obtiendrait donc en ajoutant à u un multiple de α, et $\sin am u'$ ferait partie du premier groupe.

Si $2h$ est égal à μ, on a trouvé toutes les racines; sinon on formera un troisième groupe de h racines, puis un quatrième, etc., et l'on voit que h doit être un diviseur de μ.

661. Nous ferons connaître suffisamment l'esprit de la méthode, en nous bornant à examiner le cas où l'on a $h = \mu$, en supposant en outre que μ soit un nombre impair $2n + 1$.

L'équation

$$y = \psi(x) = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_\mu x^\mu},$$

a dans ce cas pour racines

$$x_1 = \sin am u, \quad x_2 = \sin am(u + \alpha), \ldots, \quad x_\mu = \sin am[u + (\mu - 1)\alpha],$$

où

$$\alpha = \frac{4m\omega + 2n\omega'\sqrt{-1}}{\mu}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(50) \qquad (A_\mu - B_\mu y)x^\mu + \ldots + A_0 - B_0 y = 0.$$

Le produit des racines est

$$\frac{A_0 - B_0 y}{A_\mu - B_\mu y} = x_1 x_2 x_3 \ldots x_\mu.$$

On en déduit pour y une expression de la forme

$$(51) \qquad y = \frac{a' + a x_1 x_2 \ldots x_\mu}{b' + b x_1 x_2 \ldots x_\mu}.$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction de la seule racine x_1 : on a en effet, $\mu\alpha$ étant une période,

$$x_{p+1} = \sin am(u + p\alpha),$$
$$x_{\mu-p+1} = \sin am[u + (\mu - p)\alpha] = \sin am(u - p\alpha),$$

on en conclut aisément (593)

$$x_{p+1}\,x_{\mu-p+1} = \frac{\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,p\alpha}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,p\alpha}.$$

et comme $\sin am u$ est égal à x_1, en posant $\sin am\,p\alpha = e_p$,

$$x_{p+1}\,x_{\mu-p+1} = \frac{x_1^2 - e_p^2}{1 - k^2 e_p^2 x^2},$$

et

$$x_1\,x_2\,x_3 \ldots x_\mu = x_1 \frac{(x_1^2 - e^2)(x_1^2 - e_2^2)\ldots(x_1^2 - e_n^2)}{(1 - k^2 e^2 x_1^2)(1 - k^2 e_2^2 x_1^2)\ldots(1 - k^2 e_n^2 x_1^2)} = \varphi(x_1),$$

par conséquent

$$(52) \qquad y = \frac{a' + a\varphi(x_1)}{b' + b\varphi(x_1)} = \frac{P}{Q};$$

x_1 désignant ici l'une quelconque des racines, l'équation (52), si l'on y remplace x_1 par x, a pour solutions $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, et l'une quelconque des racines étant représentée par $\sin am u$, les autres sont

$$\sin am(u + \alpha), \quad \sin am(u + 2\alpha), \ldots, \quad \sin am[u + (\mu - 1)\alpha];$$

si la première était $\sin am(u + \alpha)$, les autres seraient

$$\sin am(u + 2\alpha), \ \sin am(u + 3\alpha), \ldots, \ \sin am[u + (\mu - 1)\alpha] \ \text{ et } \ \sin am(u + \mu\alpha) = \sin am\,u;$$

il n'y aurait donc rien de changé.

662. Il reste à déterminer les constantes a, b, a', b', de manière à satisfaire à toutes les conditions du problème.

Pour que la substitution

$$y = \frac{P}{Q}$$

donne

$$(53) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} = \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

on doit avoir, comme le montre la substitution directe,

$$(P^2 - Q^2)(\lambda^2 P^2 - Q^2) = \left(\frac{P\dfrac{dQ}{dx} - Q\dfrac{dP}{dx}}{\varepsilon}\right)^2 (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

et par conséquent le produit

$$(P^2 - Q^2)(\lambda^2 P^2 - Q^2)$$

doit être divisible par $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ et donner pour quotient un carré parfait. Cette condition est d'ailleurs suffisante : on peut le prouver en reproduisant la démonstration de Jacobi donnée (658); nous avons donc seulement à déterminer a, b, a', b' de telle sorte qu'elle soit satisfaite.

L'équation

$$y=\frac{P}{Q}$$

ayant pour racines

$$x=x_1,\quad x=x_2,\ldots,\quad x=x_\mu,$$

on doit avoir

$$P-Qy=A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\mu). \tag{54}$$

A étant indépendant de x et égal au coefficient $a-by$ de la plus haute puissance de cette variable dans le premier membre. Mais on a

$$(P^2-Q^2)(\lambda^2P^2-Q^2)=(P-Q)(P+Q)(\lambda P-Q)(\lambda P+Q).$$

Ce produit doit être divisible par $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, et s'annuler par conséquent pour $x=\pm 1$, $x=\pm\frac{1}{k}$. Si nous remplissons cette condition en faisant en sorte que $P-Q$, $P+Q$, $\lambda P-Q$ et $\lambda P+Q$ soient divisibles respectivement par $1-x$, $1+x$, $1-kx$, $1+kx$, c'est-à-dire en faisant en sorte qu'aux hypothèses $y=1$, $y=-1$, $y=\frac{1}{\lambda}$, $y=-\frac{1}{\lambda}$, dans l'équation (54), correspondent pour x, les valeurs 1, -1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, ces conditions détermineront a, b, a', b'. L'équation (52) donne en effet, en remarquant que $\varphi(x)$ est une fonction impaire,

$$\left\{\begin{aligned}
1&=\frac{a'+a\varphi(1)}{b'+b\varphi(1)},\\
-1&=\frac{a'-a\varphi(1)}{b'-b\varphi(1)},\\
\frac{1}{\lambda}&=\frac{a'+a\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{b'+b\varphi\left(\frac{1}{k}\right)},\\
-\frac{1}{\lambda}&=\frac{a'-a\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{b'-b\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}.
\end{aligned}\right. \tag{55}$$

On en déduit aisément

$$a'b' - ab\varphi^2(1) = 0,$$

$$a'b' - ab\,\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right) = 0.$$

D'ailleurs $\varphi^2(1)$ et $\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right)$ sont inégaux, sans quoi les équations (55) donneraient $\lambda = \pm 1$, ce qui est inadmissible. Il faut donc supposer

$$ab = 0, \quad a'b' = 0. \tag{56}$$

Prenons par exemple

$$a' = 0, \quad b = 0,$$

les équations (55) se réduisent à

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = \lambda\varphi\left(\frac{1}{k}\right). \tag{57}$$

D'ailleurs

$$\varphi(1) = \frac{(1-e^2)(1-e_2^2)\ldots(1-e_n^2)}{(1-k^2e^2)(1-k^2e_2^2)\ldots(1-k^2e_n^2)},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^{2n+1}}\,\frac{(1-k^2e^2)(1-k^2e_2^2)\ldots(1-k^2e_n^2)}{(1-e^2)(1-e_2^2)\ldots(1-e_n^2)} = \frac{1}{k^{2n+1}\varphi(1)},$$

et (57) donne

$$\sqrt{\lambda} = k^{n+\frac{1}{2}}\varphi(1),$$

a, b, a', b' et λ sont donc connus. Pour avoir ε, il suffit de remarquer que d'après les formules précédentes y est nul en même temps que x, et la dérivée $\frac{dy}{dx}$, égale à $\frac{y}{x}$ pour $x = 0$, se réduit d'après l'équation (53) à ε. On trouve ainsi en faisant usage de la valeur (52) de y, simplifiée par les résultats précédents,

$$\varepsilon = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}}\,e^2e_2^2\ldots e_n^2.$$

Le problème est résolu. Mais il reste à prouver que la solution obtenue, dans laquelle tout est maintenant déterminé, satisfait à celles des conditions qui n'ont pas été exprimées, et que le quotient

$$\frac{(P^2-Q^2)(P^2-\lambda^2Q^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

qui d'après les valeurs choisies pour a, b, a', b' est entier, se réduit à un carré parfait.

Reprenons en effet l'équation (54)

$$(P - Qy) = (a - by)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\mu).$$

Si l'on y fait successivement $x_1 = \pm 1$, $x_1 = \pm \frac{1}{k}$, et, par suite, d'après les valeurs adoptées pour a, a', b, b', $y = \pm 1$, $y = \pm \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
P - Q &= (a - b)(x - 1)F_1(x),\\
P + Q &= (a + b)(x + 1)F_2(x),\\
P - \frac{Q}{\lambda} &= \left(a - \frac{b}{\lambda}\right)\left(x + \frac{1}{k}\right)F_3(x),\\
P + \frac{Q}{\lambda} &= \left(a + \frac{b}{\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{k}\right)F_4(x),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(P^2 - Q^2)(Q^2 - \lambda^2 P^2) = (a^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2 a^2)(1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = \frac{F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)}{k^2},$$

$F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ désignant le produit

$$(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_\mu)$$

correspondant respectivement aux quatre valeurs adoptées pour x_1.

Or les quatre fonctions sont des carrés parfaits, et il en est par conséquent de même de leur produit. On a en effet

$$x_1 = \sin am\, u,$$

et les quatre valeurs de ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ attribuées à x donnent

$$\cos am\, u\, \Delta am\, u = 0,$$

et par suite

$$x_{n+1} - x_{\mu-p+1} = \frac{x_1 \Delta am\, p\alpha \cos am\, p\alpha}{1 - k^2 x^2 \sin^2 am\, p\alpha};$$

les facteurs

$$(x - x_{p+1}), \quad (x - x_{\mu-p+1})$$

sont par conséquent égaux, et le produit

$$(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_\mu),$$

composé de facteurs égaux deux à deux, est un carré parfait.

En résumé, pour résoudre le problème de la transformation, on peut procéder de la manière suivante :

Soit α une racine de l'équation

$$\sin am(2n+1)\alpha = 0.$$

Cette racine n'appartenant à aucune autre équation de la forme

$$\sin am\, h\alpha = 0,$$

dans laquelle h soit un entier inférieur à $2n+1$, si l'on détermine une fonction y, un module λ, un coefficient ε, par les formules

$$(58)\qquad y = \frac{h^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{x(x^2-\sin^2 am\alpha)(x^2-\sin^2 am 2\alpha)\ldots(x^2-\sin^2 am n\alpha)}{(1-h^2x^2\sin^2 am\alpha)(1-h^2x^2\sin^2 am 2\alpha)\ldots(1-h^2x^2\sin^2 am n\alpha)},$$

$$(59)\qquad \sqrt{\lambda} = h^{n+\frac{1}{2}}\,\frac{(1-\sin^2 am\alpha)(1-\sin am 2\alpha)\ldots(1-\sin^2 am n\alpha)}{(1-h^2\sin^2 am\alpha)(1-h^2\sin^2 am 2\alpha)\ldots(1-h^2\sin^2 am n\alpha)},$$

$$(60)\qquad \varepsilon = \frac{h^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}}\sin^2 am\alpha\sin^2 am 2\alpha\ldots\sin^2 am n\alpha,$$

on aura

$$(61)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \varepsilon\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-h^2x^2)}}.$$

663. Considérons par exemple le cas de $n=1$.

Si l'on pose

$$\sin am\alpha = e,$$

l'équation

$$\sin am 3\alpha = 0$$

donne (615)

$$e[3-4e^2(1+h^2)+6h^2e^4-h^4e^6] = 0.$$

La racine $e=0$ doit être rejetée, mais les autres peuvent être adoptées, parce que $\sin am 2\alpha$ n'est pas nul.

On aura

$$\lambda = h^3\,\frac{(1-e^2)^2}{(1-h^2e^2)^2},\quad \varepsilon = h\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\,e^2,$$

$$(62)\qquad y = h\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\,\frac{x(x^2-e^2)}{1-h^2e^2x^2}.$$

664. La formule de transformation peut être mise sous une forme plus élégante. Considérons la somme

$$y = \sin am u + \sin am(u+\alpha) + \sin am(u+2\alpha) + \ldots + \sin am[u+(n-1)\alpha],$$

où $n\alpha$ désigne une période quelconque de $\sin am u$, et n est un nombre impair quelconque.

On a (595)

$$\sin am(u+\alpha)+\sin am[u+(n-1)\alpha]$$
$$=\sin am(u+\alpha)+\sin am(u-\alpha)=\frac{2\sin am u\cos am u\,\Delta am u}{1-k^2\sin^2 am u\sin^2 am\alpha},$$

$$\sin am(u+2\alpha)+\sin am[u+(n-2)\alpha]$$
$$=\sin am(u+2\alpha)+\sin am(u-2\alpha)=\frac{2\sin am u\cos am 2\alpha\,\Delta am 2\alpha}{1-k^2\sin^2 am u\sin^2 am 2\alpha},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\sin am\left(u+\frac{n-1}{2}\alpha\right)+\sin am\left(u+\frac{n+1}{2}\alpha\right)=\frac{2\sin am u\cos am\frac{n-1}{2}\alpha\,\Delta am\frac{n-1}{2}\alpha}{1-k^2\sin am u\sin^2 am\frac{n-1}{2}\alpha},$$

et l'on voit que y est une fonction rationnelle de $\sin am u$, dont le dénominateur est évidemment

$$(1-k^2\sin^2 am u\sin^2 am\alpha)(1-k^2\sin^2 am u\sin^2 am 2\alpha)\dots\left(1-k^2\sin^2 am u\sin^2 am\frac{n-1}{2}\alpha\right).$$

Le numérateur est de degré n. Or l'équation $y=0$, quand on y considère u comme inconnue, a pour racines, on le vérifie aisément,

$$u=\pm\alpha,\quad u=\pm 2\alpha,\dots,\quad u=\pm\frac{n-1}{2}\alpha;$$

car en faisant $u=p\alpha$, quel que soit le nombre p, les termes de y deviennent précisément ceux de la somme

$$\sin am\alpha+\sin am 2\alpha+\dots+\sin am n\alpha.$$

Or on a, $n\alpha$ étant une période,

$$\sin am n\alpha=0,$$
$$\sin am\alpha+\sin am(n-1)\alpha=0,$$
$$\sin am 2\alpha+\sin am(n-2)\alpha=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\sin am\left(\frac{n-1}{2}\alpha\right)+\sin am\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)=0,$$

et la somme se réduit à zéro.

D'après cela, en posant $\sin am u = x$, on a

$$(63)\quad y = \frac{Cx\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am\frac{n-1}{2}\alpha}\right)}{(1-k^2x^2\sin^2 am\alpha)(1-k^2x^2\sin^2 am 2\alpha)\cdots\left[1-k^2x^2\sin^2 am\left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha\right]},$$

qui ne diffère de la relation (58) que par un facteur constant et par la valeur attribuée à n.

Nombre de transformations de degré premier $(2n+1)$.

665. En désignant par $2n+1$ un nombre premier impair, il faut, pour appliquer la méthode de transformation, choisir une racine de l'équation

$$\sin am(2n+1)\alpha = 0.$$

Cette équation est de degré $(2n+1)^2$, mais elle admet la solution $\sin am\alpha = 0$ qu'il faut rejeter. Il reste donc

$$4n^2+4n$$

racines. Mais à toutes ces racines ne correspondent pas de transformations différentes. Remarquons en effet que, pour chaque valeur de α, l'expression des racines est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin am u,\\ x_2 &= \sin am(u+\alpha),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ x_{2n+1} &= \sin am(u+2n\alpha). \end{aligned}$$

Si donc on y remplace α par $q\alpha$, q étant inférieur à $2n+1$, les racines ne font que se permuter, et l'on obtient la même transformation.

Il faut donc diviser par $2n$ le nombre total des racines, ce qui donne en tout

$$2n+2 = \mu+1$$

transformations distinctes. Et comme on peut à chacune, sans changer son degré, appliquer les six transformations du premier degré, le nombre de transformations d'ordre μ, μ étant premier, est $6\mu+6$.

Influence de la transformation sur le rapport des périodes.

666. Si nous posons

$$x = \sin am\, u \quad (\text{mod. } k),$$
$$y = \sin am\, v \quad (\text{mod. } \lambda),$$

la formule générale de transformation équivaut à

$$v = \varepsilon u + C,$$

et la relation obtenue entre y et x est telle (**660**) que, u augmentant de α, y reste invariable; $\sin am\, v$ admet donc pour période $\varepsilon\alpha$, et il admet en outre, cela est évident, le produit par ε de toute période de $\sin am\, u$; il est clair en effet que, u augmentant d'une période, x conserve la même valeur, et il en est par conséquent de même de y.

Toutes les périodes d'un sinus d'amplitude étant réductibles à deux (**597**), nous voyons qu'après la transformation l'une d'elles est multipliée par ε; mais l'autre $\varepsilon\alpha$ est multipliée par $\frac{\varepsilon}{2n+1}$, puisque α est la $2n+1^{ième}$ partie d'une période; on peut donc dire que le rapport de deux périodes a été divisé par $2n+1$.

667. Le résultat précédent peut être généralisé. Quelle que soit la relation algébrique qui lie deux sinus d'amplitude correspondant à deux modules différents, le rapport des périodes relatives aux deux modules est commensurable.

Soient en effet $\sin am\, u$ (mod. k) et $\sin am(mu + \alpha)$ (mod. k') les deux sinus d'amplitude entre lesquels existe une relation algébrique. Lorsqu'on donne $\sin am\, u$, u peut avoir l'une quelconque des valeurs comprises dans les formules

$$u + 4p\omega + 2q\omega'\sqrt{-1},$$
$$2\omega - u + 4p_1\omega + 2q_1\omega'\sqrt{-1},$$

p, q, p_1, q_1 étant des nombres entiers. La somme $mu + \alpha$ est donc de la forme

$$mu + \alpha + 4pm\omega + 2qm\omega'\sqrt{-1},$$
$$\alpha + 2m\omega - mu + 4mp_1\omega + 2mq_1\omega'\sqrt{-1}.$$

Ces dernières expressions doivent donc donner pour leur sinus d'amplitude (mod. k'), et quels que soient les nombres entiers p, q, p_1, q_1, un nombre limité de valeurs distinctes, et il faut pour cela qu'en les représentant par des points du plan, suivant la méthode adoptée pour les expressions imaginaires, les sommets des parallélogrammes ainsi obtenus se trouvent tous parmi ceux des parallélo-

grammes qui représentent les périodes relatives au module k'. Ces derniers peuvent d'ailleurs être en plus grand nombre, et les parallélogrammes dont ils sont les sommets, former des parties aliquotes des précédents, de telle sorte que les côtés qui représentent deux périodes soient respectivement représentés par la $n^{ième}$ et la $n'^{ième}$ partie de ceux de l'autre, c'est-à-dire de deux périodes relatives au module k respectivement multipliées par le facteur m; et le rapport de deux périodes convenablement choisies relatives au module λ' sera par conséquent égal au rapport de deux périodes relatives au module λ, multiplié par la fraction commensurable $\frac{n'}{n}$.

CHAPITRE VII.

CALCULS NUMÉRIQUES.

Calcul de la quantité q.

668. Nous avons désigné (633) par la lettre q l'expression $e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}}$ qui dépend seulement du rapport des périodes, et qui joue dans la théorie un rôle fort important.

Nous donnons à la fin de ce chapitre la table des valeurs numériques de cette quantité correspondant à celles du module k, représenté par $\sin\theta$.

Il est aisé d'obtenir, pour le calcul de cette table, une formule extrêmement convergente. L'équation (636)

$$\Delta am x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)},$$

où k' représente $\sqrt{1-k^2}$, c'est-à-dire $\cos\theta$, donne en y faisant $x=0$, et remplaçant la fonction Θ par son développement (639),

$$(1)\qquad \sqrt{\cos\theta} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots}.$$

En effectuant la division, on trouve

$$(2)\qquad \sqrt{\cos\theta} = 1-4q+8q^2-16q^3+32q^4-56q^5+96q^6-\ldots.$$

L'ensemble des cinq premiers termes peut être représenté par

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{1-2q}{1+2q}.$$

On en déduit

$$(3)\qquad q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\theta}}{1+\sqrt{\cos\theta}},$$

formule exacte aux termes près de l'ordre q^5.

669. On déduit de (1) la formule exacte

$$\frac{1+\sqrt{\cos\theta}}{1-\sqrt{\cos\theta}}=\frac{\sqrt{1+\tang^2\frac{1}{2}\theta}+\sqrt{1-\tang^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+\tang^2\frac{\theta}{2}}-\sqrt{1-\tang^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1+2q^4+2q^{16}+\ldots}{2q+2q^9+2q^{25}+\ldots},$$

d'où l'on tire, par la méthode des coefficients indéterminés,

$$(4)\qquad q=\frac{1}{4}\tang^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{16}\tang^6\frac{\theta}{2}+\frac{17}{512}\tang^{10}\frac{\theta}{2}+\frac{45}{2048}\tang^{14}\frac{\theta}{2}+\ldots,$$

et

$$(5)\qquad \log q=2\log\tang\frac{\theta}{2}-\log 4+\mathrm{M}\left(\frac{1}{4}\tang^4\frac{\theta}{2}+\frac{13}{128}\tang^8\frac{\theta}{2}+\frac{23}{384}\tang^{12}\frac{\theta}{2}+\ldots\right),$$

M étant le module des logarithmes vulgaires. Si l'on pose

$$(6)\quad \log q=2\log\tang\frac{\theta}{2}+9{,}39794\,00+a\tang^4\frac{\theta}{2}+b\tang^8\frac{\theta}{2}+c\tang^{12}\frac{\theta}{2}+d\tang^{16}\frac{\theta}{2}+\ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\log a&=9{,}0357243,\\ \log b&=8{,}64452,\\ \log c&=8{,}41518,\\ \log d&=8{,}25283\end{aligned}$$

Lorsque θ est moindre que 45 degrés, la série (6) est très-convergente, et pour obtenir sept décimales exactes, il suffit d'employer deux termes au plus.

Soit $\theta=10^\circ\,23'\,46''$, on aura

$$\begin{aligned}2\log\tang\frac{\theta}{2}&=7{,}9176842\\ \mathrm{c^t}\log 4&=9{,}3979400\\ &\;\;74\\ \hline \log q&=7{,}3156316\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}4\log\tang\frac{\theta}{2}&=5{,}835\\ \log a&=9{,}036\\ \hline &\;\;4{,}871\\ a\tang^4\frac{\theta}{2}&=0{,}00000743\end{aligned}$$

et les sept décimales sont exactes.

Lorsque θ approche de $\frac{\pi}{2}$, $\tang\frac{\theta}{2}$ diffère peu de l'unité, et la série est peu convergente, mais deux modules complémentaires peuvent (649) être ramenés l'un à l'autre, et si l'on nomme p ce que devient q, lorsque θ se change en son complé-

ment, on trouve aisément

$$(7)\qquad q = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega}},\quad p = e^{-\frac{\omega\pi}{\omega'}}.$$

On en conclut

$$(8)\qquad \log\left(\frac{1}{q}\right)\log\left(\frac{1}{p}\right) = M^2\pi^2 = 1,86152\,28349,$$

et

$$\log\log\left(\frac{1}{q}\right) + \log\log\left(\frac{1}{p}\right) = 0,26986\,83680,$$

par où l'on déduira p de q.

Soit par exemple $\theta' = 79^\circ\,36'\,14''$, on vient de trouver

$$\log q = 7,31563\,16,$$

donc

$$\log\log\frac{1}{q} = 0,42884\,21,$$

et on en déduit

$$\log\log\frac{1}{p} = 9,84102\,63,$$

$$\log p = 9,30653\,21.$$

Calcul de la période ω.

670. Nous avons trouvé (**640**)

$$(9)\qquad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'\omega}{\pi}},$$

et (**641**)

$$(10)\qquad \Theta(\omega) = \frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}.$$

Mais (**639**)

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\omega} + 2q^4\cos^2\frac{\pi x}{\omega} - 2q^9\cos^3\frac{\pi x}{\omega} + \ldots;$$

en déduisant de cette formule $\Theta(0)$ et $\Theta(\omega)$, l'équation (10) donne

$$\omega = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2,$$

et, en ajoutant les équations (9) et (10), on obtient

$$(11)\qquad \omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{k'}}\right)^2(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots)^2.$$

Pour $\theta = 45$ degrés, on a

$$\log q = -1,364,$$

et par conséquent

$$\log 2q^{16} = \overline{22},471,$$

et l'on peut, sans erreur sensible, réduire la parenthèse à deux termes.

Soit $\theta = 19°30'$, on a

$$\begin{aligned}
\log q &= 8,6356236,\\
\omega &= \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2,\\
1 + 2q &= 1,0147662 4\\
\log(1 + 2q) &= 0,0063660 \quad \text{(Table II)}.\\
2\log(1 + 2q) &= 0,0127320\\
\log\frac{\pi}{2} &= 0,1961199\\
\hline
\log\omega &= 0,2088519\\
\omega &= 1,6151011
\end{aligned}$$

La formule (11) conduit au même résultat; elle donne

$$\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1 + \sqrt{\cos\theta}}{2}\right)^{-2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\log\cos\theta &= 9,9743466\\
\log\sqrt{\cos\theta} &= 9,9871733\\
1 + \sqrt{\cos\theta} &= 1,9708973\\
\frac{1 + \sqrt{\cos\theta}}{2} &= 0,9854486 5
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\log\omega = 0,2088519.$$

Quelques applications.

671. Déterminer l'aire du quadrant infini de la courbe représentée par l'équation

$$x^4y^2 + y^2 = 1.$$

Elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Soient

$$x = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \quad dx = \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}, \quad 1+x^4 = \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \omega.$$

On a $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 45$ degrés. La formule (11)

$$\omega = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{\cos\theta})^{-2}(1+2q^4+\ldots)^2$$

donne

$$\omega = 1,854075;$$

c'est également la longueur du quadrant de la circonférence de la lemniscate dont l'équation est

$$\rho = \sqrt{\frac{\cos 2\omega}{2}}.$$

672. Soit l'intégrale

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}},$$

déjà calculée (330) par le moyen des fonctions Γ.

Posons

$$(1-x^6) = \frac{z^6}{4x^6};$$

$$x^6 = \frac{1 \pm \sqrt{1-z^6}}{2},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que x^6 est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}$.

On aura

$$\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = -\frac{dz}{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-z^6}},$$

pour les deux limites $x = 0$ et $x = 1$, on a $z = 0$, mais la variable z varie de 0 à l'unité, puis de l'unité à 0, et elle est égale à 1, pour $x^6 = \frac{1}{2}$.

Il faut donc, pour faire usage de la transformation, partager l'intégrale cherchée en deux parties, l'une correspondant aux limites $x = 0$, $x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$, et l'autre aux limites $x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$, $x = 1$; on aura

$$\int_0^{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^6}},$$

$$\int_{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^6}},$$

et

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \sqrt[3]{4} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^6}}.$$

Soit maintenant $z^2 = \frac{1}{1+y^2}$, $dz = -z^3 y\, dy$. On trouve

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^6}} = -\frac{dy}{\sqrt{y^4+3y^2+3}}$$

et

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^6}} = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^4+3y^2+3}}.$$

Posons enfin

$$y = \sqrt[4]{3} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

$$dy = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3}\, \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$1 + y^2 + \frac{y^4}{3} = 1 + 2\cos 2\theta \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}^4 \frac{\varphi}{2},$$

où $\cos 2\theta = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $\theta = 15^\circ$,

$$\left(1 + y^2 + \frac{y^4}{3}\right) \cos^4 \frac{\varphi}{2} = \cos^4 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \cos 2\theta + \sin^4 \frac{\varphi}{2} = 1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi.$$

L'intégrale cherchée devient

$$u = \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[4]{3}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 15^\circ \sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 15^\circ \sin^2\varphi}},$$

et à l'aide de la table des valeurs de ω, on trouve

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\log 4 &= 0,2006867 \\ c^{t}\ \tfrac{1}{4}\log 3 &= 9,8807197 \\ \log\omega &= 0,2036154 \\ \hline \log u &= 0,2850218 \\ u &= 1,927622 \end{aligned}$$

résultat déjà obtenu (330).

Calcul de l'intégrale $\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

673. Si l'on pose

$$u = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

on a (636)

$$\Delta\, am\, u = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},$$

c'est-à-dire, en posant $x = \frac{\pi u}{\omega} = \frac{u}{\Theta^2(\omega)}$,

$$(12)\qquad \frac{\Delta\, am\, u}{\sqrt{k'}} = \frac{1+2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1-2q\cos 2x - 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots}.$$

Posons

$$\frac{\Delta\, am\, u}{\sqrt{k'}} = \cot\lambda,$$

nous aurons

$$(13)\qquad \frac{\cot\lambda - 1}{\cot\lambda + 1} = \operatorname{tang}(45^\circ - \lambda) = 2q\,\frac{\cos 2x + q^2(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) + \ldots}{1 + q^4(4\cos^2 2x - 2)},$$

et dans une première approximation très-souvent suffisante

$$\cos 2x = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ - \lambda)}{2q}.$$

Après avoir ainsi obtenu la valeur approchée de x, on calculera les termes multipliés par q^4 et q^8 dans la formule (13), et l'on obtiendra, en la résolvant par rapport à $\cos 2x$, une valeur aussi exacte qu'on puisse le désirer.

Soit par exemple

$$k = \sin 10^\circ, \quad \varphi = 25^\circ.$$

On a, dans ce cas,

$$\log q = 7,2818499,$$

et, d'après la série (684) $\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + \ldots$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\log \Theta^2(\omega) &= 0,0033179,\\
\log \Delta\, am\, u = \log\sqrt{1 - \sin^2 10^\circ \sin^2 25^\circ} &= 9,9988274,\\
\frac{1}{2}\log k' = \frac{1}{2}\log\cos 10^\circ &= 9,9966758,\\
\log \frac{\Delta\, am\, u}{\sqrt{k'}} &= 0,0021516\\
\log\cot\lambda &= 00215\\
\lambda &= 44^\circ\, 51'\, 30''\\
45^\circ - \lambda &= 8'\, 30''\\
\log\operatorname{tang}(45^\circ - \lambda) &= 7,39315\\
\log 2q &= 7,58288\\
\hline
\log\cos 2x &= 9,81027\\
2x &= 49^\circ\, 45'\, 20''\\
x &= 24^\circ\, 52'\, 40''
\end{aligned}$$

En portant cette valeur approchée de x dans les termes négligés de l'équation (13), on trouve

$$x = 24^\circ\, 49'\, 57'',51,$$

c'est-à-dire

$$x = 89\,397'',51$$

donc

$$\begin{aligned}
\log x &= 4,9513254\\
\log 1'' &= 4,6855749\\
\log \Theta^2(\omega) &= 0,0033179\\
\hline
\log u &= 9,6402182\\
u &= 0,4367252
\end{aligned}$$

valeur dont les sept chiffres sont exacts.

674. Calculons l'intégrale

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 5\cos\varphi + 6\cos^2\varphi}}.$$

Soit $x = \cos\varphi$, l'intégrale deviendra

$$u = -\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + 5x + 6x^2}}.$$

En posant

$$x = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\sin\varphi}{1 + \sqrt{27} + (1 - \sqrt{27})\sin\varphi},$$

on obtiendra

$$u = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

le module k étant égal à $2 - \sqrt{3}$, et les limites de φ étant θ et $\frac{\pi}{2}$, par conséquent

$$u = \sqrt{\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a (**641**) pour valeur de la première intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\,\Theta^2(\omega),$$

et la seconde intégrale se calculera comme dans l'exemple précédent. Voici le détail du calcul

$$k = 2 - \sqrt{3} = 0,26794\,919,$$
$$\log k = \log\sin\theta = 9,42805\,25,$$
$$\theta = 15^\circ\ 32'\ 32'',166.$$

On en déduit

$$q = 7,66805\,04,$$
$$\Theta(\omega) = 1,00931\,280,$$
$$\log\Theta(\omega) = 0,00402\,58.$$

Pour obtenir la valeur de x, en adoptant les notations de (673),

$$\begin{aligned}
\log\Delta\, am\, u &= 9{,}9988777\\
\tfrac{1}{2}\log\cos\theta &= 9{,}9919107\\
\hline
\log\cot\lambda &= 0{,}0069670\\
\lambda &= 44^\circ\, 32'\, 25'',606\\
45^\circ - \lambda &= 27'\, 34'',394\\
45^\circ - \lambda &= 1654'',394\\
\log 1654{,}394 &= 3{,}2186390\\
\log 1'' &= 4{,}6855749\ (*)\\
\tfrac{2}{3}\, c^{t}\log\cos(45^\circ - \lambda) &= 0{,}0000093\\
\hline
\log\operatorname{tang}(45^\circ - \lambda) &= 7{,}9042232\\
\log 2q &= 7{,}9690804\\
\hline
\log\cos 2x &= 9{,}9351428\\
2x &= 30^\circ\, 32'\, 25'',06\\
x &= 15^\circ\, 16'\, 11'',53, \text{ valeur approchée de } x.
\end{aligned}$$

En la portant dans l'équation (13), on obtient la valeur exacte de x,

$$\begin{aligned}
x &= 55952'',166\\
\frac{\pi}{2} &= 324000''\\
\frac{\pi}{2} - x &= 268\,047'',834\\
\log 268\,047{,}834 &= 5{,}4282128\\
\log 1'' &= 4{,}6855749\\
\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 0{,}1137877\\
\tfrac{1}{2}\log\sin\theta &= 9{,}7140262\\
\log\Theta^2(\omega) &= 0{,}0080258\\
\hline
\log u &= 9{,}8358397\\
u &= 0{,}6852352
\end{aligned}$$

(*) Lorsqu'on cherche le logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle moindre que 2° 45', on peut de préférence aux Tables trigonométriques employer les formules suivantes :

$$\log\sin\varphi = \log\varphi'' + a - \tfrac{1}{3}\, c^{t}\log\cos\varphi, \qquad a = \log 1'' = 4{,}6855749,$$

$$\log\operatorname{tang}\varphi = \log\varphi'' + a + \tfrac{2}{3}\, c^{t}\log\cos\varphi, \qquad b = c^{t}\, a = 5{,}3144251.$$

$$\log\cot\varphi = -\log\varphi'' + b - \tfrac{2}{3}\, c^{t}\log\cos\varphi.$$

675. Cherchons encore l'intégrale

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

en supposant $k = \sin 44^\circ$.

On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\log q &= 8,61368\,40 \\
\Theta(\omega) &= 1,08217\,503 \\
\log \Theta^2(\omega) &= 0,06859\,567 \\
\log \Delta = \log \sqrt{1 - \sin^2 44^\circ \sin^2 60^\circ} &= 9,90244\,01 \\
\frac{1}{2} \log k' = \frac{1}{2} \log \cos 44^\circ &= 9,92846\,70 \\
\hline
\log \cot \lambda &= 9,97397\,31 \\
\lambda &= 46^\circ\, 42'\, 56'',946 \\
45^\circ - \lambda &= -1^\circ\, 42'\, 56'',946
\end{aligned}$$

L'angle $2x$ est donc dans ce cas plus grand que 90°; on a

$$\begin{aligned}
\lambda - 45^\circ &= 6176'',946 \\
\log 6176,946 &= 3,79077\,38 \\
\log 1'' &= 4,68557\,49 \\
\frac{2}{3}\, c^t \log \cos(\lambda - 45^\circ) &= 0,00012\,99 \\
\hline
\log \operatorname{tang}(\lambda - 45^\circ) &= 8,47647\,86 \\
\log 2q &= 8,91471\,40 \\
\hline
\log \cos 2x &= 9,56176\,46 \\
2x &= 111^\circ\, 22'\, 49'' \\
x &= 55^\circ\, 41'\, 24'',50
\end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans les termes négligés de l'équation (13), on obtient la valeur exacte

$$x = 55^\circ\, 41'\, 24'',41,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
x &= 200484'',41 \\
\log 200484,41 &= 5,30208\,06 \\
\log 1'' &= 4,68557\,49 \\
\hline
\log x &= 9,98765\,55 \\
\log \Theta^2(\omega) &= 0,06859\,57 \\
\hline
\log u &= 0,05625\,12 \\
u &= 1,13828\,55
\end{aligned}$$

676. Pour donner un exemple de la solution du problème inverse, soient

$$u = 1,368407, \quad \theta = 38^\circ.$$

Cherchons la valeur de l'amplitude définie par l'équation

$$u = 1,368407 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 38^\circ \sin^2\varphi}}$$

Nous avons (673)

$$u = x\Theta^2(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta am\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \log q &= 8,4734187 & \log\Theta_1(x) &= 9,9798368 \\ \log\Theta^2(\omega) &= 0,0501955 & \log\Theta(x) &= 0,0192687 \\ \log u &= 0,1362153 & & \overline{} \\ \hline \log x &= 0,0860198 & & 9,9605681 \\ x &= 69^\circ\, 50'\, 46'',12 & \log\sqrt{k'} &= 9,9482661 \\ & & \log\Delta am\, u &= 9,9088342 \end{aligned}$$

Mais

$$\Delta^2 am\, u = 1 - k^2 \sin^2\varphi.$$

On en déduit, d'après la valeur trouvée pour Δ,

$$k^2 \sin^2\varphi = 1 - \Delta^2,$$

et en posant $\Delta = \sin\lambda$,

$$k \sin\varphi = \cos\lambda.$$

Or

$$\begin{aligned} \log\sin\lambda &= 9,9088342 \\ \log\cos\lambda &= 9,7675483 \\ \log k &= 9,7893420 \\ \hline \log\sin\varphi &= 9,9782063 \\ \varphi &= 72^\circ \end{aligned}$$

Évaluation de l'intégrale $\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$.

677. Nous avons trouvé (644), en posant $\varphi = am\, u$,

$$\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = u - k^2\int_0^u \sin^2 am\, u\, du$$

et

$$(14)\qquad \int_0^x dx \sin^2 am\, x = \frac{1}{k^2}\, x\, \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{k^2}\, \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Par conséquent

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = u - u\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

On a (639)

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{\omega} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{\omega} + \ldots,$$

$$\Theta'(u) = \frac{\pi}{2\omega}\left(4q\sin\frac{\pi u}{\omega} - 8q^4\sin\frac{2\pi u}{\omega} + 12q^9\sin\frac{3\pi u}{\omega} - \ldots\right),$$

$$\Theta''(u) = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\left(8q\cos\frac{\pi u}{\omega} - 32q^4\cos\frac{2\pi u}{\omega} + 72q^9\cos\frac{3\pi u}{\omega} + \ldots\right),$$

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{2\pi^2}{\omega^2} \times \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots},$$

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\pi}{2\omega} \times \frac{4q\sin\frac{\pi u}{\omega} - 8q^4\sin\frac{2\pi u}{\omega} + 12q^9\sin\frac{3\pi u}{\omega} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{\omega} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{\omega} + \ldots}.$$

Cette dernière formule peut être remplacée par une autre plus simple. On a (639)

$$\Theta(u) = C\left(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2\right)\left(1 - q^3\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^6\right)\cdots,$$

et par conséquent

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{4q\sin\frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2} + \frac{4q^3\sin^2\frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q^3\cos^2\frac{\pi u}{\omega} + q^6} + \cdots\right).$$

Mais on a

$$\frac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2} = q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots,$$

et l'on en déduit aisément

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{4q\sin\frac{\pi u}{\omega}}{1 - q^2} + \frac{4q^2\sin\frac{2\pi u}{\omega}}{1 - q^4} + \frac{4q^3\sin\frac{3\pi u}{\omega}}{1 - q^6} + \ldots\right).$$

En désignant cette valeur par Z, nous aurons

$$\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = u - u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + Z.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $u = \omega$ et $Z = 0$, l'intégrale devient donc

$$\omega - \omega\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \omega - \frac{2\pi^2}{\omega}\,\frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\ldots}{\Theta(0)},$$

et comme (**641**), (**642**)

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,\Theta^2(\omega),$$

$$(16)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\Theta^2(\omega) - \frac{4\pi}{\Theta(0)\Theta^2(\omega)}(q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\ldots).$$

Nous désignerons cette intégrale *complète* par ζ.

Quant à l'intégrale $\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, nous avons, en la désignant par z,

$$z = u - u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + Z,$$

mais

$$\zeta = \omega - \omega\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

et par conséquent

$$(17)\qquad z = \frac{u\zeta}{\omega} + Z,$$

ou

$$(18)\qquad z = \frac{u\zeta}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{q\sin\frac{\pi u}{\omega}}{1-q^2} + \frac{q^2\sin\frac{2\pi u}{\omega}}{1-q^4} + \frac{q^3\sin\frac{3\pi u}{\omega}}{1-q^6} + \cdots\right),$$

et q, ω, u, ζ et $\Theta(0)$ se calculeront comme il a été dit.

678. On demande $\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ pour $k = \sin 19^\circ$.

La formule (16) donne, en remarquant que $\Theta(0) = \sqrt{k'}\,\Theta(\omega)$ [641],

$$\zeta = \omega - \frac{4\pi q}{\Theta^3(\omega)\sqrt{k'}}(1 - 4q^3 + 9q^8 - \ldots). \tag{19}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \log q &= 7,84523\,8251 & \log\frac{\pi}{2} &= 0,19611\,988 \\ \log\Theta(\omega) &= 0,00603\,9893 & \log\Theta^3(\omega) &= 0,01207\,978 \\ & & \log\omega &= 0,20819\,966 \\ & & \omega &= 1,61510\,09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 4q^3 &= \bar{4},13777, \\ 4q^3 &= 0,00000\,1373, \\ \log(1 - 4q^3) &= -\mathrm{M} \times 0,00000\,1373 = -0,00000\,0596; \end{aligned}$$

M étant le module des logarithmes vulgaires. On a donc, en désignant par p le second terme de (17),

$$\begin{aligned} \log 4\pi &= 1,09920\,99 & \omega &= 1,61510\,09 \\ \log q &= 7,84523\,83 & p &= 0,08679\,46 \\ \mathrm{c^t}\log\Theta^3(\omega) &= 9,98188\,03 & \zeta &= 1,52830\,63 \\ \frac{1}{2}\mathrm{c^t}\log\cos\theta &= 0,01216\,50 & \log\zeta &= 0,01821\,04 \\ \log(1 - 4q^3) &= -0,00000\,06 & & \text{exacts au dernier chiffre.} \\ \log p &= 8,93849\,29 \\ p &= 0,08679\,46 \end{aligned}$$

679. Évaluer l'intégrale $z = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}$ pour $\theta = 19^\circ$ et $\varphi = 27^\circ$.

La formule (17) donne

$$z = \frac{2x\zeta}{\pi} + \mathrm{Z}.$$

En posant comme (673)

$$x = \frac{\pi u}{\omega} \quad \text{et} \quad \cot\lambda = \frac{\Delta\, am\, u}{\sqrt{k'}},$$

la valeur approchée de x se déterminera au moyen de l'équation

$$2q\cos 2x = \operatorname{tang}(45^\circ - \lambda),$$

on trouve

$$2x = 52^\circ\,42'\,40'';$$

en remplaçant dans l'équation (13) x par la valeur que nous venons de trouver, on obtient

$$\begin{aligned}
\log\cos 2x &= 9{,}7822882 & \log 94891{,}96 &= 4{,}9772294\\
2x &= 52^\circ\,43'\,3'',91 & \log 1'' &= 4{,}6855749\\
\text{et}\qquad x &= 26^\circ\,21'\,31'',96 & \log x &= 9{,}6628043\\
&= 94891'',96 & \log\zeta &= 0{,}0184210\,4 \qquad (678.)\\
& & \mathrm{c}^{\mathrm{t}}\log\frac{\pi}{2} &= 9{,}8038801\\
& & \log\frac{2x\zeta}{\pi} &= 9{,}6508948\\
& & \frac{2x\zeta}{\pi} &= 0{,}4476049
\end{aligned}$$

Il reste à trouver la valeur de

$$Z = \frac{4}{\Theta^2(\omega)}\left(\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \ldots\right).$$

Les logarithmes des dénominateurs des fractions entre parenthèses sont négligeables à l'exception du premier qui est $\log(1-q^2) = -0{,}0000213$;

$$\begin{aligned}
\log q &= 7{,}8452383 & \log q^2 &= 5{,}69048\\
\log\sin 2x &= 9{,}9007282 & \log\sin 4x &= 9{,}98405\\
\mathrm{c}^{\mathrm{t}}\log(1-q^2) &= 0{,}0000213 & & 5{,}67453\\
& 7{,}7459878 & & 0{,}0000472\,64\\
& 0{,}0055717\,02 & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log q^3 &= 3{,}53571 & \log q^4 &= 1{,}381\\
\log\sin 6x &= 9{,}57069 & \log\sin 8x &= 9{,}710\\
& 3{,}10640 & & 1{,}091\\
& 0{,}0^6 1278 & & 0{,}0^8 124
\end{aligned}$$

La valeur de la série entre parenthèses est donc

$$\begin{array}{r} 0,00557\,1702 \\ 4\,7264 \\ 128 \\ -1 \\ \hline 0,00561\,9093 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log 0,00561\ldots &= 7,7496663 \\ \log 4 &= 0,6020600 \\ c^{t}\log\Theta^{2}(\omega) &= 9,9879202 \\ \hline \log Z &= 8,3396465 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= 0,0218598 \\ \frac{2x\zeta}{\pi} &= 0,4476049 \\ \hline z &= 0,4694647 \end{aligned}$$ valeur exacte au dernier chiffre.

680. *Rectification de l'ellipse.* — Étant donnés les demi-axes de l'ellipse $a = 41^{m}$, $b = 40^{m}$, déterminer la longueur du quadrant de l'ellipse et l'arc correspondant à l'amplitude $\varphi = 15^{\circ}$.

Nous avons trouvé (394) que l'arc de l'ellipse est égal à $a\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, et comme $a = 41$, $b = 40$, on a

$$k = \sin\theta = \frac{9}{41},$$

donc

$$\begin{aligned} \log q &= 7,4894715\,39 \\ \log\Theta(\omega) &= 1,0061730\,75 \\ \log\omega &= 0,0214652\,6 \\ \omega &= 1,5902495 \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de $\zeta = \omega - \frac{2\pi^2 q}{\omega}(1 + 2q + 4q^2 + 4q^3 + 6q^4 + \ldots)$, on a

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 4q^2 + \ldots &= 1,0062113\,0 \\ \log(1 + 2q + \ldots) &= 0,0026891 \\ \zeta &= 1,5516994 \end{aligned}$$

donc

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 63^m,61968$$

longueur du quadrant de l'ellipse.

Pour déterminer l'arc x, posons (673)

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{k'}} = \cot\lambda \quad \text{et} \quad \cos 2x = \frac{1}{2q}\tang(45^\circ - \lambda),$$

d'où

$$\log\cos 2x = 9,9390604$$
$$2x = 29^\circ\,38'\,52'',58$$
$$\log x = 9,4128419 2$$
$$\log\frac{2\omega x}{\pi} = \log u = 9,4181873 0$$

Enfin, pour évaluer z, nous avons (695)

$$z = \frac{\zeta u}{\omega} + Z,$$

on trouve

$$\frac{\zeta u}{\omega} = 0,2555816;$$

le calcul de la série qui représente Z donne

$$Z = 0,0060650 88,$$

donc

$$z = \int_0^{\frac{\pi}{12}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 0,2616467,$$

et

$$az = 10^m,727514,$$

longueur de l'arc répondant à l'amplitude 15°, compris entre l'extrémité du petit axe et le point dont l'ordonnée est $40\cos 15^\circ$.

681. *Rectification de l'hyperbole.* — Soit le demi-axe transverse $a = 9^m$, son conjugué $b = 40^m$, déterminer l'arc de l'hyperbole correspondant à l'amplitude $\varphi = 15^\circ$.

Soit $c = \sqrt{a^2+b^2}$, distance du centre au foyer, et $k = \sin\theta = \frac{a}{c}$ son excentricité, nous avons trouvé pour valeur de l'arc (368)

$$s = \frac{b^2}{c}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a identiquement en désignant $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ par Δ et $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}$, $\int_0^\varphi d\varphi\,\Delta$ par u et z,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta} = \frac{k'^2 u + \operatorname{tang}\varphi\,\Delta - z}{k'^2},$$

donc

$$s = \frac{b^2 u}{c} + c\operatorname{tang}\varphi\,\Delta - cz;$$

et comme le module et l'amplitude sont les mêmes que dans l'exemple précédent, on a

	$\log\operatorname{tang}\varphi = 9{,}4280525$	
$\log u = 9{,}4181873$	$\log\Delta = 9{,}9992980$	$\log z = 9{,}4177152$
$\log\frac{b^2}{c} = 1{,}5913361$	$\log c = 1{,}6127839$	$\log c = 1{,}6127839$
$\log\frac{b^2 u}{c} = 1{,}0095234$	$1{,}0401344$	$\log cz = 1{,}0304991$
$\frac{b^2 u}{c} = 10^m{,}221706$	$c\operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi = 10^m{,}968177$	$cz = 10^m{,}727514$

et par suite

$$s = 10^m{,}462369,$$

longueur de l'arc de l'hyperbole.

682. Calculer la surface de l'ellipsoïde à trois axes : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

En désignant par S la surface totale de l'ellipsoïde, nous avons déjà trouvé (**406**)

$$\frac{S}{2a^2b^2c^2\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}(a^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}(a^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

il ne s'agit plus que de ramener ces deux intégrales aux fonctions elliptiques.

Soient

$$(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta) = b^2\left(1-\frac{b^2-a^2}{b^2}\cos^2\theta\right) = b^2(1-\sin^2\psi\cos^2\theta),$$

et

$$(a^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta) = c^2\left(1-\frac{c^2-a^2}{c^2}\cos^2\theta\right) = c^2(1-\sin^2\varphi\cos^2\theta),$$

on aura donc

$$\cos\psi = \frac{a}{b},$$

et

$$\cos\varphi = \frac{a}{c}, \quad c > b > a;$$

et soient

$$\sin\varphi\cos\theta = \sin\lambda, \quad \text{et} \quad \sin\psi\cos\theta = k\sin\lambda,$$

on a

$$1 - \sin^2\varphi\cos^2\theta = \cos^2\lambda, \quad 1 - \sin^2\psi\cos^2\theta = 1 - k^2\sin^2\lambda = (\Delta)^2, \quad -\sin\varphi\sin\theta\, d\theta = \cos\lambda\, d\lambda,$$

et

$$k^2 = \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\varphi} = \frac{1-\cos^2\psi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{c^2}{b^2}\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2},$$

$$k'^2 = \frac{a^2}{b^2}\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}.$$

Les limites de λ, correspondant à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, sont $\frac{\pi}{2}$ et φ, donc

$$\frac{\mathrm{S}bc\sin\varphi}{2a^2\pi} = b^2\int_0^\varphi \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\cos^2\lambda\,\Delta} + c^2\int_0^\varphi \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{\cos\lambda\,\Delta^3},$$

ou

$$\frac{\mathrm{S}bc\sin\varphi}{2a^2\pi} = b^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi} + c^2\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta^3};$$

or, en désignant $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}$ par u, et $\int_0^\varphi d\varphi\,\Delta$ par z, on trouve aisément

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi} = \frac{1}{k'^2}(\Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi + k'^2 u - z),$$

et

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{k'^2}\left(z - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right);$$

donc

$$\frac{\mathrm{S}bc\sin\varphi\, k'^2}{2a^2\pi} = b^2(\Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi + k'^2 u - z) + c^2\left(z - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)$$

$$= z(c^2 - b^2) + b^2 k'^2 u + b^2\Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{c^2 k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Mais

$$c^2 - b^2 = \frac{b^2 k'^2}{a^2}(c^2 - a^2) = b^2 k'^2 \operatorname{tang}^2\varphi,$$

et

$$b^2\Delta \operatorname{tang}\varphi - \frac{c^2 k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = (b^2 k'^2 + b^2 k^2 \cos^2\varphi - c^2 k^2 \cos^2\varphi)\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta} = ab k'^2 \operatorname{tang}\varphi;$$

donc

$$\frac{bc k'^2 \sin\varphi}{2a^2\pi} S = b^2 k'^2 \operatorname{tang}\varphi^2 u + b^2 k'^2 z + ab k'^2 \operatorname{tang}\varphi,$$

ou

$$\frac{S}{2ab\pi} = u \operatorname{tang}\varphi + z \cot\varphi + \frac{a}{b},$$

et

$$S = 2a^2\pi + 2ab\pi(u \operatorname{tang}\varphi + z \cot\varphi).$$

Soit

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3,$$

on a

$$\cos\varphi = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{9}, \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = 8, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{8}, \qquad \varphi = 70^\circ\, 31'\, 43'',61,$$

$$k^2 = \frac{c^2}{b^2}\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \qquad k^2 = \frac{27}{32}, \qquad k'^2 = \frac{5}{32}, \qquad \sin^2\theta = \frac{27}{32}, \qquad \theta = 66^\circ\, 42'\, 53'',77.$$

Nous donnons plus loin (**685**) le détail du calcul, déduit de l'emploi de l'échelle des modules.

Emploi de l'échelle des modules.

683. Lorsque le module d'une intégrale elliptique diffère peu de l'unité, les séries employées dans les calculs précédents sont peu convergentes, et il est avantageux de recourir à la transformation des modules exposée au Chapitre VI.

Si l'on pose

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad u_1 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1}, \quad \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tang}\varphi,$$

on aura (**654**)

$$u = \frac{1 + k_1}{2} u_1 = \frac{k'_1}{2\sqrt{k'}} u_1.$$

En répétant un nombre quelconque de fois la même transformation, on obtient

la formule

$$u = \frac{k'_1}{2\sqrt{k'}}\,\frac{k'_2}{2\sqrt{k'_1}}\cdots\frac{k'_n}{2\sqrt{k'_n}}\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}},$$

et comme k_n tend vers zéro lorsque n augmente, on peut écrire

$$u = \frac{\varphi_n}{2^n}\sqrt{\frac{k'_1 k'_2 \ldots k'_n}{k'}}.$$

En désignant par x la valeur limite de $\frac{\varphi_n}{2^n}$, on aura

$$u = x\sqrt{\frac{k'_1 k'_2 \ldots k'_n}{k'}}.$$

Lorsque φ est égal à $\frac{\pi}{2}$, x est lui-même égal à $\frac{\pi}{2}$, et l'on a par conséquent

$$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k'_1 k'_2 k'_3 \ldots}{k'}}.$$

684. Considérons l'intégrale plus générale

$$P = \int_0^{\varphi}(A + B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si, après avoir posé $k = \sin\theta$, nous faisons comme (**654**)

$$k_1 = \tang^2\frac{\theta}{2},$$
$$\tang(\psi - \varphi) = \cos\theta\tang\varphi,$$

cette dernière équation étant équivalente à

$$\sin(2\varphi - \psi) = k_1\sin\psi,$$

on en déduira

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_1}{2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}},$$

et

$$2\sin^2\varphi = 1 + k_1\sin^2\psi - \cos\psi\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}.$$

Par conséquent

$$P = \frac{1+k_1}{2}\int_0^{\psi}(A_1 + B_1\sin^2\psi)\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} - \frac{1+k_1}{2}\,\frac{B}{2}\sin\psi,$$

où $A_1 = A + \frac{B}{2}$, et $B_1 = \frac{Bk_1}{2}$. L'intégrale P est ainsi ramenée à une autre de

même forme. En désignant cette intégrale nouvelle par P_1, on a

$$P = \frac{1+k_1}{2}\left(P_1 - \frac{1}{2} B \sin\psi\right),$$

et, en répétant la même transformation, on aura

$$P_1 = \frac{1+k_2}{2}\left(P_2 - \frac{1}{2} B_1 \sin\psi_1\right),$$

$$P_2 = \frac{1+k_3}{2}\left(P_3 - \frac{1}{2} B_2 \sin\psi_2\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$P_n = \frac{1+k_n}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{2} B_{n-1} \sin\psi_{n-1}\right).$$

On en déduit

$$P = P_n \frac{(1+k_1)}{2}\frac{(1+k_2)}{2}\cdots\frac{(1+k_n)}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} B \sin\psi(1+k_1) + \frac{1}{2^2} B_1 \sin\psi_1(1+k_1)(1+k_2) + \frac{1}{2^3}\sin\psi_2(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) + \dots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^n} B_{n-1}\sin\psi_{n-1}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)\right].$$

Cherchons maintenant la valeur limite de P_n, lorsque n croit indéfiniment. Nous avons

$$B_1 = \frac{1}{2} B k_1,$$

$$B_2 = \frac{1}{2} B_1 k_2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$B_n = \frac{1}{2} B_{n-1} k_n.$$

Or k_n tend vers zéro (653), donc B_n lui-même devient nul à la limite. De plus

$$A_1 = A + \frac{1}{2} B,$$

$$A_2 = A_1 + \frac{1}{2} B_1 = A + \frac{1}{2}(B + B_1),$$

$$A_3 = A_2 + \frac{1}{2} B_2 = A + \frac{1}{2}(B + B_1 + B_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_n = A + \frac{1}{2}(B + B_1 + \dots + B_{n-1}).$$

On en conclut

$$A_n = A + \frac{B}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \frac{k_1 k_2 k_3}{2^3} + \cdots\right),$$

par conséquent,

$$P_n = \int_0^{\psi_{n-1}} A_n \, d\varphi_n = A_n \varphi_{n-1}.$$

Le premier terme de la valeur de P devient donc

$$\frac{A_n \varphi_n}{2^n} \sqrt{\frac{k'_1 k'_2 k'_3}{k'}} = A_n u,$$

u désignant comme précédemment la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

On peut donc écrire

$$P = A_n u - \frac{1}{2}\left[B \sin\psi \frac{1 + k_1}{2} + B_1 \sin\psi_1 \left(\frac{1 + k_1}{2}\right)\left(\frac{1 + k_2}{2}\right) + \cdots \right].$$

Mais

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1}, \quad \frac{1 + k_1}{2} = \frac{\sqrt{k_1}}{k},$$

et en remplaçant $B_1, B_2, \ldots, B_n$ par leurs valeurs, on aura

$$P = A_n u - \frac{B}{2k}\left(\sqrt{k_1} \sin\psi + \frac{1}{2}\sqrt{k_1 k_2} \sin\psi_1 + \frac{1}{2^2}\sqrt{k_1 k_2 k_3} \sin\psi_2 + \ldots\right).$$

Soient $A = 1$, $B = -k^2$. On aura

$$P = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

et

$$A_n = 1 - \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \frac{k_1 k_2 k_3}{2^3} + \cdots\right),$$

par conséquent,

$$(20) \quad \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = A_n u + \frac{k}{2}\left(\sqrt{k_1} \sin\psi + \frac{1}{2}\sqrt{k_1 k_2} \sin\psi_1 + \frac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2 k_3} \sin\psi_2 + \ldots\right).$$

Soient $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \pi$, $\psi_1 = 2\pi$, $\psi_3 = 4\pi$. On aura

$$u = \omega,$$

$$\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = A_n \omega,$$

et par conséquent, représentant par Z le second terme de (20),

$$\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{u\zeta}{\omega} + Z,$$

qui est semblable à la formule (17), (677).

685. Soient $\theta = 89^\circ$ et $\varphi = 85^\circ$. On aura

$$\begin{array}{ll}
\log k = 9,999934 & \log k' = 8,24186 \\
\log k_1 = 9,98484 & \log k'_1 = 9,41444 \\
\log k_2 = 9,76916 & \log k'_2 = 9,90799 \\
\log k_3 = 9,02340 & \log k'_3 = 9,99757 \\
\log k_4 = 7,44716 & \log k'_4 = 0 \\
\log k_5 = 4,29227 &
\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
\log k'_1 k'_2 k'_3 &= 9,32000 \\
\log k' &= 8,24186 \\
\hline
\log \Theta^4(\omega) &= 1,07814 \\
\log \Theta^2(\omega) &= 0,53907 \\
\log \frac{\pi}{2} &= 0,19612 \\
\hline
\log \omega &= 0,73519 \\
\omega &= 5,4349
\end{aligned}$$

$$\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \omega - \frac{\omega k^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1k_2 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}k_1 &= 0,48285 \\
\frac{1}{4}k_1k_2 &= 0,14189 \\
\frac{1}{8}k_1k_2k_3 &= 0,00749 \\
\frac{1}{16}k_1k_2k_3k_4 &= 0,00001 \\
\hline
\text{donc}\quad 1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1k_2 + \ldots &= 1,63224 \\
\log\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \cdots\right) &= 0,21278
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \omega &= 0,73519 \\
\log k^2 &= 9,99987 \\
\text{c}^t \log 2 &= 9,69897 \\
\log\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \cdots\right) &= 0,21278 \\
\hline
\log \frac{\omega k^2(\ )}{2} &= 0,64681 \\
\frac{\omega k^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \cdots\right) &= 4,43415 \\
\omega &= 5,43490 \\
\hline
\zeta &= 1,00075
\end{aligned}$$

En désignant par φ, φ_1, φ_2, φ_3,... les amplitudes successives, on a

$$\varphi = 85^\circ$$
$$\frac{\varphi_1}{2} = 48^\circ\ 4',22$$
$$\frac{\varphi_2}{4} = 52^\circ\ 18',79$$
$$\frac{\varphi_3}{8} = 51^\circ 42',22$$
$$\frac{\varphi_4}{16} = 51^\circ 41',66$$
$$\frac{\varphi_5}{32} = 51^\circ 41',66$$

donc

$$\begin{aligned} x &= 51^\circ 41,66 \\ &= 3101',66 \\ \log 3101,66 &= 3,49159 \\ \log 1' &= 6,46373 \\ \hline \log x &= 9,95532 \\ \log \Theta^2(\omega) &= 0,53907 \\ \hline \log u &= 0,49439 \end{aligned}$$

et

$$u = 3,12170$$

Enfin pour avoir la valeur de l'intégrale $z = \frac{\zeta u}{\omega} + Z$, on a d'abord

$$\begin{aligned} \log \zeta &= 0,000325 \\ \log u &= 0,49439 \\ \text{c}^t \log \omega &= 9,26481 \\ \hline \log \frac{\zeta u}{\omega} &= 9,759525 \\ \frac{\zeta u}{\omega} &= 0,57481 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{k}{2}\left(\sin\varphi_1\sqrt{k_1} + \frac{1}{2}\sin\varphi_2\sqrt{k_1 k_2} + \frac{1}{4}\sin\varphi_3\sqrt{k_1 k_2 k_3} + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi_1\sqrt{k_1} &= +0,97679 \\ \frac{1}{2}\sin\varphi_2\sqrt{k_1 k_2} &= -0,18408 \\ \frac{1}{4}\sin\varphi_3\sqrt{k_1 k_2 k_3} &= +0,04927 \\ \frac{1}{8}\sin\varphi_4\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} &= +0,00155 \\ \hline & 0,84353 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \log k &= 9,99993 \\ \text{c}^t \log 2 &= 9,69897 \\ \log 0,84353 &= 9,92611 \\ \hline \log Z &= 9,62501 \\ Z &= 0,42171 \end{aligned}$$

et

$$z = 0,57481 + 0,42171,$$

ou

$$z = 0,99652 \text{ valeur de l'intégrale.}$$

686. Nous avons trouvé (682), en donnant à u et à z la signification adoptée (673) et (679), pour l'expression de la surface de l'ellipsoïde dont les axes sont 1, 2 et 3,

$$S = \pi\sqrt{2}(u + 8z + \sqrt{2}).$$

Pour trouver l'échelle des modules décroissants, on a la formule (683)

$$\cos\theta_1 = k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad \sin\theta_1 = k_1 = \frac{1-k'}{1+k'};$$

mais

$$k' = \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{32}}, \qquad k = \sin\theta = \sqrt{\frac{27}{32}},$$

donc

$\log k' = 9,59691\ 00130\ 08056$	$\log k = 9,96310\ 68929\ 19541$
$\log k'_1 = 9,95482\ 21678\ 27620$	$\log k_1 = 9,63688\ 81171\ 58303$
$\log k'_2 = 9,99941\ 28071\ 54889$	$\log k_2 = 8,71571\ 96894\ 70802$
$\log k'_3 = 9,99999\ 99007\ 59903$	$\log k_3 = 6,82996\ 63819\ 786$
$\log k'_4 = 9,99999\ 99999\ 99997$	$\log k_4 = 3,05787\ 28718\ 69$
$\log k'_5 = 0$	$\log k_5 = 5,51368\ 57524 - 20$

La formule qui donne les amplitudes successives équivaut à

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = (1+k')\frac{\operatorname{tang}\varphi}{1-k'^2\operatorname{tang}^2\varphi};$$

on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{8}, \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{8}{9}},$$

donc

$\log\operatorname{tang}\varphi = 0,45154\ 49934\ 95972$	$\log\sin\varphi = 9,97442\ 37387\ 76309$
$\log\operatorname{tang}\varphi_1 = 0,26129\ 63664\ 63131$	$\log\sin\varphi_1 = 9,94299\ 53140\ 67846$
$\log\operatorname{tang}\varphi_2 = 0,23885\ 42485\ 92412$	$\log\sin\varphi_2 = 9,93760\ 39997\ 91105$
$\log\operatorname{tang}\varphi_3 = 0,23856\ 06769\ 79880$	$\log\sin\varphi_3 = 9,93753\ 06441$
$\log\operatorname{tang}\varphi_4 = 0,23856\ 06273\ 59833$	$\log\sin\varphi_4 = 9,93753\ 06317$
$\log\operatorname{tang}\varphi_5 = 0,23856\ 06273\ 59831$	$\log\sin\varphi_5 = 9,93753\ 06317$

Ces logarithmes étant connus, on obtient d'abord la valeur de ω :

$$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k'_1 k'_2 k'_3 \ldots}{k'}},$$

$$\log\frac{\pi}{2} = 0,19611\ 98770\ 30153$$

$$\log\sqrt{\frac{k'_1 k'_2 \ldots}{k'}} = 0,17866\ 24313\ 67177$$

$$\log\omega = 0,37478\ 23083\ 97330$$

$$\omega = 2,37018\ 53442\ 96106$$

L'angle limite x est égal à $\frac{\varphi_n}{2^n}$ (684); mais le logarithme de $\operatorname{tang}\varphi_5$ est précisément la moitié du logarithme de 3; donc

$$\operatorname{tang}\varphi_5 = \sqrt{3}, \quad \varphi_5 = 1920^\circ \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_5}{2^5} = x = 60^\circ = \frac{\pi}{3},$$

par conséquent,

$$u = \frac{2\omega}{3} = 1,58012\ 35628\ 64071.$$

L'intégrale ζ étant égale (684) à

$$\omega - \frac{\omega k^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \ldots\right),$$

on a

$$\omega = 2,37018\ 53442\ 96106$$

le second terme est égal à $\quad 1,22223\ 68607\ 99651$

donc $\quad \zeta = 1,14794\ 84834\ 96455$

Enfin, pour avoir la valeur de $z = \frac{2}{3}\zeta + Z$, on trouve

$$\frac{2}{3}\zeta = 0,76529\ 89889\ 97637$$

$$Z = 0,23570\ 19297\ 18559$$

d'où $\quad z = 1,00100\ 09187\ 16196$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1,41421\,35623\,73095\\
u &= 1,58012\,35628\,64071\\
8z &= 8,00800\,73497\,29563\\
\hline
\sqrt{2}+u+8z &= 11,00234\,44749\,66729\\
\\
\log(\sqrt{2}+u+8z) &= 1,04148\,52382\,53739\,3\\
\log\pi &= 0,49714\,98726\,94133\,9\\
\log\sqrt{2} &= 0,15051\,49978\,31990\,6\\
\hline
\log S &= 1,68915\,01087\,79863\,8
\end{aligned}$$

et

$$S = 48,88212\,85475\,7065 \quad \text{exact à 16 chiffres.}$$

FIN DE LA PREMIÈRE SECTION DU CALCUL INTÉGRAL.

TABLES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

TABLE I

Contenant les logarithmes de la fonction q pour les valeurs de l'angle θ, dont le sinus représente le module, de cinq en cinq minutes de degré, depuis 0° jusqu'à 90°.

TABLE II

Contenant pour toutes les valeurs de l'angle θ de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90° :

1° Les logarithmes de la fonction $\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$;

2° Les logarithmes de $\log\left(\frac{1}{q}\right)$;

3° Les logarithmes de l'intégrale $\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$;

4° Les logarithmes de l'intégrale $\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$.

TABLE III

Contenant la valeur de l'intégrale $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ correspondant à diverses valeurs de l'amplitude φ et de l'angle θ.

Pour $\theta = 0$, on obtient la fonction $u = \operatorname{arc}\varphi$; pour $\theta = 90°$, on a $u = \log \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$.

TABLE IV

Contenant la valeur de l'intégrale $z = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ correspondant à diverses valeurs de l'amplitude φ et de l'angle θ.

Pour $\theta = 0$, on a $z = \operatorname{arc}\varphi$; pour $\theta = 90°$, on a $z = \sin\varphi$.

I. — *Table des logarithmes de q.*

θ	log q.											
	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
0	—∞	3,12127	3,72333	4,07552	4,32539	4,51922	4,67758	4,81148	4,92746	5,02977	5,12129	5,20408
1	5,27966	5,34918	5,41356	5,47349	5,52955	5,58221	5,63187	5,67883	5,72339	76578	80619	84481
2	88178	91725	95132	98411	6,01571	6,04620	6,07565	6,10414	6,13173	6,15847	6,18441	6,20960
3	6,23408	6,25789	6,28106	6,30363	32564	34710	36804	38849	40847	42801	44711	46581
4	48411	50203	51960	53681	55369	57025	58651	60246	61813	63352	64864	66351
5	67813	69250	70664	72056	73426	74775	76103	77411	78700	79970	81222	82456
6	83673	84874	86058	87226	88379	89516	90639	91748	92843	93925	94993	96049
7	97091	98122	99140	7,00147	7,01143	7,02127	7,03100	7,04063	7,05015	7,05957	7,06888	7,07811
8	7,08723	7,09626	7,10520	11405	12281	13148	14007	14858	15700	16534	17361	18180
9	18991	19795	20592	21381	22164	22939	23708	24470	25226	25975	26718	27454
10	28185	28910	29628	30341	31048	31750	32446	33136	33821	34501	35176	35846
11	36510	37170	37825	38475	39120	39760	40396	41028	41655	42277	42896	43510
12	44119	44725	45326	45924	46517	47107	47693	48274	48852	49427	49997	50564
13	51128	51688	52244	52797	53346	53893	54436	54975	55511	56045	56575	57101
14	57625	58146	58664	59178	59690	60199	60705	61208	61709	62206	62701	63194
15	63683	64170	64654	65136	65615	66091	66566	67037	67506	67973	68437	68899
16	69359	69816	70271	70724	71174	71622	72068	72512	72954	73393	73831	74266
17	74699	75130	75560	75987	76402	76835	77256	77675	78093	78508	78922	79333
18	79743	80151	80558	80962	81365	81766	82165	82562	82958	83352	83744	84135
19	84524	84911	85297	85681	86064	86445	86824	87202	87578	87953	88326	88698
20	89068	89437	89804	90170	90535	90898	91259	91620	91979	92336	92692	93047
21	93400	93752	94103	94452	94801	95147	95493	95837	96180	96522	96863	97202
22	97540	97877	98213	98547	98880	99212	99543	99873	8,00202	8,00529	8,00856	8,01181
23	8,01505	8,01828	8,02150	8,02471	8,02791	8,03109	8,03427	8,03744	04059	04374	04687	05000
24	05311	05621	05931	06239	06547	06853	07159	07463	07767	08069	08371	08672
25	08971	09270	09568	09865	10161	10456	10751	11044	11336	11628	11919	12209
26	12498	12786	13073	13360	13645	13930	14214	14497	14780	15061	15342	15622
27	15901	16179	16457	16734	17010	17285	17559	17833	18106	18378	18650	18920
28	19190	19459	19728	19996	20263	20529	20795	21060	21324	21588	21851	22113
29	22374	22635	22895	23155	23414	23672	23929	24186	24442	24698	24953	25207
30	25461	25714	25966	26218	26469	26719	26969	27219	27467	27715	27963	28210
31	28456	28702	28947	29191	29435	29679	29922	30164	30406	30647	30887	31127
32	31367	31606	31844	32082	32319	32556	32792	33028	33263	33498	33732	33966
33	34199	34431	34664	34895	35126	35357	35587	35816	36046	36274	36502	36730
34	36957	37184	37410	37636	37861	38086	38310	38534	38757	38980	39203	39425
35	39646	39867	40088	40308	40528	40747	40966	41185	41403	41620	41838	42054
36	42271	42487	42702	42917	43132	43346	43560	43774	43987	44199	44411	44623
37	44835	45046	45256	45467	45677	45886	46095	46304	46512	46720	46928	47135
38	47342	47548	47754	47960	48166	48371	48575	48779	48983	49187	49390	49593
39	49796	49998	50200	50401	50602	50803	51003	51204	51403	51603	51802	52001
40	52199	52397	52595	52792	52990	53186	53383	53579	53775	53971	54166	54361
41	54555	54750	54944	55137	55331	55524	55717	55909	56101	56293	56485	56676
42	56867	57058	57249	57439	57629	57818	58007	58197	58385	58574	58762	58950
43	59138	59325	59512	59699	59885	60072	60258	60443	60629	60814	60999	61184
44	61368	61553	61737	61920	62104	62287	62470	62653	62835	63017	63199	63381

I. — *Table des logarithmes de q* (suite).

θ	log q.											
	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
45	8,63562	8,63744	8,63925	8,64105	8,64286	8,64466	8,64646	8,64826	8,65006	8,65185	8,65364	8,65543
46	65722	65900	66078	66256	66434	66611	66789	66966	67143	67320	67496	67672
47	67848	68024	68200	68375	68550	68725	68900	69074	69249	69423	69597	69771
48	69944	70118	70291	70464	70636	70809	70981	71154	71326	71497	71669	71840
49	72012	72183	72353	72524	72695	72865	73035	73205	73375	73544	73714	73883
50	74052	74221	74390	74558	74726	74895	75063	75231	75398	75566	75733	75900
51	76067	76234	76401	76567	76733	76900	77066	77232	77398	77563	77729	77894
52	78059	78224	78389	78554	78718	78883	79047	79211	79375	79539	79703	79866
53	80030	80193	80356	80519	80682	80845	81007	81170	81332	81494	81656	81818
54	81980	82142	82303	82464	82626	82787	82948	83109	83270	83430	83591	83751
55	83911	84072	84232	84392	84552	84711	84871	85030	85190	85349	85508	85667
56	85826	85985	86144	86302	86461	86619	86778	86936	87094	87252	87410	87568
57	87726	87883	88041	88198	88356	88513	88670	88827	88984	89141	89298	89454
58	89611	89768	89924	90080	90237	90393	90549	90705	90861	91017	91173	91329
59	91484	91640	91795	91951	92106	92261	92417	92572	92727	92882	93037	93192
60	93347	93501	93656	93811	93965	94120	94274	94429	94583	94737	94891	95046
61	95200	95354	95508	95662	95816	95970	96123	96277	96431	96584	96738	96892
62	97045	97199	97352	97506	97659	97812	97966	98119	98272	98425	98579	98732
63	8,98885	99038	99191	99344	99497	99650	99803	99956	9,00109	00261	00414	00567
64	9,00720	00873	01026	01178	01331	01484	01637	01789	01942	02095	02247	02400
65	02553	02704	02858	03011	03163	03316	03469	03621	03774	03927	04079	04232
66	04385	04537	04690	04843	04996	05148	05301	05454	05607	05760	05912	06065
67	06218	06371	06524	06677	06830	06983	07136	07289	07442	07595	07748	07902
68	08055	08208	08361	08515	08668	08822	08975	09129	09282	09436	09590	09743
69	09897	10051	10205	10359	10513	10667	10821	10975	11130	11284	11439	11593
70	11748	11902	12057	12212	12367	12522	12677	12832	12987	13142	13298	13453
71	13609	13765	13920	14076	14232	14388	14544	14701	14857	15014	15170	15327
72	15484	15641	15798	15955	16113	16270	16428	16585	16743	16901	17059	17218
73	17376	17535	17693	17852	18011	18170	18330	18489	18649	18809	18969	19129
74	19289	19450	19610	19771	19932	20094	20255	20417	20578	20740	20903	21065
75	21228	21391	21554	21717	21880	22044	22208	22372	22537	22701	22866	23031
76	23197	23362	23528	23694	23861	24027	24194	24361	24529	24697	24865	25033
77	25202	25371	25540	25709	25879	26050	26220	26391	26562	26734	26906	27078
78	27250	27423	27597	27770	27944	28119	28294	28469	28645	28821	28997	29174
79	29351	29529	29707	29886	30065	30244	30424	30605	30786	30968	31150	31332
80	31515	31699	31883	32067	32253	32438	32625	32812	32999	33187	33376	33566
81	33756	33946	34138	34330	34523	34716	34910	35105	35301	35497	35694	35892
82	36091	36291	36491	36692	36894	37097	37301	37506	37712	37919	38127	38335
83	38545	38756	38968	39181	39395	39610	39827	40044	40263	40483	40705	40928
84	41152	41377	41604	41833	42063	42294	42527	42762	42998	43237	43476	43718
85	43962	44207	44455	44704	44956	45210	45466	45724	45985	46248	46514	46783
86	47054	47328	47605	47886	48169	48456	48746	49040	49338	49639	49945	50255
87	50569	50889	51213	51542	51877	52218	52565	52918	53278	53646	54021	54405
88	54798	55200	55613	56036	56472	56921	57384	57863	58359	58875	59412	59974
89	9,60564	9,61185	9,61844	9,62547	9,63302	9,64122	9,65025	9,66035	9,67196	9,68579	9,70342	9,72938

II. — *Table des logarithmes des fonctions elliptiques.*

θ.	log Θ(ω).	l. l. $\left(\frac{1}{q}\right)$.	log ω.	log ζ.	θ.	log Θ(ω).	l. l. $\left(\frac{1}{q}\right)$.	log ω.	log ζ.
° ′					° ′				
0. 0	0,	∞	0,196 1199	0,196 1199	22.30	0,00851 1104	0,30202 04	0,213 1421	0,179 4377
0.30	0,00000 4134	0,72610 91	1281	1116	23. 0	890 0376	29774 93	213 9206	178 6913
1. 0	1 6537	67397 36	1530	0868	23.30	929 8833	29352 36	214 7175	177 9288
1.30	3 7210	64029 59	1943	0455	24. 0	970 6519	28934 12	215 5329	177 1503
2. 0	6 6155	61470 92	2522	195 9876	24.30	1012 3478	28520 09	216 3668	176 3557
2.30	10 3375	59376 74	3266	9132	25. 0	1054 9760	28109 86	217 2194	175 5451
3. 0	14 8873	57587 16	4176	8222	25.30	1098 5411	27703 47	218 0907	174 7186
3.30	20 2653	56014 09	5252	7148	26. 0	1143 0483	27300 66	218 9808	173 8761
4. 0	26 4722	54603 56	6493	5908	26.30	1188 5026	26901 28	219 8899	173 0178
4.30	33 5084	53319 91	7900	4502	27. 0	1234 9094	26505 17	220 8181	172 1435
5. 0	41 3746	52138 31	9474	2932	27.30	1282 2741	26112 19	221 7654	171 2535
5.30	50 0717	51040 72	197 1213	1196	28. 0	1330 6024	25722 19	222 7319	170 3476
6. 0	59 6003	50013 59	3119	194 9295	28.30	1379 9000	25335 03	223 7179	169 4260
6.30	69 9115	49046 49	5191	7229	29. 0	1430 1729	24950 59	224 7233	168 4886
7. 0	81 1563	48131 16	7430	4998	29.30	1481 4272	24568 74	225 7484	167 5356
7.30	93 1851	47261 01	9836	2602	30. 0	1533 6691	24189 35	226 7933	166 5669
8. 0	106 0581	46430 62	198 2409	0041	30.30	1586 9053	23812 33	227 8580	165 5827
8.30	119 7530	45635 53	5149	193 7314	31. 0	1641 1423	23437 54	228 9427	164 5829
9. 0	134 2935	44871 98	8057	4423	31.30	1696 3870	23064 90	230 0476	163 5676
9.30	149 6739	44136 83	199 1134	1367	32. 0	1752 6465	22694 28	231 1728	162 5369
10. 0	165 8955	43427 34	4378	192 8147	32.30	1809 9280	22325 60	232 3184	161 4907
10.30	182 9599	42741 20	7791	4762	33. 0	1868 2390	21958 76	233 4847	160 4293
11. 0	200 8689	42076 36	200 1373	1212	33.30	1927 5872	21593 66	234 6716	159 3525
11.30	219 6242	41431 06	5124	191 7497	34. 0	1987 9804	21230 21	235 8795	158 2606
12. 0	239 2276	40803 74	9044	3618	34.30	2049 4269	20868 33	237 1084	157 1535
12.30	259 6811	40193 01	201 3135	190 9575	35. 0	2111 9350	20507 93	238 3586	156 0313
13. 0	280 9868	39597 65	7396	5367	35.30	2175 5132	20148 92	239 6301	154 8940
13.30	303 1467	39016 56	202 1828	0996	36. 0	2240 1705	19791 22	240 9233	153 7418
14. 0	326 1620	38448 74	6431	189 6460	36.30	2305 9160	19434 75	242 2382	152 5747
14.30	350 0381	37893 32	203 1206	1760	37. 0	2372 7591	19079 45	243 5751	151 3928
15. 0	374 7744	37349 48	6154	188 6896	37.30	2440 7094	18725 22	244 9341	150 1962
15.30	400 3744	36816 50	204 1274	1869	38. 0	2509 7769	18371 99	246 3154	148 9849
16. 0	426 8407	36293 70	6567	187 6678	38.30	2579 9719	18019 70	247 7193	147 7590
16.30	454 1760	35780 48	205 2034	1323	39. 0	2651 3047	17668 27	249 1460	146 5186
17. 0	482 3831	35276 28	7675	186 5806	39.30	2723 7865	17317 63	250 5956	145 2639
17.30	511 4649	34780 58	206 3492	0125	40. 0	2797 4282	16967 71	252 0684	143 9948
18. 0	541 4244	34292 91	9484	185 4281	40.30	2872 2415	16618 44	253 5647	142 7116
18.30	572 2648	33812 82	207 5652	184 8274	41. 0	2948 2384	16269 76	255 0846	141 4142
19. 0	603 9893	33339 93	208 1997	2104	41.30	3025 4307	15921 59	256 6285	140 1028
19.30	636 6012	32873 83	8519	183 5772	42. 0	3103 8314	15573 88	258 1965	138 7776
20. 0	670 1040	32414 19	209 5220	182 9277	42.30	3183 4534	15226 55	259 7889	137 4385
20.30	704 5013	31960 68	210 2099	2621	43. 0	3264 3101	14879 54	261 4061	136 0858
21. 0	739 7967	31512 99	9158	181 5802	43.30	3346 4153	14532 78	263 0482	134 7196
21.30	775 9940	31070 83	211 6398	180 8822	44. 0	3429 7834	14186 22	264 7155	133 3399
22. 0	813 0972	30633 93	212 3818	1680	44.30	3514 4289	13839 79	266 4085	131 9470
22.30	851 1104	30202 04	213 1421	179 4377	45. 0	3600 3673	13493 42	268 1272	130 5409

II. — *Table des logarithmes des fonctions elliptiques* (suite).

θ.	$\log\Theta(\omega)$.	$\mathrm{l.l.}\left(\frac{1}{q}\right)$.	$\log\omega$.	$\log\zeta$.	θ.	$\log\Theta(\omega)$.	$\mathrm{l.l.}\left(\frac{1}{q}\right)$.	$\log\omega$.	$\log\zeta$.
45° 0′	0,03600 3673	0,13493 42	0,268 1272	0,130 5409	67° 30′	9,09205 4229	0,96784 79	0,380 2283	0,057 2032
45.30	3687 6140	13147 05	269 8722	129 1217	68. 0	9383 3536	96352 91	383 7869	055 4717
46. 0	3776 1854	12800 61	271 6436	127 6897	68.30	9564 6991	95916 01	387 4139	053 7438
46.30	3866 0981	12454 05	273 4418	126 2450	69. 0	9749 5820	95473 85	391 1115	052 0201
47. 0	3957 3695	12107 30	275 2673	124 7878	69.30	9938 1331	95026 15	394 8825	050 3014
47.30	4050 0175	11760 29	277 1202	123 3181	70. 0	10130 4921	94572 64	398 7297	048 5885
48. 0	4144 0604	11412 96	279 0011	121 8362	70.30	10326 8086	94113 00	402 6560	046 8822
48.30	4239 5175	11065 24	280 9102	120 3423	71. 0	10527 2430	93646 91	406 6647	045 1834
49. 0	4336 4085	10717 08	282 8480	118 8364	71.30	10731 9676	93174 01	410 7592	043 4930
49.30	4434 7539	10368 39	284 8150	117 3189	72. 0	10941 1679	92693 93	414 9432	041 8118
50. 0	4534 5747	10019 13	286 8114	0,115 7899	72.30	11155 0440	92206 26	419 2208	040 1409
50.30	4635 8931	9669 20	288 8377	114 2496	73. 0	11373 8121	91710 56	423 5961	038 4812
51. 0	4738 7317	9318 56	290 8945	112 6982	73.30	11597 7064	91206 36	428 0740	036 8337
51.30	4843 1140	8967 13	292 9822	111 1359	74. 0	11826 9813	90693 14	432 6595	035 1996
52. 0	4949 0646	8614 84	295 1012	109 5629	74.30	12061 9137	90170 34	437 3581	033 5799
52.30	5066 6087	8261 62	297 2520	107 9796	75. 0	12302 8058	89637 36	442 1760	031 9758
53. 0	5165 7726	7907 39	299 4353	106 3860	75.30	12549 9885	89093 52	447 1196	030 3884
53.30	5276 5837	7552 08	301 6515	104 7826	76. 0	12803 8251	88538 09	452 1964	028 8190
54. 0	5389 0702	7195 62	303 9013	103 1694	76.30	13064 7159	87970 28	457 4142	027 2690
54.30	5503 2617	6837 92	306 1851	101 5469	77. 0	13333 1034	87389 19	462 7819	025 7397
55. 0	5619 1888	6478 91	308 5037	99 9152	77.30	13609 4787	86793 82	468 3095	024 2324
55.30	5736 8834	6118 51	310 8575	98 2747	78. 0	13894 3890	86183 10	474 0077	022 7487
56. 0	5856 3786	5756 62	313 2474	96 6256	78.30	14188 4468	85555 77	479 8888	021 2901
56.30	5977 7091	5393 17	315 6741	94 9683	79. 0	14492 3408	84910 47	485 9667	019 8581
57. 0	6100 9107	5028 07	318 1381	93 3030	79.30	14806 8494	84245 64	492 2569	018 4545
57.30	6226 0211	4661 23	320 6403	91 6301	80. 0	15132 8578	83559 49	498 7770	017 0811
58. 0	6353 0793	4292 55	323 1815	89 9500	80.30	15471 3782	82850 01	505 5474	015 7396
58.30	6482 1264	3921 94	325 7624	88 2630	81. 0	15823 5767	82114 85	512 5914	014 4321
59. 0	6613 2049	3549 29	328 3840	86 5694	81.30	16190 8064	81351 31	519 9360	013 1605
59.30	6746 3595	3174 51	331 0471	84 8697	82. 0	16574 6508	80556 22	527 6129	011 9270
60. 0	6881 6368	2797 48	333 7526	83 1642	82.30	16976 9806	79725 83	535 6595	010 7340
60.30	7019 0858	2418 10	336 5016	81 4534	83. 0	17400 0295	78855 67	544 1205	009 5837
61. 0	7158 7577	2036 25	339 2950	79 7376	83.30	17846 4963	77940 35	553 0498	008 4788
61.30	7300 7060	1651 81	342 1340	78 0173	84. 0	18319 6882	76973 24	562 5136	007 4221
62. 0	7444 9872	1264 65	345 0196	76 2929	84.30	18823 7218	75946 12	572 5943	006 4165
62.30	7591 6603	874 65	347 9531	74 5649	85. 0	19363 8191	74848 53	583 3963	005 4652
63. 0	7740 7874	481 66	350 9356	72 8339	85.30	19946 7520	73666 93	595 0549	004 5716
63.30	7892 4340	85 56	353 9686	71 1002	86. 0	20581 5406	72383 28	607 7507	003 7396
64. 0	8046 6689	9,99686 18	357 0533	69 3644	86.30	21280 6024	70972 74	621 7319	002 9734
64.30	8203 5646	99283 37	360 1912	67 6271	87. 0	22061 7569	69399 68	637 3550	002 2778
65. 0	8363 1977	98876 97	363 3838	65 8888	87.30	22952 0005	67610 09	655 1599	001 6581
65.30	8525 6489	98466 82	366 6329	64 1501	88. 0	23995 3679	65515 91	676 0272	001 1208
66. 0	8691 0039	98052 71	369 9400	62 4115	88.30	25271 8051	62957 25	701 5560	000 6736
66.30	8859 3529	98634 48	373 3069	60 6737	89. 0	26953 6233	59589 48	735 1923	000 3263
67. 0	9030 7920	97211 91	376 7357	58 9374	89.30	29559 1602	54375 92	787 3031	000 0931
67.30	9205 4229	96784 79	380 2283	57 2032	90. 0	∞	—∞	∞	000 0000

III. — *Table donnant la valeur numérique des fonctions elliptiques.*

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad (k = \sin\theta).$$

φ	θ = 0°	10°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	89°	90°
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491
3	05236	05236	05236	05237	05237	05238	05238	05238	05238	05238
4	06981	06981	06982	06983	06984	06986	06987	06987	06987	06987
5	08727	08727	08727	08729	08732	08735	08737	08737	08738	08738
10	17453	17456	17459	17475	17498	17520	17537	17540	17543	17543
15	26180	26189	26199	26254	26330	26406	26463	26475	26484	26484
20	34907	34927	34953	35082	35262	35447	35586	35615	35638	35638
25	43633	43674	43723	43973	44328	44699	44982	45040	45087	45088
27	47124	47174	47236	47551	48000	48472	48835	48910	48971	48972
30	52360	52429	52513	52943	53562	54223	54736	54843	54930	54931
32	55851	55933	56035	56555	57310	58123	58760	58893	59002	59003
35	61087	61193	61325	62003	62998	64085	64950	65132	65282	65284
37	64577	64702	64857	65655	66836	68141	69191	69414	69597	69599
40	69813	69969	70162	71165	72667	74358	75745	76043	76288	76291
42	73303	73483	73704	74860	76608	78600	80158	80617	80914	80917
45	78540	78756	79025	80437	82602	85122	87270	87741	88133	88137
47	82030	82275	82578	84178	86656	89585	92124	92687	93158	93163
50	87266	87556	87915	89825	92829	96465	99711	1,00444	1,01062	1,01068
53	92502	92841	93262	95514	99115	1,03587	1,07711	08665	09475	09483
55	95993	96366	96832	99331	1,03371	08479	13307	14442	15413	15423
57	99484	99894	1,00406	1,03167	07680	13494	19136	20488	21655	21667
60	1,04720	1,05188	05774	08955	14243	21254	28371	30135	31679	31696
63	09956	10486	11151	14784	20926	29332	38281	40594	42657	42679
65	13446	14020	14740	18691	25447	34893	45316	48098	50618	50645
66	15192	15787	16536	20651	27727	37728	48976	52031	54824	54855
67	16937	17555	18333	22615	30020	40600	52738	56096	59199	59232
68	18682	19324	20130	24583	32325	43510	56606	60303	63756	63794
69	20428	21092	21928	26555	34642	46457	60586	64661	68514	68557
70	22173	22861	23727	28530	36972	49441	64684	69181	73494	73542
71	23918	24630	25527	30509	39313	52463	68905	73877	78717	78771
72	25664	26400	27328	32491	41666	55522	73256	78759	84211	84273
73	27409	28169	29129	34477	44030	58618	77743	83844	90008	90079
74	29154	29939	30930	36466	46404	61750	82371	89146	96144	96226
75	30900	31710	32733	38457	48788	64918	87145	94682	2,02665	2,02759
76	32645	33480	34535	40452	51183	68120	92073	2,00470	09622	09732
77	34390	35251	36339	42449	53586	71356	97157	06529	17082	17212
78	36136	37022	38143	44449	55999	74625	2,02403	12878	25126	25280
79	37881	38793	39947	46451	58419	77924	07813	19538	33853	34040
80	39626	40564	41752	48455	60848	81253	13390	26527	43395	43625
81	41372	42336	43557	50462	63283	84609	19131	33866	53922	54209
82	43117	44108	46362	52470	65725	87991	25035	41569	65664	66031
83	44862	45879	47168	54479	68172	91395	31097	49648	78938	79422
84	46608	47651	48974	56490	70625	94821	37309	58105	94206	94870
85	48353	49423	50781	58503	73082	98264	43658	66935	3,12170	3,13130
86	50098	51195	52587	60516	75542	2,01723	50129	76116	33964	35467
87	51844	52968	54394	62530	78006	05194	56703	85612	61613	64253
88	53589	54740	56200	64545	80472	08674	63357	95366	99110	4,04813
89	55334	56512	58007	66560	82939	12161	70068	3,05304	4,55347	74135
90	1,57080	1,58284	1,59814	1,68575	1,85407	2,15652	2,76806	3,15338	5,43491	∞

IV. — *Table donnant la valeur numérique des fonctions elliptiques.*

$$\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \qquad (k = \sin \varphi).$$

φ	θ = 0°	10°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	89°	90°
1	0,01745	0,01745	0,01745	01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	03491	03491	03491	03490	03490	03490	03490	03490	03490	03490
3	05236	05236	05236	05235	05235	05234	05234	05234	05234	05234
4	06981	06981	06981	06980	06978	06977	06976	06976	06976	06976
5	08727	08726	08726	08724	08721	08718	08716	08716	08716	07816
10	17453	17451	17447	17431	17409	17387	17371	17367	17365	17365
15	26180	26171	26160	26106	26032	25957	25902	25891	25882	25882
20	34907	34886	34860	34733	34558	34381	34250	34224	34202	34202
25	43633	43593	43544	43298	42958	42612	42356	42304	42262	42262
27	47124	47073	47012	46703	46276	45842	45518	45453	45400	45399
30	52360	52292	52208	51788	51205	50609	50165	50074	50001	50000
32	55851	55768	55667	55161	54456	53733	53193	53082	52993	52992
35	61087	60980	60850	60194	59276	58332	57622	57477	57359	57358
37	64577	64452	64300	63530	62451	61337	60495	60323	60183	60182
40	69813	69658	69467	68506	67153	65746	64679	64459	64281	64279
42	73304	73126	72907	71804	70245	68619	67379	67124	66915	66913
45	78540	78324	78059	76720	74819	72822	71289	70972	70713	70711
47	82030	81787	81489	79977	77824	75553	73800	73436	73138	73135
50	87266	86979	86626	84832	82265	79538	77414	76971	76608	76604
53	92502	92166	91753	89650	86627	83388	80842	80307	79868	79864
55	95993	95622	95166	92843	89490	85879	83020	82417	81920	81915
57	99484	99077	98576	96019	92318	88308	85110	84432	83873	83867
60	1,04720	1,04255	1,03683	1,00756	96495	91839	88980	87276	86609	86603
63	09956	09430	08781	05459	1,00598	95236	90848	89898	89109	89101
65	13446	12878	12176	08577	03293	97427	92580	91523	90640	90631
66	15192	14601	13873	10132	04629	98502	93412	92297	91364	91355
67	16937	16324	15568	11683	05957	99562	94222	93047	92061	92050
68	18682	18047	17263	13231	07279	1,00609	95010	93771	92729	92718
69	20428	19769	18957	14776	08593	01643	95775	94470	93369	93358
70	22173	21491	20650	16318	09901	02664	96519	95144	93981	93969
71	23918	23213	22343	17857	11202	03672	97240	95793	94565	94552
72	25664	24935	24034	19394	12497	04668	97940	96417	95119	95106
73	27409	26656	25726	20928	13786	05651	98619	97016	95645	95630
74	29154	28377	27417	22459	15068	06624	99278	97590	96141	96126
75	30900	30097	29107	23989	16346	07586	99916	98141	96609	96593
76	32645	31818	30796	25516	17718	08537	1,00534	98667	97047	97030
77	34390	33538	32486	27041	18885	09478	01133	99170	97455	97437
78	36136	35258	34174	28565	20148	10410	01714	99650	97834	97815
79	37881	36978	35862	30086	21407	11333	02277	1,00107	98183	98163
80	39626	38698	37550	31606	22661	12249	02823	00543	98503	98481
81	41372	40417	39238	33124	23912	13156	03354	00958	98792	98769
82	43117	42137	40925	34641	25159	14057	03870	01354	99052	99027
83	44862	43856	42612	36157	26404	14952	04372	01731	99282	99255
84	46608	45575	44299	37672	27646	15841	04863	02091	99482	99452
85	48353	47294	45985	39186	28886	16726	05343	02436	99652	99619
86	50098	49013	47671	40699	30124	17606	05813	02768	99792	99756
87	51844	50732	49357	42211	31360	18484	06277	03089	99903	99863
88	53589	52451	51043	43723	32596	19359	06735	03401	99985	99939
89	55334	54170	52729	45235	33830	20233	07188	03708	1,00040	99985
90	57080	55889	54415	46746	1,35064	1,21106	07641	04011	00075	1,00000

TABLE ANALYTIQUE.

A

Nos des §§

ABEL. — Théorème d'Abel sur la forme possible de l'intégrale $\int y\,dx$ lorsque y est fonction algébrique de x 106
— Forme des intégrales exprimables par les fonctions algébriques et logarithmiques.. 114
— Formule générale d'intégration définie 206
— Fonctions qu'il a nommées *génératrices*... 526
— Théorème général sur les sommes d'intégrales..... 586
— Solution du problème de la division de l'argument dans une fonction elliptique..... 620
— Solution du problème de la transformation. 660
AIRES PLANES (CALCUL DES). — Formules générales..... 378 à 383
— Applications ..... 384 à 390
— Théorème de Steiner sur la surface des roulettes..... 391
— Théorème de M. Holditch..... 393
APPROXIMATION DES QUADRATURES .... 362 à 377
— Méthode des trapèzes..... 362
— Méthode de Cotes. 363
— Méthode de Simpson 367
— Méthode de Gauss 367

Nos des §§

APPROXIMATION DES QUADRATURES. — Formule d'Euler..... 372
ARC DE COURBE (LONGUEUR D'UN).... 394 à 417
— Théorème de Steiner..... 402
— Formule relative à une courbe fermée.... 403
— Théorème de Pascal..... 404
— Théorème de Jacques Bernoulli..... 405
— Théorèmes de Fagnano ..... 406 à 408
— Théorème de M. Chasles..... 409
— Méthode de M. Talbot..... 410 à 417
ATTRACTION DES CORPS SOLIDES. — Livre II, Chapitre IV..... 457 à 488
— Expression des composantes de l'attraction ..... 458 à 460
— Solide de plus grande attraction 463
— Attraction d'une sphère 464
— Attraction d'un ellipsoïde homogène..... 467
— Théorème général de M. Chasles sur l'attraction de certaines couches..... 477
— Théorème de M. W. Thomson..... 478
— Attraction d'une couche sphérique dont la densité est inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe..... 480
— Démonstration de G. Green 505

B

BERNOULLI (NOMBRES DE). — Expression des nombres de Bernoulli sous forme d'intégrales définies..... 170 et 171
— Théorème de Bernoulli sur le calcul des chances ..... 317 à 320
BERNOULLI (NOMBRES DE). — Découverte de deux arcs égaux en longueur sur une même courbe..... 405

C

CALCUL INVERSE DES INTÉGRALES DÉFINIES. — Chapitre VII, Livre II..... 513 à 530
— Expression par une intégrale définie de l'un des coefficients du binôme 520
— Expression de la fonction X_n par une intégrale définie..... 522
— Autre expression de la même fonction 523
CALCUL INVERSE DES INTÉGRALES DÉFINIES. — Expression du coefficient de x^n dans un développement en série..... 524
— Expression des racines d'une équation.... 525
— Quelques problèmes résolus..... 529 et 530
CAUCHY. — Ce qu'il a nommé valeur principale d'une intégrale..... 130

Nos des §§

CAUCHY. — Formule générale relative aux intégrales définies 282
— Démonstration d'une propriété de la fonction $\Gamma(n)$ 299
— Définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires..... 333
— Théorie de ces intégrales..... 331 à 335
— Démonstration de la formule de Taylor d'après Cauchy..... 531
CHASLES. — Théorème relatif aux arcs d'ellipse. 409
— Théorèmes relatifs à l'attraction 477

Nos des §§

CLEBSCH. — Théorème relatif aux intégrales elliptiques et ultra-elliptiques 591
COORDONNÉES CURVILIGNES. — Emploi d'un système quelconque de coordonnées dans l'expression d'un volume 451
— D'une surface 426
COORDONNÉES ELLIPTIQUES. — Leur emploi dans la recherche du volume de l'ellipsoïde... 455
CROFTON. — Théorème relatif à une intégrale double 506

D

DARBOUX. — Démonstration de la formule qui exprime le développement d'une fonction de deux variables en série dont les termes sont de la forme Y_n..... 563
— Démonstration de l'intégrale de l'équation différentielle d'Euler..... 583
DÉCOMPOSITION de $\sin mx$ et de $\cos mx$ en produits..... 89
— De $\frac{\cos^p x}{\cos nx}$, $\frac{\cos^p x}{\sin nx}$, $\frac{\cos nx}{\cos^p x}$, $\frac{\cos nx}{\sin^p x}$ en fractions plus simples ..... 90 à 95
— Décomposition d'une intégrale en partageant l'intervalle qui sépare les limites 201
— Application au calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ et de $\int_0^\infty \frac{\tang x}{x}\,dx$..... 203
DIFFÉRENTIATION sous le signe $\int$. — Théorème général..... 215

DIFFÉRENTIATION sous le signe $\int$. — Intégrales déduites de la différentiation .... 227 à 236
— Extension aux intégrales multiples..... 499
DIRICHLET. — Méthode pour la réduction des intégrales multiples..... 489
— Transformation de X_n en intégrales définies. 523
DISCONTINUITÉ des intégrales

$\int_0^\pi l(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$..... 185

$\int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx$..... 255

$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx$..... 257

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2}\,dx$..... 258

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \sin ax}{x^2}\,dx$..... 259

E

ELLIPTIQUES (FONCTIONS). — Réduction des intégrales elliptiques à la forme type. 67 à 70
— Introduction des lignes trigonométriques.. 71
— Cas où le polynôme placé sous le radical est du troisième degré..... 72
— Réduction de quelques intégrales à la forme elliptique ..... 76 à 79
— Théorème d'Abel..... 586
— Théorème de M. Clebsch..... 591
— Notation de Jacobi..... 592
— Périodicité des fonctions..... 597
— Études des infinies et des zéros..... 601
— Multiplication et division de l'argument... ..... 615 à 623
— Expression des fonctions sous forme de produits ..... 624 à 635
— Transformation des fonctions elliptiques.. ..... 646 à 663

ELLIPTIQUES (FONCTIONS). — Calcul numérique des fonctions elliptiques ..... 668 à 686
ELLIPTIQUES (Fonctions de deuxième espèce). — Leur expression au moyen de la fonction (Θ) 644
ELLIPTIQUES (Fonctions de troisième espèce). — Leur expression au moyen de la fonction (Θ) 645
ÉQUATION. — Expression des racines d'une équation par une intégrale définie..... 525
— Nombre des racines d'une équation correspondant aux points extérieurs à contour donné..... 349
EULER. — Équation différentielle intégrée par Euler sous forme algébrique. — Analogie avec la formule fondamentale de la Trigonométrie..... 581
— Méthode de Lagrange..... 582

Nos des §§

— Méthode de M. Darboux..... 583
— Emploi d'un triangle sphérique..... 584
— Interprétation géométrique donnée par Jacobi..... 585
— Expression du théorème avec la notation de Jacobi..... 593

EULÉRIENNES (INTÉGRALES). — Définition de la fonction $\Gamma(n)$..... 155 et 292
— Démonstration de la formule $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$..... 293
— De $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$..... 295 à 302
— Expression du produit $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$..... 297
— Valeur approchée de $\Gamma(n)$ quand n est grand..... 298

Nos des §§

EULÉRIENNES (INTÉGRALES). — Expression de $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)-\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$... 299 à 303
— Calcul de $\int_x^{x+1} l.\Gamma(x)\,dx$..... ... 300
— Expression de $l\Gamma(x)$ sous forme de produit. 301
— Développement de $l\Gamma(n+1)$ en série.... 304
— Calcul numérique de $\Gamma(n)$..... 305
— Expression de $\Gamma(n)$ sous forme d'intégrale. 314
— On en déduit une série qui représente $l\Gamma(n)$. 316
— Calcul numérique des intégrales Eulériennes. 330
— Table des valeurs de $l\Gamma(n)$..... 330

EULÉRIENNES (Intégrales de première espèce). — Définition de la fonction $B(p, q)$..... 321
— Réduction aux fonctions Γ..... 322 et 495
— Diverses intégrales qui s'expriment par les intégrales Eulériennes..... 325 et 326

F

FAGNANO. — Théorèmes sur les arcs de parabole cubique..... 406
— Sur les arcs de lemniscate..... 407
— Sur les arcs d'ellipse..... 408

FONCTIONS. — Étude de la fonction $\psi(x) = \frac{d}{dx} l\Gamma(x)$..... 306
— Cette fonction peut s'exprimer sous forme finie quand x est commensurable..... 307
— Son développement en série..... 308
— Son emploi pour sommer quelques suites.. ..... 309 à 310
— Expression de $\psi(x)$ sous forme d'intégrale..... 321 à 313

FONCTIONS BIEN DÉTERMINÉES. — Ce qu'on entend par fonctions bien déterminées..... 531
— Une fonction bien déterminée finie et continue pour toutes les valeurs de la variable dont le module est inférieur à R est développable pour ces valeurs en série ordonnée, suivant les puissances de la variable..... 531
— Une fonction bien déterminée finie et continue pour les valeurs de la variable dont le module est compris entre deux limites données est développable en série ordinaire, suivant les puissances ascendantes et descendantes de la variable..... 533

FONCTIONS BIEN DÉTERMINÉES. — Quelques propriétés des fonctions bien déterminées. ..... 535 à 538
— Toute fonction bien déterminée devient infinie..... 539
— Toute équation $\varphi(x) = 0$ dont le premier membre est bien déterminé a une racine au moins..... 540

FONCTIONS DÉSIGNÉES PAR LA LETTRE Y_n. — Leur définition..... 560
— Leurs propriétés..... 562
— Développement d'une fonction de deux variables en série de la forme ΣY_n..... 563
— Fonctions $H(x)$ et $\Theta(x)$ de Jacobi. 636 à 645

FONCTIONS GÉNÉRATRICES D'ABEL. — Leur définition..... 526

FONCTIONS HYPERBOLIQUES. — Leur définition.. 151

FONCTIONS MAL DÉTERMINÉES. — Leurs intégrales..... 351 à 355

FOURIER. — Formule de Fourier..... 284 à 291

FRACTIONS RATIONNELLES. — Leur intégration. ..... 18 à 42

FRULLANI. — Formule générale d'intégration définie..... 275
— Applications..... 276 à 278
— Généralisation de la formule de Frullani... 279

G

GAUSS. — Preuve singulière de l'existence des racines dans une équation algébrique.... 226
— Méthode pour le calcul approché d'une intégrale définie..... 369
— Théorème relatif à une surface fermée.... 435

GAUSS. — Formule pour l'évaluation d'un volume..... 453

GREEN. — Théorème relatif à certaines intégrales multiples..... 502
— Applications à la théorie de l'attraction... 505

H

Nos des §§

HOLDITCH. — Théorème général relatif aux aires planes..... 393

I

Nos des §§

INTÉGRABILITÉ. — Conditions d'intégrabilité des formules différentielles..... 566 à 579
— Conditions d'intégrabilité de $M\,dx + N\,dy$. 566
— Conditions d'intégrabilité de $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n$.... 568
— Théorème de Jacobi..... 570
— Conditions d'intégrabilité d'une expression de la forme $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$. 573
— Moyen d'effectuer l'intégration quand elle est possible..... 576
— Partage de la condition générale en plusieurs équations distinctes..... 579
INTÉGRALES ALGÉBRIQUES. — Théorème d'Abel. 106
— Théorème de M. Liouville..... 115
INTÉGRALES DÉFINIES. — Définition de l'intégrale définie..... 2
— Cas où la fonction intégrée passe par l'infini. 4
— Calcul des intégrales définies par le moyen de l'intégrale indéfinie..... 123 à 167
— Intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ déduite de l'intégration indéfinie..... 140
— Intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ déduite de $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$..... 153
— Intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x\,dx$ déduite du développement en série..... 175
— Intégrale $\int \frac{\sin rx\,dx}{x}$ déduite des séries... 179
— Intégrale $\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2} \cos 2\beta x\,dx$ déduite des séries..... 182
— Intégrale $\int_0^\pi l(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$ déduite du développement en série..... 185
— Intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2}$ déduite du développement en série..... 189
— Intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - A\cos x - B\sin x}$. — Discussion relative au cas où A et B sont imaginaires..... 199
INTÉGRALES DÉFINIES. — De la décomposition en intégrales partielles..... 201
— De la décomposition en intégrales partielles. 202
— D'un théorème général sur le changement de l'ordre des intégrations..... 224
— De la différentiation sous le signe $\int$..... 236
— De l'intégration sous le signe $\int$..... 237
— De l'intégration sous le signe $\int$..... 242
— Intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$ déduites de l'intégration sous le signe $\int$.. 248
— De l'intégration sous le signe $\int$..... 250
— Intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx$ déduite de l'intégration sous le signe $\int$..... 253
— De l'intégration sous le signe $\int$..... 254
— De l'intégrale discontinue $\int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx$..... 256
— Autres démonstrations..... 260 et 557
— Autre démonstration..... 266
— De la théorie des intégrales eulériennes... 296
— Du développement en série..... 318
— De l'emploi des imaginaires..... 340
— Intégrales équivalentes $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ et $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ déduites de la considération des imaginaires..... 341
— Des intégrales imaginaires..... 346 et 347
— Intégrale équivalente $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$ déduite de la théorie des intégrales imaginaires.. 348
INTÉGRALES DOUBLES. — On peut intervertir l'ordre des intégrations..... 223
— Cas d'exception..... 225
— Application faite par Gauss à la démonstration de l'existence d'une racine..... 226
— Formule de Fourier..... 291

Nos des §§

INTÉGRALES DOUBLES. — Intégrale double déduite de l'expression de volume d'un ellipsoïde 455
— Formule de Poisson pour la réduction d'une intégrale double 487
INTÉGRALES INDÉFINIES. — Définition de l'intégrale indéfinie 1
— Indication des diverses méthodes d'intégration ..... 7 à 12
— Des fractions rationnelles. 18, 22, 25 à 42
— Intégration des différentielles irrationnelles ..... 43 à 79
— Des fonctions trigonométriques et exponentielles ..... 80 à 104
— Impossibilité de certaines intégrations. 105 à 122
INTÉGRALES MULTIPLES ..... 481 à 512
— Définition 481
— Calcul de l'intégrale

$$\int\int\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

lorsque $x_1+x_2+\ldots+x_n<1$ 483
— Réduction de l'intégrale

$$\int\int\int x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}\ldots x_n^{k_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \times F(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

prise entre les mêmes limites 486
— Méthode de Dirichlet pour la réduction des intégrales multiples 487

Nos des §§

INTÉGRALES MULTIPLES. — Changement de variables dans une intégrale multiple 492
INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES ..... 331 à 361
— Définition de Cauchy 332
— L'intégrale, sous certaines conditions, est indépendante du chemin qui réunit les points extrêmes ..... 333 et 334
— Théorème relatif à un contour fermé 335
— Cas d'une fonction mal définie ou qui devient infinie 337
— Variation brusque d'une intégrale quand le contour qui dirige l'intégration passe par un point critique 343
— Nombre des racines d'une équation dans l'intérieur d'un contour 349
— Intégrales des fonctions susceptibles de plusieurs valeurs 351
— Contours élémentaires, périodes.. 353 et 354
— Étude de la fonction $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$. 355
— Système de représentation de Riemann ... . 356 à 361
INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$ 221
— Intégrales définies déduites de l'intégration sous le signe $\int$ ..... 237 à 257

J

JACOBI. — Formule d'intégration définie 207
— Démonstration d'une propriété de la fonction $B(p, q)$ 495
— Expression des racines d'une équation algébrique par les intégrales définies 525
JOACHIMSTAHL. — Décomposition de l'équation qui exprime la condition d'intégrabilité en plusieurs équations plus simples 579

K

KUMMER. — Formule d'intégration définie .... 209 et 213
KUMMER. — Développement de $l\Gamma(x)$ en série trigonométrique 558

L

LAGRANGE. — Série de Lagrange 543
— Intégration de l'équation d'Euler 582
LEMNISCATE. — Théorème de Fagnano sur l'égalité de deux arcs de lemniscate 407
LIOUVILLE. — Forme de l'intégrale $\int dx\sqrt[m]{X}$ lorsque cette intégrale est algébrique 112
— Théorème sur la forme de l'intégrale $\int y\,dx$, où y est algébrique lorsqu'elle est exprimable explicitement sous forme finie. 115
LIOUVILLE. — Réduction d'une intégrale multiple 486
— Emploi de la différentiation sous le signe $\int$ dans le calcul d'une intégrale multiple... 499
— Théorème sur les fonctions doublement périodiques bien définies 614

N

Nos des §§

NIVEAU. — Surfaces de niveau relatives à l'attraction d'un corps 473
— Théorèmes relatifs à l'attraction de certaines couches terminées par une surface de niveau 477

P

PASCAL. — Relation entre la longueur d'une roulette et la circonférence d'une ellipse. 404
PÉRIODICITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES 597
— Sur les fonctions doublement périodiques.. 606
— Impossibilité d'une troisième période 609
— Propriétés des fonctions doublement périodiques bien définies 610
— Théorème de M. Liouville 614
PLARR. — Propriété des fonctions X_n 565
POISSON. — Formule générale relative aux intégrales définies 204
POISSON. — Idée ingénieuse à l'occasion d'un paradoxe de calcul intégral 332
— Réduction d'une intégrale double à une intégrale simple 487
PONCELET. — Théorème de géométrie découvert par Poncelet, et rattaché par Jacobi à la théorie des fonctions elliptiques 585
POTENTIEL. — Définition du potentiel 468
— Équation différentielle à laquelle il satisfait.. ..... 470 et 471
PUISEUX. — Sa théorie des contours élémentaires 353

R

RACINES. — Démonstration de l'existence d'une racine dans une équation algébrique, déduite de la considération d'une intégrale double 226
— Nombre des racines d'une équation dans l'intérieur d'un contour donné 349
RACINES. — Expression des racines par des intégrales 525
RIEMANN. — Son système de représentation des fonctions mal définies ..... 356 à 361

S

SCHLOMILCH. — Détermination de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(1-v)^{l-1} v^{k-1} dv}{[b(1-v)+av]^{k+l}}$ 496
SÉRIES. — Emploi des séries dans le calcul des intégrales définies ..... 168 à 213
— Calcul par le développement en série des intégrales $\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x}$ 168
$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1+x}$ 169
$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x^2}$ 169
$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1-x} dx$ 170
$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z-1}$ 170
$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1} dx}{1+x}$ 171
$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{1+e^x} dx$ 172
$\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}}$ 175
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x\,dx$ 175
$\int_0^1 \frac{dx}{lx}(x^a - x^b)$ 176
$\int_0^1 \frac{\sin n\,lx}{lx} dx$ 176
$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{(1+x)\,lx}$ 177
$\int_0^\infty \frac{e^{-qx} \sin rx}{x} dx$ 179
$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{x} dx$ 179
$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} l(1+k\cos x)$ 180
$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ 181

Nos des §§

$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x \, dx$ 182

$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ 184

$\int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx$ 185

$\int_0^\pi \cos mx \, l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx$ 186

$\int_0^\pi \frac{\cos mx \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}$ 187

$\int_0^\pi \frac{\sin x \sin mx \, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}$ 189

— On en déduit $\int_0^\pi \frac{z \sin z}{h^2 + z^2}$, $\int_0^\infty \frac{\cos z \, dz}{h^2 + z^2}$ ... 189

Séries. — Transformation de quelques séries en intégrales ..... 513 à 519

— Théorème de Taylor 531

— Théorème de Laurent 535

— Série de Lagrange 543

— Séries trigonométriques ..... 545 à 550

— Développement d'une fonction de deux variables en une série dont les termes sont de la forme Y_n 563

Nos des §§

Séries. — Développement d'une fonction de x en série dont les termes sont de la forme X_n. 565

Sommations. — Calcul de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

quand n est infini 14

— Calcul de $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \ldots + \frac{n}{2n^2}$ et de $\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n+1)^2}}$ .. 14

— Quelques sommations déduites des intégrales ..... 514 à 516

Steiner. — Théorème général sur l'aire des roulettes 391

— Théorème sur la longueur des roulettes... 402

Surfaces courbes (Évaluation des).. 418 à 437

— Surfaces de révolution 418

— Formule relative aux surfaces quelconques. 422

— Problème de Viviani 424

— Triangle sphérique 425

— Emploi des coordonnées curvilignes 426

— Surfaces sphériques 428

— Surface de l'ellipsoïde 430

— Coordonnées sphériques pour une surface quelconque 432

— Introduction des rayons de courbure dans l'évaluation d'une surface quelconque.... 433

T

Talbot. — Méthode pour obtenir des relations entre certaines intégrales ..... 410 à 416

Thomson. — Théorème relatif à la théorie de l'attraction 478

Thomson. — Attraction d'une couche sphérique hétérogène 480

V

Viviani. — Problème de Viviani 424

Volumes. — Détermination des volumes..... ..... 438 à 456

— Expression d'un volume par une intégrale simple ..... 438 à 443

— Emploi d'une intégrale double .... 444 à 449

Volumes. — Coordonnées polaires 450

— Coordonnées curvilignes quelconques 451

— Introduction de l'élément de surface dans l'évaluation des volumes 453

— Volume de l'ellipsoïde évalué à l'aide des coordonnées elliptiques 455

W

Wallis. — Théorème de Wallis sur l'expression de π en produits 149

— Même formule déduite de l'intégrale $\int_0^1 dx(1-x^2)^n$ 152

Wallis. — Application du théorème de Wallis au calcul de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 153

— Au calcul de $\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)\,lx} dx$ 178

CABOT SCIENCE LIBRARY

CANCELLED

MAY 1 5 1995

3 2044 030 615 298

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

DUE JAN 2 '46

DUE JAN 19 '46

DUE MAR -6 '43